

On an inverse linear optimization problem

Alexander Golikov, Yuri Evtushenko



Dorodnicyn Computing Center
FRC CSC RAS

«Теория и численные методы решения обратных и
некорректных задач»

Новосибирск, Академгородок, 12-22 апреля 2021 года

Постановка обратной задачи

$$\min_{x \in X} \hat{c}^T x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, \quad x \geq 0_n\}$$

$$\max_{u \in U} b^T u, \quad U = \{u \in R^m : A^T u \leq \hat{c}\}$$

$$A \in R^{m \times n}, \quad b \in R^m, \quad \hat{c} \in R^n, \quad \hat{x} \in X$$

$$\min \frac{1}{2} \|c - \hat{c}\|^2 \quad \text{при условии} \quad c^T \hat{x} = \min_{x \in X} c^T x$$

1. Zhang J., Liu Z. Calculating some inverse linear programming problems // J.of Comp. and Appl. Mathematics. 1996. Vol. 72. P. 261-273.
2. Zhang J., Liu Z. A further study on inverse linear programming problems // J.of Comp. and Appl. Mathematics. 1999. Vol. 106. P. 345-359.
3. Ahuja R.K., Orlin J.B. Inverse Optimization // Operations Research. 2001. Vol. 49. P. 771-783.
4. Амирханова Г.А., Голиков А.И., Евтушенко Ю. Г. Об одной обратной задаче линейного программирования // Тр. ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 13–19.

1. С. М. Швартин, “Общая задача устойчивости для некоторых классов задач линейного программирования”, *Докл. АН СССР*, **285**:1 (1985), 56–59.
2. С. М. Швартин, “Об общей задаче исследования устойчивости для линейного программирования”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **30**:1 (1990), 164–167.
3. Обратные задачи математического программирования — Москва: ВЦ РАН. 1992. — 156 с.

$$\hat{x}_l > 0_l, \quad \hat{x}_d = 0_d, \quad n = l + d, \quad v = c - A^T u$$

$$\hat{x}^T = [\hat{x}_l^T, \hat{x}_d^T], \quad \hat{c}^T = [\hat{c}_l^T, \hat{c}_d^T], \quad c^T = [c_l^T, c_d^T],$$

$$v^T = [v_l^T, v_d^T], \quad A = [A_l \mid A_d]$$

$\hat{x}$ – решение задачи $c^T \hat{x} = \min_{x \in X} c^T x$, если выполнены

условия Куна-Таккера:

$$A_l \hat{x}_l = b, \quad \hat{x}_l > 0_l, \quad \hat{x}_d = 0_d, \quad \hat{x}_l^T v_l = 0, \quad \hat{x}_d^T v_d = 0,$$

$$v_l = c_l - A_l^T u = 0_l, \quad v_d = c_d - A_d^T u \geq 0_d$$

$$\min_{c_l \in R^l, c_d \in R^d, u \in R^m} \frac{1}{2} (\|c_l - \hat{c}_l\|^2 + \|c_d - \hat{c}_d\|^2)$$

$$c_l - A_l^T u = 0_l,$$

$$c_d - A_d^T u \geq 0_d$$

Обратная задача (P)

$$(P) \quad \min_{v_l \in R^l, v_d \in R^d, u \in R^m} \frac{1}{2} (\|v_l\|^2 + \|v_d\|^2)$$

$$A_l^T u - v_l = \hat{c}_l, \quad A_d^T u - v_d \leq \hat{c}_d, \quad v_d \geq 0_d$$

решение обратной задачи $c^* = \hat{c} + v^*$

Двойственная задача к (P)

$$(D) \quad \max_{y_l \in R^l, y_d \in R^d} \left\{ -\hat{c}_l^T y_l - \hat{c}_d^T y_d - \frac{1}{2} (\|y_l\|^2 + \|y_d\|^2) \right\}$$

$$A_l y_l + A_d y_d = 0_m, \quad y_d \geq 0_d$$

$$v_l^* = y_l^*, \quad v_d^* = (y_d^*)_+$$

Двойственная задача к (D)

$$\min_{u \in R^m} \frac{1}{2} (\|A_l^T u - \hat{c}_l\|^2 + \|(A_d^T u - \hat{c}_d)_+\|^2)$$

$$y_l^* = A_l^T u^* - \hat{c}_l, \quad y_d^* = (A_d^T u^* - \hat{c}_d)_+$$

$$c_l^* = \hat{c}_l + v_l^* = \hat{c}_l + y_l^* = \hat{c}_l + A_l^T u^* - \hat{c}_l = A_l^T u^*$$

$$c_d^* = \hat{c}_d + v_d^* = \hat{c}_d + (y_d^*)_+ = \hat{c}_d + (A_d^T u^* - \hat{c}_d)_+$$

Решение обр. зад. с $n + m$ неизв. и n ограничен.

$$\min_{c_l \in R^l, c_d \in R^d, u \in R^m} \frac{1}{2} (\|c_l - \hat{c}_l\|^2 + \|c_d - \hat{c}_d\|^2)$$

$$c_l - A_l^T u = 0_l, \quad c_d - A_d^T u \geq 0_d$$

находится из решения задачи безусловной минимизации с m неизвестными

$$\min_{u \in R^m} \frac{1}{2} (\|A_l^T u - \hat{c}_l\|^2 + \|(A_d^T u - \hat{c}_d)_+\|^2)$$

по формуле

$$c_l^* = A_l^T u^*$$

$$c_d^* = \hat{c}_d + (A_d^T u^* - \hat{c}_d)_+$$

$$\min_{u \in \mathbb{R}^m} F(u) = \min_{u \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{2} (\|A_l^T u - \hat{c}_l\|^2 + \|(A_d^T u - \hat{c}_d)_+\|^2)$$

$$F_u(u) = A_l(A_l^T u - \hat{c}_l) + A_d(A_d^T u - \hat{c}_d)_+$$

$$F_{uu}(u) = A_l A_l^T + A_d \text{Diag}(\text{sign}((A_d^T u - \hat{c}_d)_+)) A_d^T + \delta I_m$$

$$\min_{x \in X} \hat{c}^T x, \quad X = \{x \in R^n : Ax = b, \quad x \geq 0_n\}$$

$$\min_{x \in X} \hat{x}^T v, \quad X = \{v \in R^n : Kv = K\hat{c}^T, \quad v \geq 0_n\}$$

$$A \in R^{m \times n}, \quad b \in R^m, \quad \hat{c} \in R^n, \quad \hat{x} \in X \quad K \in R^{\mu \times n},$$

$$\mu = n - m, \quad AK^T = 0_{m\mu},$$

$$A = [I_m \mid N], \quad K = [-N^T \mid I_\mu]$$

Условия оптимальности

$$A_l \hat{x}_l = b, \quad \hat{x}_l > 0_l, \quad \hat{x}_d = 0_d, \quad v_l = 0_l, \quad v_d \geq 0_d,$$

$$K_l c_l = 0_\mu, \quad K_d v_d = K_d c_d$$

$$\min_{c_l \in R^i, c_d \in R^d, v_d \in R^d} \frac{1}{2} (\|c_l - \hat{c}_l\|^2 + \|c_d - \hat{c}_d\|^2)$$

$$K_l c_l = 0_\mu, \quad K_d v_d = K_d c_d, \quad v_d \geq 0_d$$

$$\min_{c_l \in R^i} \frac{1}{2} \|c_l - \hat{c}_l\|^2$$

$$K_l c_l = 0_\mu,$$

$$\min_{c_d \in R^d, v_d \in R^d} \frac{1}{2} \|c_d - \hat{c}_d\|^2$$

$$K_d v_d - K_d c_d = 0_\mu, \quad v_d \geq 0_d$$

$$\min_{c_d \in R^d, v_d \in R^d} \frac{1}{2} \|c_d - \hat{c}_d\|^2 + \frac{1}{2} \|v_d - \hat{v}_d\|^2$$

$$K_d v_d - K_d c_d = 0_\mu, \quad v_d \geq 0_d$$

$$\max_{p \in R^\mu} \left\{ -\hat{c}_d^T K_d^T p - \frac{1}{2} \|K_d^T p\|^2 - \frac{1}{2} \|(\hat{v}_d - K_d^T p)_+\|^2 \right\}$$

$$c_d^* = \hat{c}_d + K_d^T p^*, \quad v_d^* = (\hat{v}_d - K_d^T p^*)_+$$