

Лекция 8.

Формулы инстантов как сечения
 $PSU(n)$ -расширений на S^2 .

"Squashed S^2 "

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \vec{h} \partial_\mu \vec{h} + \lambda h_3^2$$

$$\vec{h}^2 = 1$$

$$\lambda \rightarrow \infty: h_3 = 0$$



В этом пределе получаем XY-модель

(таргет-пр. ко S^1).

$$Z = \int e^{-\frac{1}{g} \int d^2x \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi} \prod d\varphi$$

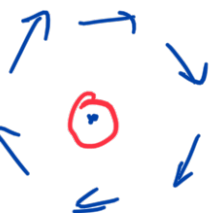
температура

2 фазы: безмасштабная
 ("инфинитесимальная фаза")

← массовая ("Poh-Gordon")

$$g \rightarrow 0$$

$$g \rightarrow \infty$$



$$\mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$$

$$(S^1)_{NS} \rightarrow S' \subset S^2$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^N V_i \varphi_{sing}(z_i) + \varphi_{reg}$$

2, 1

1



$\pm 1 \quad \Delta \varphi_{\text{ring}}(z_i) \equiv \delta(z - z_i)$
 $S = \frac{1}{g} \int d^2z \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial_\mu \tilde{\varphi} + S_{\text{Klein}} + \sum_{i=1}^{2n} V_i \tilde{\varphi}(z_i)$
 $\sum_{i=1}^{2n} V_i = 0$
 $Z = \sum_{n,m=0}^{\infty} \delta^{n+m} \frac{1}{n!} \frac{1}{m!} \int \prod d\tilde{\varphi} e^{\frac{1}{g} \int d^2z (\partial_\mu \tilde{\varphi})^2} \times \prod_{i=1}^{2n} \int d^2z_i e^{\frac{1}{g} \tilde{\varphi}(z_i)} \times \prod_{j=1}^m \int d^2z_j e^{-\frac{1}{g} \tilde{\varphi}(z_j)}$

1) статическая кинематика в 2D

2) статическая sine-Gordon

$V = \delta_1 \cos\left(\frac{1}{g} \tilde{\varphi}\right) + \delta_2 \cos\left(\frac{2}{g} \tilde{\varphi}\right) + \dots$
 winding numbers

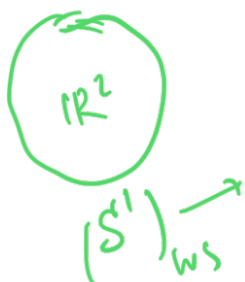
2 фазы: "прозрачная" ($g \rightarrow 0$)
"магнет" ($g \rightarrow \infty$)



2 состояния в S^2 минимизация

$S \rightarrow S + \theta Q$, где $Q = \frac{1}{2\pi} \int_D \Omega_{FS} = \pm \frac{1}{2}$

б. гомоморфизм в состояние



$W = z$ минимизация

$W = \frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}$

$|w| \rightarrow 1 \text{ as } \infty$

$$\delta \rightarrow \delta \left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}} \right) \sim \delta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \text{ при } \theta = \pi.$$

SU(n)-сигма

Потенциал

$$V_1 = \kappa \sum_{A=1}^n \sum_{\alpha < \beta} \left(|u_A^\alpha|^2 - |u_B^\beta|^2 \right)^2$$

(n=2: $V_1 = \kappa n_3^2$)

$\kappa \rightarrow \infty: |u_A^\alpha| = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (\|u_A\|=1)$

тип-во выраж V_1 (матричный):

$$u_A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{Ad} e^{i\zeta_\alpha}, \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

$\zeta_\alpha = \omega_\alpha \cdot \underline{\phi_{ws}}$
 $(S')_{ws}$

$u_A \sim e^{i\alpha_A} u_A$
 $\zeta_\alpha \in [0, 2\pi)$
 (канон. пр-е)

$\zeta_\alpha \rightarrow \zeta_\alpha + \text{const.}$

$(S')^{n-1} \subset S_n$

$\begin{pmatrix} e^{i\zeta_1} \\ \vdots \\ e^{i\zeta_n} \end{pmatrix} \cdot U^0$
 $(U^0)_A^\alpha = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{Ad}$

Вопросы $\mathbb{R}^2 \rightarrow S_n$

$$(S')_{ws} \rightarrow (S')$$

$$(w_1 \dots w_n) \bmod (1 \dots 1)$$

$\uparrow$ winding numbers

Тон. заряды Q_A ?

$$S_n \hookrightarrow (\mathbb{CP}^{n-1})^{\times n}$$

$$Q_A = \frac{1}{2\pi} \int_D (\Omega_{FS})_A$$

$$\sum_{A=1}^n Q_A = 0$$

$$\text{П.А. } S_n \hookrightarrow (\mathbb{CP}^{n-1})^{\times n} \rightarrow (\mathbb{CP}^{n-1})_A$$

$$i: D \rightarrow S_n \quad | \quad i_A \equiv D \rightarrow S_n \xrightarrow{\widehat{S}_A} (\mathbb{CP}^{n-1})_A$$

$$\{ \text{Im}(i_A) \subset \text{огранич. кривые } \mathbb{CP}^{n-1} \quad \forall A$$

элементарный вопрос $\Omega_{FS} = \omega_j \Rightarrow Q_A = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D = (S')_{ws}} i_A^* \omega_j$

$$(Q_0)_A = \frac{1}{n} \sum_B (w_B - w_{S(A)}) ; \quad \sum_{A=1}^n (Q_0)_A = 0$$

$\uparrow$ инварианты

Тон. заряды вырожденных векторов:

$$Q_A = (Q_0)_A + (q_1 \dots q_n)$$

$$\sum_{A=1}^n q_A = 0$$

↑
инвариант не возмущает.

Вопреки = серия $PSU(n)$ -расхождений на S^1
 Ton. inv. = $\left(\sum_{A=1}^n W_A \mod n \right)$ ↑
worksheet.

$$\begin{array}{c} E \\ \pi \downarrow \\ \mathbb{CP}^1 \end{array} \quad \begin{array}{l} U_+, U_- = \text{где} \text{ кривая на } \mathbb{CP}^1 \\ U_+ \cap U_- = S^1 = \text{экватор.} \end{array}$$

серия: $i_+: U_+ \rightarrow E, i_-: U_- \rightarrow E$

$$\pi \circ i_+ = \text{id}, \quad \pi \circ i_- = \text{id}.$$

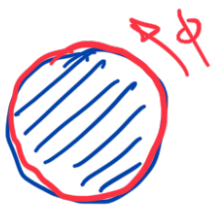
$$E|_{U_{\pm}} = \underbrace{U_{\pm}}_{\text{диск}} \times \underbrace{F_n}_{\text{сфера}}$$

$$i_+: U_+ \rightarrow F_n, \quad i_-: U_- \rightarrow F_n$$

$$i_+|_{S^1} = g \circ i_-|_{S^1}$$

$$g: S^1 \rightarrow PSU(n)$$

$$\gamma \in \pi_1(PSU(n)) = \text{Ton. inv. расхождений}$$



$$D = \text{wordsheet} = U +$$

На U — задана метр. в точке U_Λ (проб. метр.)

Групповой элемент спейса

$$g: S^1 \rightarrow \text{PSU}(n)$$

$\uparrow$
корр. ϕ

$$g = \underbrace{e^{-i \frac{\sum \delta_A}{n}}}_{\substack{\text{"} \\ -i \frac{\sum W_A}{n} \phi}} \begin{pmatrix} e^{i \delta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i \delta_n} \end{pmatrix}, \text{ где } \delta_A = W_A \cdot \phi$$

$-2\pi i \frac{\sum W_A}{n}$

$$\phi \rightarrow \phi + 2\pi: \text{ фазы } e$$

$$\Rightarrow \text{пол. клас. } [g] \in \pi_1(\text{PSU}(n))$$

$$\underbrace{\sum_{A=1}^n W_A}_{\text{mod } n}$$

Зависим от $(S^1)^{n-1} \times S^1$:

$$V_2 = \kappa_2 \sum_{A=1}^n \sum_{\alpha=2}^{n-1} \left(\text{Im} \left[(u_A^\dagger u_A)^{\alpha} \right] \right)^2$$

$$n_2 \rightarrow \infty$$

$$4\pi \sum_{k=1}^n \sum_{d=2}^{n-1} \sin^2(n(\zeta_1 - \zeta_d))$$

$$\Rightarrow \zeta_d = \zeta_1 \text{ when } d=1 \dots n-1$$

$$\zeta = \zeta_n - \zeta_1$$

$$\text{Dir-60 matrix } (V_1 + V_2) = S' C F_n$$

$$\text{Winding numbers} = (w_1, w_2 = w_1, \dots, w_{n-1} = w_1, w_n) \mod (1, \dots, 1)$$

$$\vec{Q}_0^{(k)} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} - \delta, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

$\uparrow$
 k -я координата $(k=1 \dots n)$
 n координат базиса

$$n=2: \quad \delta \rightarrow \delta \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\text{при } n: \quad \delta \rightarrow \delta \sum_{k=1}^n e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{Q}_0^{(k)}}$$

$$\theta = \frac{2\pi p}{n}$$

$$\sum_k \omega^p A$$

$$p \neq 0 \mod n, \quad \omega = 0$$

$$1 < \text{KOA}(p, n) < n - \text{масштабный шаг}$$

$$\text{линейно-матрица } n \times n \text{ фазов } C \text{ } W \in NW \text{-матрица}$$

$g = U V_0 U^\dagger$
 $V_0 = \text{Diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n})$

← *конструкция (параметры)*

$S_{\text{WZW}} = \frac{R^2}{2} \int_{M_2} \text{Tr}(\partial_\mu g \cdot \partial_\mu g^\dagger) +$
 $+ \frac{i}{12\pi} K \int_{M_3} \text{Tr}((g^\dagger dg)^3)$

$(\partial M_3 = \Sigma)$

$\bigcirc = \sum_A \partial_\mu u_A \cdot \partial_\mu \bar{u}_A - \sum_{A \neq B} e^{i(\phi_A - \phi_B)} |u_A \cdot \partial_\mu \bar{u}_B|^2$

$\bigcirc = \int_{M_2} (\mathcal{L}_{\text{top}} + \mathcal{L}_\lambda)$

$\phi_A = \frac{2\pi k}{n}$

$\int \mathcal{L}_{\text{top}} = \frac{K}{2\pi} \int \sum_{A=1}^n \phi_A (\mathcal{L}_{\text{FS}})_A$

$\mathcal{L}_\lambda = \frac{K}{4\pi} \sum_{A \neq B} \sin(\phi_A - \phi_B) (u_B \odot d\bar{u}_A)_\lambda (\bar{u}_B \odot du_A)$

$V_0 = \text{Diag}(e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_n}) = \text{Diag}(\omega, \omega^2, \dots, \omega^n)$

1) $\mathbb{C}P^{n-1}$ - многообразие n -симпликса

нострона абна острона

- Demmelde, Thompson A. al.

- B, Linst T-gyansu "murospage"
 korepoto → korepoto
 notuznen

$\mathbb{M}$

$\{$

$$K = \dots + \sum_{i=1}^n \text{Li}_2(e^{x_i - x_{i+1}})$$

2) $Gr(K, n)$ - острона q -JY.

Ricci-flow

$(\mathbb{C}^*)^{n-1}$
 UV

RG flow

$\mathbb{CP}^{n-1}$
 IR

no-no
 maceal. $\leftrightarrow$
 UV

$Gr(K, n)$
 IR