

# Лекция 7.

**Теорема:**  $\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x e^{-c_1 \sqrt{\ln x}}), c_1 > 0.$

До-во:

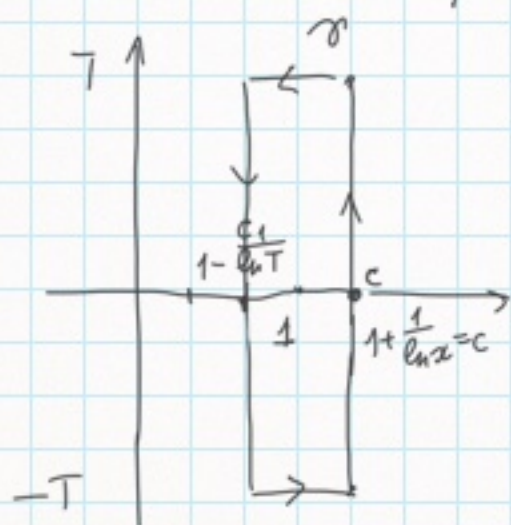
при  $c > 1$

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-iT}^{c+iT} \frac{x^s}{s} \frac{1}{\zeta(s)} ds + R(x, T), \text{ где}$$

$$R(x, T) \ll \frac{x^c}{T} \left(1 + \frac{1}{c-1}\right) + 2^c \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln T\right)$$

Берём  $c = 1 + \frac{1}{\ln x}$ . Тогда

$$R(x, T) \ll \frac{x}{T} (\ln x) + \ln T.$$



$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{x^s}{s} \frac{1}{\zeta(s)} ds = 0$$

Нужно оценить  $|\zeta^{-1}(s)|$  на контуре интегрирования.

Предположим, что есть оценка  $|\zeta'(s)|$ ,

$$\text{Тогда } \operatorname{Re} \int_{\sigma_0 + it}^{\sigma_0 + iT} -\frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} dw = \ln \frac{1}{|\zeta(w)|} \Big|_{w=\sigma_0 + it}^{\sigma_0 + iT} =$$

$$= \ln \frac{1}{|\zeta(\sigma_0 + iT)|} - \ln \frac{1}{|\zeta(\sigma_0 + it)|}$$

$$\ln \frac{1}{|\zeta(\sigma_0 + it)|} = \ln \frac{1}{|\zeta(\sigma_0 + iT)|} + \operatorname{Re} \int_{\sigma_0 + it}^{\sigma_0 + iT} \frac{\zeta'(w)}{\zeta(w)} dw$$



$$s_0 = 1 + \frac{c_1}{\ln T} + it, \quad |t| \leq T$$

$$|\zeta(s_0)|^{-1} \leq |\zeta(1 + \frac{c_1}{\ln T})| \ll \ln T. \quad \text{Д-бо:}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n^{1+\frac{c_1}{\ln T}}} = \frac{N}{N^{1+\frac{c_1}{\ln T}}} + \left(1 + \frac{c_1}{\ln T}\right) \int_1^N \frac{\mathcal{O}(u)}{u^{2+\frac{c_1}{\ln T}}} du \ll$$

АДернб:  $C(u)=1$

$$\ll N^{-\frac{c_1}{\ln T}} + \int_1^N \frac{du}{u^{1+\frac{c_1}{\ln T}}} \ll N^{-\frac{c_1}{\ln T}} + \left| \frac{u^{-\frac{c_1}{\ln T}}}{-\frac{c_1}{\ln T}} \right|_1^N \ll \ln T$$

Мз 9/3:

$$\max_{|s| \leq r} |f(s) - f(0)| \leq \frac{2r}{R-r} \max_{|s|=R} (\operatorname{Re} f(s) - \operatorname{Re} f(0)),$$

$$f(w) = -\frac{\zeta'}{\zeta} \left( 1 + \frac{c_1}{\ln T} + it + w \right), \quad r = \frac{2c_1}{\ln T}, \quad R = \frac{3c_1}{\ln T}.$$

$$\frac{2r}{R-r} = 4.$$

$$\left| -\frac{\zeta'}{\zeta} \left( \underbrace{1 + \frac{c_1}{\ln T}}_{\hat{= s_0}} + it \right) + \frac{\zeta'}{\zeta} \left( 1 + \frac{c_1}{\ln T} + it \right) \right| \leq 4 \max_{|w|=R} \left( \underbrace{\operatorname{Re} -\frac{\zeta'}{\zeta} \left( 1 + \frac{c_1}{\ln T} + it + w \right)}_{\hat{= \ln T}} + \underbrace{\operatorname{Re} -\frac{\zeta'}{\zeta} (s_0)}_{\hat{= \ln T}} \right),$$

$s_0 = 1 + \frac{c_1}{\ln T} + it.$

$$\left| -\frac{\zeta'}{\zeta} \left( 1 + \frac{c_1}{\ln T} + it \right) \right| \ll \ln T. \quad \text{Д-бо:}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Delta(n)}{n^{1+\frac{c_1}{\ln T}}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n \leq N} \frac{\Delta(n)}{n^{1+\frac{c_1}{\ln T}}} \right) \stackrel{\text{АДернб}}{C(n)=\Delta(n)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( N^{-1-\frac{c_1}{\ln T}} \cdot N + \left(1 + \frac{c_1}{\ln T}\right) \int_1^N \frac{\mathcal{O}(u) du}{u^{2+\frac{c_1}{\ln T}}} \right)$$

$$\mathcal{O}(u) \ll u \Rightarrow \text{написанная оценка} \ll \ln T.$$



$$-1 \leq \sigma \leq 2$$

$$-\frac{s'}{s}(\underbrace{\sigma+it}_s) = \frac{1}{s-1} - \sum_{|t-\sigma| \leq 1} \frac{1}{s-\rho} + O(\ln(|t|+2)).$$

$$\operatorname{Re} - \frac{s'}{s} \left(1 + \frac{c_1}{\ln T} + it + w\right) \leq \ln T + \underbrace{\phantom{\ln T}}_{< 0} \ll \ln T.$$

$|w| = \frac{3c_1}{\ln T}$

$$-\operatorname{Re} \frac{1}{s-\rho} = -\frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2 + (t-\sigma)^2} < 0 \quad \text{при } \sigma > \beta \quad \forall \rho = \beta + i\sigma$$

Уmax:

$$\ln \frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \ll \ln \ln T + 1 \ll \ln \ln T$$

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma+it)|} \ll (\ln T)^a, \quad |t| \leq T, \quad |\sigma-1| \leq \frac{c_1}{\ln T}.$$

$$R_1 \ll \int_{\ln x \geq \ln T}^{1+\frac{1}{\ln x}} \frac{x^\sigma}{T} (\ln T)^a d\sigma \ll \frac{(\ln T)^a}{T(\ln x)} x$$

$$R_2 \ll \int_0^T x^{1-\frac{c_1}{\ln T}} (\ln T)^a \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \ll x^{1-\frac{c_1}{\ln T}} (\ln T)^{a+1}.$$

Найдем, когда

$$\frac{x}{T} = x^{1-\frac{c_1}{\ln T}} \Rightarrow \frac{c_1}{\ln T} \ln x = \ln T \Rightarrow \ln T = \sqrt{\ln x} \text{ берем.}$$

$$R(x, T) + R_1 + R_2 \ll x^{1-\frac{c_1}{\sqrt{\ln x}}} (\ln x)^{a+1} \ll x e^{-c'\sqrt{\ln x}}.$$



Умб: a)  $t \geq 1$ ,  $|\sigma| \leq \sigma_0$

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} t^{\sigma+it-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}t + i\frac{\pi}{2}(\sigma-\frac{1}{2})-it} \left(1 + O_{\sigma_0}\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Д-во:

a) используем

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O_{\sigma_0}\left(\frac{1}{|s|}\right)$$

$$\Gamma(s) = s^{s-\frac{1}{2}} e^{-s} \sqrt{2\pi} \left(1 + O_{\sigma_0}\left(\frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-\sigma-it} (it)^{\sigma-\frac{1}{2}+it} \left(1 + \frac{\sigma}{it}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}+it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi} e^{-\sigma-it} t^{\sigma-\frac{1}{2}+it} e^{i\frac{\pi}{2}(\sigma-\frac{1}{2}+it)} \left(1 + \frac{\sigma}{it}\right)^{\sigma-\frac{1}{2}+it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi} t^{\sigma-\frac{1}{2}+it} e^{-\frac{\pi}{2}t + i\frac{\pi}{2}(\sigma-\frac{1}{2})-it} \underbrace{e^{-\sigma} e^{(\sigma-\frac{1}{2}+it)(\frac{\sigma}{it} + O(\frac{1}{t^2}))}}_{e^{O(\frac{1}{t})}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= \sqrt{2\pi} t^{\sigma-\frac{1}{2}+it} e^{-\frac{\pi}{2}t + i\frac{\pi}{2}(\sigma-\frac{1}{2})-it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

б)  $t \geq 1$ ,  $|\sigma| \leq \sigma_0$

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma(\frac{1-s}{2})}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{i\frac{\pi}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

Д-во:

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma-it} e^{-i\frac{\pi}{2}(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}) + i\frac{t}{2} - i\frac{\pi}{2}(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}) + i\frac{t}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) =$$

$$= \pi^{s-\frac{1}{2}} \left(\frac{t}{2}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma-it} e^{it + i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{i\frac{\pi}{4} + it(1 - \ln \frac{t}{2} + \ln \pi)}.$$

$$\cdot \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right) = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{i\frac{\pi}{4} - it \ln \frac{t}{2\pi e}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$



Теорема:  $t \geq 2$  . Тибора

$$\zeta(s) \ll \begin{cases} \ln t, & \sigma \geq 1 \\ t^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln t, & -\sigma_0 \leq \sigma \leq 0 \\ t^{1-\sigma} \ln t, & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \\ t^{\frac{1}{2}} \ln t, & 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

До-во:

$$t \geq 2, \quad \sigma > 0$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2} N^{-s} + s \int_N^{+\infty} \frac{\rho(u)}{u^{s+1}} du \quad (*)$$

$$1 - \frac{1}{\ln N} \leq \sigma \leq 2 \Rightarrow$$

$$|\zeta(s)| \ll \ln N + |s| \int_N^{+\infty} \frac{du}{u^2} \ll \ln N + \frac{|s|}{N} \ll \ln t.$$

$$\sigma \geq 2 \Rightarrow |\zeta(s)| = O(1). \Rightarrow (1) \text{ g-no.}$$

$$(2) \quad -\sigma_0 \leq \sigma \leq 0 \Rightarrow \zeta(\sigma+it) = \chi(\sigma+it) \zeta(1-\sigma-it)$$

$$|\zeta(\sigma+it)| \ll \ln t \cdot t^{\frac{1}{2}-\sigma}.$$

Ємн змем (3)  $\Rightarrow$  g-ем (4):

$$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |\zeta(s)| \ll t^{\frac{1}{2}-\sigma} \cdot \underbrace{\ln t \cdot t^{\sigma}}_{|\zeta(1-s)|} = t^{\frac{1}{2}} \ln t.$$

$$(3) : \quad \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 - \frac{1}{t} \ln t \quad \text{мг (x):}$$

$$|\zeta(s)| \ll \sum_{n=1}^t \frac{1}{n^{\sigma}} + \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} + t^{-\sigma} + t \int_t^{+\infty} \frac{du}{u^{\sigma+1}} \ll \frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \ll t^{1-\sigma} \ln t.$$



D/3:

27. D-то, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{\tau(n)}}{n^s} = \frac{\zeta^2(s)}{\zeta(2s)}, \text{ где } \tau(n) - \text{число различных простых делителей } n.$$

28. D-то асимпт.-ую ф-лу:

$$\sum_{n \leq x} 2^{\tau(n)} = \frac{x \ln x}{\zeta(2)} + cx + O(x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}), \text{ где } c - \text{постоянная.}$$

29. D-то асимптотическую ф-лу

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

рассматривая левую часть как число целых точек под гиперболой  $n_1 n_2 = x$ , при этом разбивая область под гиперболой на подобласти  $n_1 \leq \sqrt{x}$ ,  $n_2 \leq \sqrt{x}$ ,  $\max(n_1, n_2) \leq \sqrt{x}$ .

Проверить, какой остаток в данной ф-ле получается методом комплексного интегрирования.