Rational approximations to two irrational numbers.

Шульга Никита

Аннотация

Для вещественного числа ξ мы рассматриваем функцию меры иррациональности $\psi_\xi(t) = \min_{1\leqslant q\leqslant t, q\in\mathbb{Z}} ||q\xi||$, где $||\cdot||$ - расстояние до ближайшего целого. В 2009 году Кан и Мощевитин доказали, что если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то разность $\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)$ меняет свой знак бесконечно много раз при $t \to \infty$. В 2017 году Дубицкасу удалось показать, что если $\alpha \pm \beta \notin \mathbb{Z}$, то последовательнота

$$d(n) = \Big|\frac{1}{\psi_\alpha(n)} - \frac{1}{\psi_\beta(n)}\Big|$$

является неограниченной. Наконец, в 2019 году Мощевитин получил следующий результат:

$$|\psi_\alpha(t) - \psi_\beta(t)| \geqslant K \cdot \min(\psi_\alpha(t), \psi_\beta(t)) \quad \text{для бесконечно многих } t,$$

где $K = \sqrt{\tau} - 1 = 0.2720^+$, а $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} -$ золотое сечение. Было также показано, что константа K является оптимальной.

Используя классическую оценку $\psi_\xi(t) \leq \frac{1}{t}$, Мощевитин получил улучшение результата Дубицкаса о последовательности $d(n)$, а именно

$$\Big|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\Big| \geqslant Kt \quad \text{для бесконечно многих } t.$$

Данный результат оптимальным не является, поэтому в нашем докладе мы постараемся доказать оптимальную оценку

$$\Big|\frac{1}{\psi_\alpha(t)} - \frac{1}{\psi_\beta(t)}\Big| \geqslant Ct \quad \text{для бесконечно многих } t.$$

Где константа C связана с K соотношением $C = K(\sqrt{\tau}+\tau^{-3/2})$, или $C = \sqrt{5}(1-\sqrt{\phi}) = 0.47818^+$, где $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.