Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 8.

Теретёнков Александр Евгеньевич

13 апреля 2021 г.

В прошлый раз...

Утверждение. Пусть

$$B(t) \equiv e^{iH_B t} B e^{-iH_B t} = \int dk g_k (e^{-i\omega_k t} b_k + e^{i\omega_k t} b_k^\dagger)$$

— свободная эволюция B, а

$$x(t) \equiv e^{iHt} x e^{-iHt}$$

— гейзенбергоская эволюцию кооридинаты x, тогда

$$m\ddot{x}(t) + V'(x(t)) - \int_0^t ds D(t-s) x(s) = B(t),$$

где

$$D(t) = 2 \int dk g_k^2 \sin \omega_k t$$

Модель Калдейры-Легетта

Также как и для спин-бозона можно ввести спектральную плотность

$$J(\omega) = \int dk g_k^2 \delta(\omega - \omega_k), \qquad \omega_k > 0$$

$$D(t) = 2\int_0^\infty d\omega J(\omega) \sin \omega t$$

$$D_{\text{th}}(t) = 2\int_0^\infty d\omega \operatorname{cth} \frac{\beta\omega}{2} \cos \omega t J(\omega)$$

Модель Калдейры-Легетта

В случае квадратичного потенциала $V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2$, имеем

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) - \int_0^t D(t-s)x(s) = B(t),$$

В этом случае уже исходный гамильтониан является бесконечно-мерным обобщением унитарной динамики с квадратичным гамильтонианом, рассмотренной ранее. В частности, если начальное состояние системы и резервуара — гауссовское, то оно сохраняется в процессе эволюции, кроме того, редуцированная динамика — также гауссовская.

Модель Калдейры-Легетта

Утверждение. Пусть $X_{1,2}(t)$ — решения (скалярного) уравнения

$$m\ddot{X}(t) + m\omega_0^2 X(t) - \int_0^t ds D(t-s) X(s) = 0$$

с начальным условием $X_1(0) = 1$, $\dot{X}_1(0) = 0$ и $X_2(0) = 0$, $\dot{X}_2(0) = 1$, тогда

$$x(t) = X_1(t)x(0) + X_2(t)\dot{x}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t ds X_2(t-s) B(s).$$

Модель Калдейры-Легетта

Доказательство. Преобразование Лапласа $\tilde{x}(p) = \int_0^\infty dte^{-pt}x(t)$ уравнения

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) - \int_0^t D(t-s)x(s) = B(t)$$

имеет вид

$$m(p^2\tilde{x}(p) - px(0) - \dot{x}(0)) + m\omega_0^2\tilde{x}(p) - \tilde{D}(p)\tilde{x}(p) = \tilde{B}(p),$$

тогда

$$\tilde{x}(p) = \frac{1}{m(p^2+\omega_0^2) - \tilde{D}(p)}(\tilde{B}(p) + m\dot{x}(0) + mpx(0))$$

Модель Калдейры-Легетта

При $\tilde{B}(p)$ с соответствующими начальными условиями, имеем

$$\tilde{X}_1(p) = \frac{m}{m(p^2 + \omega_0^2) - \tilde{D}(p)} p$$

$$\tilde{X}_2(p) = \frac{m}{m(p^2 + \omega_0^2) - \tilde{D}(p)}$$

тогда

$$\tilde{x}(p) = \tilde{X}_1(p) x(0) + \tilde{X}_2(p) \dot{x}(0) + \frac{1}{m} \tilde{X}_2(p) \tilde{B}(p)$$

После обратного преобразования получаем требуемое. $\square$

Модель Калдейры-Легетта

$$x(t) = X_1(t)x(0) + X_2(t)\dot{x}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t ds X_2(t-s)B(s)$$

В случае $\langle B(t)\rangle = 0$ (в частности, в случае равновесного резервуара)

$$\langle x(t)\rangle = X_1(t)\langle x(0)\rangle + X_2(t)\langle \dot{x}(0)\rangle$$

$$x(t) - \langle x(t)\rangle = X_1(t)(x(0) - \langle x(0)\rangle) + X_2(t)(\dot{x}(0) - \langle \dot{x}(0)\rangle) + \\ + \frac{1}{m}\int_0^t ds X_2(t-s)B(s)$$

Модель Калдейры-Легетта

Пусть в начальные момент времени система и резервуар некоррелированы, тогда

$$\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle =$$
$$= (X_1(t))^2 \langle (x(0) - \langle x(0) \rangle)^2 \rangle + X_2(t) \langle (\dot{x}(0) - \langle \dot{x}(0) \rangle)^2 \rangle +$$
$$+ X_1(t) X_2(t) \langle \{ x(0) - \langle x(0) \rangle, \dot{x}(0) - \langle \dot{x}(0) \rangle \} \rangle +$$
$$+ \frac{1}{m^2} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 X_2(t - s_1) X_2(t - s_2) \langle B(s_1) B(s_2) \rangle,$$

где $\langle B(s_1) B(s_2) \rangle$ определяется $D(t)$ и $D_{\mathrm{th}}(t)$ в случае равновесного резервуара.

Модель Калдейры-Легетта

Аналогично, можно вычислить $\langle (\dot{x}(t) - \langle \dot{x}(t) \rangle)^2 \rangle$ и $\langle \{x(t) - \langle x(t) \rangle, \dot{x}(t) - \langle \dot{x}(t) \rangle\} \rangle$, что однозначно задаёт динамику гауссоской редуцированное матрицы плотности системы.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Рассматривается уравнение вида

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t$$

Базовый пример:
Гамильтониан

$$H = H_0 + \lambda H_I$$

Уравнение Лиувилля-фон Неймана в представлении взаимодействия

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t, \qquad \mathcal{L}_t = -i[H_I(t), \cdot], \qquad H_I(t) = e^{iH_0 t} H_I e^{-iH_0 t}$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Введём супероператор, который является идемпотентном

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Кроме того, введём оператор $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Введём супероператор, который является идемпотентном

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$$

Кроме того, введём оператор $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{P} + \mathcal{Q} = I$$

Базовый пример (Argyres, Kelley, 1964)

$$\mathcal{P}\rho = \mathrm{Tr}_B\,\rho \otimes \rho_B$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Утверждение. Уравнение Накажимы-Цванцыга (Nakajima, 1958; Zwanzig, 1960):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}, \qquad \mathcal{I}_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{Texp}}\left(\lambda\int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Доказательство. Распишем уравнение Лиувилля-фон Неймана в проекциях

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\rho_t \\ \frac{d}{dt}\mathcal{Q}\rho_t = \lambda\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\rho_t \end{cases}$$

Интегрируя второе уравнение, имеем

$$\mathcal{Q}\rho_t = \mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda\int_{t_0}^t \mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds,$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{Texp}}\left(\lambda\int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Подставляя в первое уравнение, получаем уравнение Накажимы-Цванцига

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda^2\int_{t_0}^t \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds$$

$\square$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t}\mathcal{K}_s^t\rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot)\otimes\rho_B$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t),\rho_S\otimes\rho_B])\otimes\rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B),\rho_S]\otimes\rho_B$$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Как правило, рассматирвают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t), \rho_S \otimes \rho_B]) \otimes \rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B), \rho_S] \otimes \rho_B$$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.
Это выполнено в случае, когда рассматривается гауссовский бозонный резервуар с нулевым средним, а $H_I(t)$ — линеен по операторам рождения и уничтожения. Более того, в этом случае обнуление моментов нечётного порядка даёт

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1} \cdots \mathcal{L}_{t_{2k}}\mathcal{P} = 0,$$

что также часто предполагается.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Член $\mathcal{I}_t \rho_{t_0}$ характеризует насколько начальное состояние согласовано с проекцией. Если $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то $\mathcal{I}_t \rho_{t_0} = 0$. В случае проектора $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$ соответствует факторизованным начальным состояниям вида $\rho_{t_0} = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

Если $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$ и $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то первый неисчезающий член — второго порядка по λ

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \lambda^2\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} + O(\lambda^3)$$

С учётом $\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda^2 \int_{t_0}^t \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds$$

— уравнение в приближении Борна.

Метод проекционных операторов Накажимы — Цванцига

В случае $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, то оно принимает вид

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) \otimes \rho_B = -\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds \otimes \rho_B$$

"Сокращая" на ρ_B, имеем

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds$$

— такое уравнение уже возникало в предыдущем семестре.