Аддитивные действия на непроективных полных гладких многообразиях

Содержание

Обозначения

Пусть $N \simeq \mathbb{Z}^n$ – решётка ранга n и $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z})$ – двойственная решётка. Обозначим $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq \mathbb{Q}^n$, $M_{\mathbb{Q}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ и $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{\mathbb{Q}} \times N_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$ – каноническое спаривание. Назовём *многогранным конусом в* N подмножество

$$\mathrm{Cone}(v_1, \ldots, v_r) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}\}$$

для некоторых $v_1, \ldots, v_r \in N$. Конус называется *строго выпуклым*, если он не содержит подпространств положительной размерности. Конечный набор Σ конусов в N называется *веером*, если любая грань любого конуса из Σ содержится в Σ и пересечение любых двух конусов из Σ является гранью каждого из них.

Обозначения

Каждому вееру Σ в N можно сопоставить торическое многообразие X_Σ, то есть нормальное алгебраическое многообразие, на котором тор $T = (\mathbb{C}^\times)^n$ эффективно действует с открытой плотной орбитой.

Конструкция торического многообразия

Если σ – конус в N, то конус

$$\sigma^{\vee} = \{u \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle\, u, v \,\rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma\}$$

в M называется *двойственным к* σ. Определим аффинное многообразие U_{σ} как спектр конечно порождённой алгебры

$$\mathbb{C}[\sigma^{\vee} \cap M] = \bigoplus_{m \in \sigma^{\vee} \cap M} \mathbb{C}\, \chi^{m},$$

умножение в которой определяется формулой $\chi^{m} \cdot \chi^{m'} = \chi^{m+m'}$.

Конструкция торического многообразия

Многообразие X_Σ является объединением аффинных карт U_σ, где σ пробегает Σ, в котором две карты U_τ и $U_{\tau'}$ склеиваются по их главному открытому подмножеству $U_{\tau\cap\tau'}$. Действие тора $T = (\mathbb{C}^\times)^n$ при этом задаётся следующим образом: отождествляя точку $t \in T$ с гомоморфизмом групп $M \to \mathbb{C}^\times$ и точку $x \in U_\sigma$ с гомоморфизмом полугрупп $\sigma^\vee \cap M \to \mathbb{C}$, точка $t \cdot x$ отвечает гомоморфизму $\sigma^\vee \cap M \to \mathbb{C}$, заданному формулой $u \mapsto t(u)x(u)$.

Предложение 1

Торическое многообразие X_Σ является гладким тогда и только тогда, когда каждый конус $\sigma \in \Sigma$ порождён подмножеством некоторого базиса решётки N.

Орбиты торического многообразия

Конусу $\sigma \in \Sigma$ размерности k соответствует орбита $O(\sigma) = \mathrm{Hom}(\sigma^\perp \cap M, \mathbb{C}^\times) \simeq (\mathbb{C}^\times)^{n-k}$, вложенная в карту $U_\sigma = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$. Обозначим замыкание орбиты $O(\sigma)$ через $V(\sigma)$.

Орбиты торического многообразия

Предложение 2

1. *Для конуса* $\sigma \in \Sigma$ *аффинная карта* U_σ *является объединением орбит* $O(\tau)$, *где* $\tau \preceq \sigma$:

$$U_\sigma = \bigsqcup_{\tau \preceq \sigma} O(\tau).$$

2. $\tau \preceq \sigma$ *тогда и только тогда, когда* $O(\sigma) \subseteq V(\tau)$, *причём*

$$V(\tau) = \bigsqcup_{\tau \preceq \sigma} O(\sigma).$$

3. *Пусть* N_τ *– подгруппа группы* N, *порождённая множеством* $\tau \cap N$, *и пусть* $\psi : N \to N/N_\tau$ *– каноническая проекция. Тогда соответствующим торическому многообразию* $V(\tau)$ *веером является веер* $\{\psi(\sigma) \mid \tau \preceq \sigma\}$ *в решётке* N/N_τ.

Торические морфизмы

Рассмотрим веер Σ' в решётке N'. Пусть $f : N' \to N$ – гомоморфизм решёток, $f_{\mathbb{Q}}$ – его продолжение до линейного отображения $N'_{\mathbb{Q}} \to N_{\mathbb{Q}}$ и $f^* : M \to M' = \mathrm{Hom}(N', \mathbb{Z})$ – двойственный к f гомоморфизм. Гомоморфизм f называется *согласованным с веерами* Σ' и Σ, если для любого конуса $\sigma' \in \Sigma'$ найдётся такой конус $\sigma \in \Sigma$, что $f_{\mathbb{Q}}(\sigma') \subseteq \sigma$. В этом случае для любого конуса $\sigma' \in \Sigma'$ найдётся конус $\sigma \in \Sigma$, для которого ограничение отображения f^* на $\sigma^\vee \cap M$ определяет гомоморфизм полугрупп $\sigma^\vee \cap M \to (\sigma')^\vee \cap M'$, а значит определяет гомоморфизм алгебр $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M] \to \mathbb{C}[(\sigma')^\vee \cap M']$ и двойственный к нему морфизм многообразий $\phi_f^{\sigma'} : U_{\sigma'} \to U_\sigma$. Склеенный таким образом морфизм $\phi_f : X_{\Sigma'} \to X_\Sigma$ называется *торическим*.

Торические морфизмы

Предложение 3

Пусть задан торический морфизм $\phi = \phi_f : X_{\Sigma'} \to X_{\Sigma}$. *Для конуса* $\sigma' \in \Sigma'$ *пусть* σ *– минимальный конус из веера* Σ, *содержащий* $f_{\mathbb{Q}}(\sigma')$. *Тогда* $\phi(O(\sigma')) \subseteq O(\sigma)$, $\phi(V(\sigma')) \subseteq V(\sigma)$ *и индуцированный морфизм* $\phi\,|_{V(\sigma')}\colon V(\sigma') \to V(\sigma)$ *является торическим.*

Торические морфизмы

Пример 1

Зафиксируем базис $e_1, \ldots, e_n$ решётки N и рассмотрим веер Σ, состоящий из конуса $\sigma = \mathrm{Cone}(\{e_i\}_{i=1}^n)$ и всех его граней. Пусть $e_1^*, \ldots, e_n^*$ – двойственный базис решётки M. Так как $\sigma^\vee = \mathrm{Cone}(\{e_i^*\}_{i=1}^n)$, то $X_\Sigma = U_\sigma = \mathbb{C}^n$. Рассмотрим некоторое подмножество $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и конус $\sigma_I = \mathrm{Cone}(\{e_i\}_{i \in I}) \in \Sigma$. Нетрудно видеть, что

$$O(\sigma_I) = \mathrm{Hom}(\mathrm{span}(\{e_i^*\}_{i \notin I}) \cap M, \mathbb{C}^\times) =$$

$$= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i = 0 \ \forall i \in I; x_i \neq 0 \ \forall i \notin I\}.$$

Вееры и многогранники

Веер Σ называется *полным*, если $\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \sigma = N_{\mathbb{Q}}$. Торическое многообразие X_Σ полно тогда и только тогда, когда веер Σ полон. Пусть P – выпуклый многогранник в $M_{\mathbb{Q}}$, содержащий точку 0 в своей внутренности. Предположим, что каждая вершина многогранника P лежит в M. Для каждой грани Q многогранника P определим конус

$$\sigma_Q = \{v \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle u, v \rangle \leq \langle u', v \rangle \forall u \in Q \ \forall u' \in P\}.$$

Набор конусов σ_Q, где Q пробегает все грани многогранника P, образует веер Σ_P. Веер Σ_P называется *двойственным к многограннику* P. Легко видеть, что веер Σ_P является полным. Хорошо известно, что полное торическое многообразие X_Σ проективно тогда и только тогда, когда веер Σ является двойственным к некоторому выпуклому многограннику.

Факторы

Морфизм алгебраических многообразий $\pi : Y \to X$ называется *аффинным*, если для любого аффинного открытого подмножества $U \subseteq X$ его прообраз $\pi^{-1}(U)$ аффинен. Пусть аффинная алгебраическая группа G действует на многообразии Y, и $\pi : Y \to X$ – морфизм, постоянный на G-орбитах. Морфизм π называется *хорошим фактором*, если π аффинен и для любого открытого $U \subseteq X$ двойственный гомоморфизм алгебр функций $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))$ индуцирует изоморфизм $\mathcal{O}_X(U) \simeq \mathcal{O}_Y(\pi^{-1}(U))^G$. В этом случае X обозначается $Y/\!/G$.

Факторы

Известно, что отображение π переводит замкнутые G-инвариантные дизъюнктные подмножества многообразия Y в замкнутые дизъюнктные подмножества многообразия $Y /\!/ G$. Тем самым, для произвольной точки $p \in Y /\!/ G$ её прообраз $\pi^{-1}(p)$ содержит единственную замкнутую G-орбиту, а значит замкнутые G-орбиты в Y взаимно однозначно соответствуют точкам многообразия $Y /\!/ G$.

Факторы

Предложение 3

Для хорошего фактора $\pi : Y \to Y /\!/ G$ *следующие условия эквивалентны:*

1. *все* G*-орбиты замкнуты в* Y*;*
2. *если* $x, y \in Y$*, то* $\pi(x) = \pi(y)$ *тогда и только тогда, когда* x *и* y *лежат в одной и той же* G*-орбите;*
3. *морфизм* π *индуцирует биекцию* $\{G\text{-орбиты в } Y\} \leftrightarrow Y /\!/ G$.

Хороший фактор $\pi : Y \to Y /\!/ G$ называется *геометрическим фактором*, если он удовлетворяет условиям предложения 3. В этом случае обозначаем $Y /\!/ G = Y/G$.

Кольцо Кокса и факторы

Для каждого луча $\rho \in \Sigma(1)$ через p_ρ будем обозначать минимальный вектор полугруппы $\rho \cap N$. Пусть $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}\{p_\rho\}_{\rho\in\Sigma(1)} = N_{\mathbb{Q}}$ и $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ – базис двойственной решётки M. Рассмотрим группу

$$G_\Sigma = \{(t_\rho) \in (\mathbb{C}^\times)^{\Sigma(1)} \mid \prod_{\rho\in\Sigma(1)} t_\rho^{\langle f_i, p_\rho \rangle} = 1, 1 \le i \le n\} \subseteq (\mathbb{C}^\times)^{\Sigma(1)}, \quad (*)$$

действующую на $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ покоординатным умножением. Назовём подмножество $C \subseteq \Sigma(1)$ *примитивным набором*, если для любого конуса $\sigma \in \Sigma$ подмножество C не содержится в $\sigma(1)$, и для каждого собственного подмножества $C' \subsetneq C$ найдётся такой конус $\sigma \in \Sigma$, что $C' \subseteq \sigma(1)$. Множество всех примитивных наборов обозначим $\mathscr{C}(\Sigma)$.

Положим $Z = Z(\Sigma) = \bigcup\limits_{C \in \mathscr{C}(\Sigma)} \mathbb{V}(x_\rho \mid \rho \in C) \subseteq \mathbb{C}^{\Sigma(1)}$, где $\mathbb{V}(x_\rho \mid \rho \in C)$ – это множество таких точек $(x_\rho) \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)}$, что $x_\rho = 0$ для всех $\rho \in C$. Заметим, что множество Z инвариантно относительно действия группы G_Σ, а значит определено действие G_Σ на множестве $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$. Пусть $\{e_\rho \mid \rho \in \Sigma(1)\}$ – стандартный базис решётки $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$. Для каждого $\sigma \in \Sigma$ положим $\tilde{\sigma} = \mathrm{Cone}(e_\rho \mid \rho \in \sigma(1))$. Конусы $\tilde{\sigma}$ вместе со своими гранями образуют веер $\tilde{\Sigma} = \{\tau \mid \exists \sigma \in \Sigma : \tau \preceq \tilde{\sigma}\}$.

Кольцо Кокса и факторы

Предложение 4

1. *Многообразие* $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$ *является торическим многообразием, соответствующим вееру* $\tilde{\Sigma}$.
2. *Отображение* $e_\rho \mapsto p_\rho$ *определяет отображение решёток* $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \to N$, *согласованное с веерами* $\tilde{\Sigma}$ *в* $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ *и* Σ *в* N.
3. *Соответствующий торический морфизм* $\pi : \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \to X_\Sigma$ *является хорошим фактором по действию группы* G_Σ, *то есть* $(\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z)//G_\Sigma \simeq X_\Sigma$. *Более того,* π *является геометрическим фактором тогда и только тогда, когда веер* Σ *симплициален.*

Кольцо Кокса и факторы

Заметим, что веер $\tilde{\Sigma}$ является подмножеством веера Σ_0, образованного конусом $\mathrm{Cone}(e_\rho \mid \rho \in \Sigma(1))$ и всеми его гранями. Вееру Σ_0 соответствует торическое многообразие $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$. Тождественное отображение $\mathbb{Z}^{\Sigma(1)} \to \mathbb{Z}^{\Sigma(1)}$ согласовано с веерами $\tilde{\Sigma}$ и Σ_0 соответственно, а отвечающий ему торический морфизм – это вложение $\mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z \hookrightarrow \mathbb{C}^{\Sigma(1)}$. В силу предложения 3, для любого конуса $\sigma \in \tilde{\Sigma}$ имеем $O(\sigma)_{\tilde{\Sigma}} = O(\sigma)_{\Sigma_0} \setminus Z$.

Нормализуемые действия

Пусть теперь на торическом многообразии X с действующим тором T задано аддитивное действие $\mathbb{G}_a^n \times X \to X$. Будем говорить, что это действие *нормализуется тором*, если подгруппа $\mathbb{G}_a^n \subseteq \mathrm{Aut}(X)$ нормализуется подгруппой $T \subseteq \mathrm{Aut}(X)$. В этом случае тор T переставляет $\mathbb{G}_a^n$-орбиты: для любого $t \in T$ и любого $x \in X$ имеем $t\,\mathbb{G}_a^n\,x = t\,\mathbb{G}_a^n\,t^{-1}tx = \mathbb{G}_a^n\,tx$. Отсюда следует, что открытая плотная $\mathbb{G}_a^n$-орбита $\mathscr{O}$ является T-инвариантной. Замкнутое подмногообразие $X \setminus \mathscr{O}$ при этом разлагается на неприводимые компоненты коразмерности 1, каждая из которых является торическим многообразием.

Содержание

Конструкция веера Σ

Пусть в решётке N ранга n зафиксирован базис $e_1, \dots, e_n$. Рассмотрим векторы

$$a_1 = e_1, \dots, \; a_n = e_n, \; a_0 = -e_1 - \dots - e_n,$$

$$b_1 = a_0 + a_1, \; b_2 = a_0 + a_2, \dots, \; b_n = a_0 + a_n.$$

Рассмотрим симплекс $P = \mathrm{Conv}(a_0, a_1, \dots, a_n)$. Его гранями коразмерности 1 являются множества $A_i = \mathrm{Conv}(a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n), \; i = 0, \dots, n$. Положим $b_i' = \frac{1}{2} b_i$. Заметим, что точка b_i' лежит на отрезке $[a_0, a_i]$, который, в свою очередь, лежит во всех гранях $A_j, \; j = 1, \dots, \widehat{i}, \dots, n$, и не лежит в гранях A_0 и A_i. Разобьём каждую грань $A_i, \; i = 1, \dots, n$ на n симплексов $A_{i,j}'$ размерности $n-1$, определённых следующим образом (иллюстрация для случая $n = 3$ изображена на рисунке):

Конструкция веера Σ

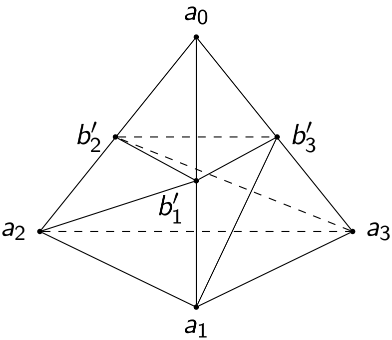

Рис.

Конструкция веера Σ

$$A'_{1,1} = \mathrm{Conv}(a_2, \dots, a_n, b'_2),\ A'_{1,2} = \mathrm{Conv}(a_3, \dots, a_n, b'_2, b'_3), \dots,$$

$$A'_{1,n-1} = \mathrm{Conv}(a_n, b'_2, \dots, b'_n),\ A'_{1,n} = \mathrm{Conv}(b'_2, \dots, b'_n, a_0);$$

$$\dots\dots$$

$$A'_{n,1} = \mathrm{Conv}(a_1, \dots, a_{n-1}, b'_1),\ A'_{n,2} = \mathrm{Conv}(a_2, \dots, a_{n-1}, b'_1, b'_2), \dots,$$

$$A'_{n,n-1} = \mathrm{Conv}(a_{n-1}, b'_1, \dots, b'_{n-1}),\ A'_{n,n} = \mathrm{Conv}(b'_1, \dots, b'_{n-1}, a_0).$$

Рассмотрим веер Σ в решётке N, опирающийся на данное разбиение симплекса P.

Свойства веера Σ

Теорема 1

1. *Многообразие* $X = X_\Sigma$ *является гладким, полным и непроективным.*
2. *Многообразие* X *допускает аддитивное действие, нормализуемое тором.*

Очевидно, что веер Σ полон. Нетрудно убедиться, что каждый набор из n векторов, порождающий конус максимальной размерности из Σ, образует базис решётки N, а значит многообразие X – гладкое.
Следующая лемма завершает доказательство первого утверждения теоремы.

Свойства веера Σ

Лемма 1

Веер Σ не является двойственным ни к какому многограннику.

Предположим, что веер Σ двойственен к некоторому многограннику Q. Поскольку $\dim(\sigma_R) + \dim(R) = n$ для любой грани R многогранника Q и разбиение симплекса P содержит $n^2 + 1$ симплекс размерности $n - 1$, многогранник Q имеет $n^2 + 1$ вершин $u_1, \ldots, u_{n^2+1}$. Эти вершины соответствуют конусам максимальной размерности

$$\sigma_i = \sigma_{u_i} = \{v \in N_{\mathbb{Q}} \mid \langle u_i, v \rangle \leq \langle u', v \rangle \ \forall u' \in Q\}, \quad i = 1, \ldots, n^2 + 1.$$

Рассмотрим функцию $\phi(x) = \min_k u_k(x)$ на пространстве $N_{\mathbb{Q}}$. Тогда $\phi|_{\sigma_i} = u_i$ в силу определения σ_i. Так как векторы a_1, b_n, a_n лежат в одном конусе $\omega_j = \sigma_{n-1,1}$, имеем

$$\phi(a_1) + \phi(b_n) - \phi(a_n) = u_j(a_1) + u_j(b_n) - u_j(a_n) = u_j(a_1 + b_n - a_n).$$

Свойства веера Σ

Поскольку $a_1 + b_n - a_n = b_1$, получаем $u_j(a_1 + b_n - a_n) = u_j(b_1)$. Вектор b_1 не лежит в конусе ω_j, но лежит в некотором конусе ω_l веера Σ, и значит $\phi(b_1) = u_l(b_1) < u_j(b_1)$. Итак, $\phi(a_1) + \phi(b_n) - \phi(a_n) > \phi(b_1)$. Аналогично, так как $a_i + b_{i-1} - a_{i-1} = b_i$, получаем $\phi(a_i) + \phi(b_{i-1}) - \phi(a_{i-1}) > \phi(b_i)$ для любого $i = 2, \dots, n$. Складывая эти неравенства, получаем $\phi(b_1) + \cdots + \phi(b_n) > \phi(b_1) + \cdots + \phi(b_n)$ – противоречие. Лемма доказана.

Аддитивное действие на Σ

Обозначим $b_0 = a_0$. Множество $\Sigma(1)$ состоит из $2n+1$ луча $\rho_i = \mathrm{Cone}(b_i),\ 0 \le i \le n$ и $\rho'_j = \mathrm{Cone}(a_j),\ 1 \le j \le n$. Упорядочим координаты $(x_0, x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n)$ на $\mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ в соответствии с порядком лучей $(\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n, \rho'_1, \ldots, \rho'_n)$. Обозначим $Y = \mathbb{C}^{\Sigma(1)} \setminus Z$, где $Z = Z(\Sigma)$. Запишем условия $(*)$ в терминах диагональных характеров $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n, \omega'_1, \ldots, \omega'_n$ квазитора $G = G_\Sigma$:

Аддитивное действие на Σ

$$\begin{cases} -\omega_0 - \omega_2 - \dots - \omega_n + \omega_1' = 0 \\ -\omega_0 - \omega_1 - \omega_3 - \dots - \omega_n + \omega_2' = 0 \\ \dots \\ -\omega_0 - \omega_1 - \dots - \omega_{n-1} + \omega_n' = 0 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} \omega_1' = \omega_0 + \omega_2 + \dots + \omega_n \\ \omega_2' = \omega_0 + \omega_1 + \omega_3 + \dots + \omega_n \\ \dots \\ \omega_n' = \omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_{n-1} \end{cases}$$

Отсюда следует, что G состоит из диагональных матриц вида

$$\{\mathrm{diag}(t_0,\ t_1,\ldots,\ t_n,\ t_0t_2\ldots t_n,\ldots,\ t_0t_1\ldots t_{n-1})\mid t_0,t_1,\ldots,t_n\in\mathbb{C}^\times\}.$$

Обозначим через T' тор $(\mathbb{C}^\times)^{\Sigma(1)}$, действующий на торическом многообразии Y, а через T тор $(\mathbb{C}^\times)^n$, действующий на X. Рассмотрим действие группы $\mathbb{G}_a^n=\{(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{C}^n\}$ на Y, задаваемое формулами

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto x_i, && 0\le i\le n,\\ x'_j &\mapsto x'_j+c_jx_0x_1\ldots\widehat{x_j}\ldots x_n, && 1\le j\le n. \end{aligned}\tag{$**$}$$

Аддитивное действие на Σ

Нетрудно видеть, что это действие коммутирует с действием группы G. Это показывает, что оно спускается до действия на многообразии X. При этом $\mathbb{G}_a^n$-орбиты на X соответствуют $G \times \mathbb{G}_a^n$-орбитам на Y. Кроме того, как видно из формул $(**)$, действие $\mathbb{G}_a^n$ на Y нормализуется тором T', а значит T переставляет $\mathbb{G}_a^n$-орбиты на X. Рассмотрим точку $x \in \mathbb{C}^{\Sigma(1)}$ с координатами $x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 1$, $x_1' = \cdots = x_n' = 0$. Набор $C = \{\rho_1', \ldots, \rho_n'\}$ не является примитивным, а значит $x \in Y$. Пусть $\mathscr{O}'$ – орбита точки x относительно действия группы $G \times \mathbb{G}_a^n$. Тогда $\mathscr{O}' = (\mathbb{C}^\times)^{n+1} \times \mathbb{C}^n$ и $\dim(\mathscr{O}') = 2n + 1$, а значит $\mathbb{G}_a^n$-орбита $\pi(\mathscr{O}') = \mathscr{O}'/G$ на X имеет размерность n. Отсюда следует, что $\mathscr{O} = \pi(\mathscr{O}')$ – открытая плотная орбита в X. Это завершает доказательство утверждения (2). Теорема доказана.

Содержание

Формулировка

Предложение 4

Во введённых выше обозначениях

- *замкнутое подмногообразие* $X_\Sigma \setminus \mathscr{O}$ *состоит из четырёх неприводимых компонент* X_0, X_1, X_2, X_3*;*
- *компонента* X_0 *изоморфна проективной плоскости* $\mathbb{P}^2$ *с тривиальным* $\mathbb{G}_a^3$*- действием;*

Предложение 4

Во введённых выше обозначениях

- *каждая из компонент* $X_j,\ j = 1, 2, 3$ *изоморфна раздутию поверхности Хирцебруха* $\mathbb{F}_1$ *в точке; типичные* $\mathbb{G}_a^3$*-орбиты в* X_j *образуют однопараметрическое семейство одномерных орбит, дополнение к которому является объединением кривых неподвижных точек* $S_{jk},\ k \in \{0, 1, 2, 3\} \setminus \{j\} = \{0, k', k''\}$*, причём* $S_{jk} \simeq \mathbb{P}^1$ *для любого* k*, и*

$$|S_{j0} \cap S_{jk'}| = |S_{j0} \cap S_{jk''}| = 1,\ S_{j0} \cap S_{jk'} \neq S_{j0} \cap S_{jk''},$$

$$S_{jk'} \cap S_{jk''} = \emptyset;$$

Формулировка

Предложение 4

Во введённых выше обозначениях

- *при* $j, l \in \{1, 2, 3\},\ j \neq l$ *пересечение компонент* X_j *и* X_l *равно* $S_{jl} = S_{lj}$, *пересечение трёх компонент* $X_1,\ X_2$ *и* X_3 *пусто; при этом компонента* X_0 *пересекает компоненту* X_j *по кривой* S_{j0}, *а пару компонент* X_j *и* X_l *– по единственной точке, разной для разных пар.*

Пункт 1

Сохраним обозначения из доказательства теоремы 1. Дополнение $Y \setminus \mathscr{O}'$ покрывается шестимерными неприводимыми подмногообразиями

$$Y_i = \{x_i = 0\} \setminus Z,\ 0 \leq i \leq 3;$$

а значит, обозначив $X_i = \pi(Y_i)$, получаем $X \setminus \mathscr{O} = \bigcup_{i=0}^{3} X_i$ – разложение на неприводимые двумерные подмногообразия. Тем самым, получаем утверждение (1).

Пункт 2

Чтобы вычислить веер многообразия X_i, нужно факторизовать группу N по подгруппе $\mathbb{Z}\, b_i$, а затем рассмотреть проекции всех конусов, содержащих вектор b_i. Заметим, что $N = \mathbb{Z}\, b_0 \oplus \mathbb{Z}\, a_1 \oplus \mathbb{Z}\, a_2$, значит $N / \mathbb{Z}\, b_0 = \mathbb{Z}\, a_1 \oplus \mathbb{Z}\, a_2$. При этом каноническая проекция имеет вид

$$a_1 \mapsto (1, 0),\;\; a_2 \mapsto (0, 1),\;\; a_3 \mapsto (-1, -1),$$

$$b_0 \mapsto (0, 0),\;\; b_1 \mapsto (1, 0),\;\; b_2 \mapsto (0, 1),\;\; b_3 \mapsto (-1, -1).$$

Пункт 2

Получаем веер в $\mathbb{Z}^2$, образованный векторами $(1,0),\ (0,1),\ (-1,-1)$. Таким образом, $X_0 \simeq \mathbb{P}^2$. Поскольку веер Σ переходит в себя при любой перестановке координат в N, имеем $X_1 \simeq X_2 \simeq X_3$. Далее заметим, что $N = \mathbb{Z}\, b_3 \oplus \mathbb{Z}\, a_2 \oplus \mathbb{Z}\, a_3$. Отсюда получаем, что $N/\,\mathbb{Z}\, b_3 = \mathbb{Z}\, a_2 \oplus \mathbb{Z}\, a_3$, и факторизация имеет вид

$$a_1 \mapsto (-1,0),\ a_2 \mapsto (1,0),\ a_3 \mapsto (0,1),$$

$$b_0 \mapsto (0,-1),\ b_1 \mapsto (-1,-1),\ b_2 \mapsto (1,-1),\ b_3 \mapsto (0,0).$$

Полученный двумерный веер образован векторами $(0,1),(-1,0),(-1,-1),(0,-1),(1,-1)$. Отразим решётку $\mathbb{Z}^2$ относительно вертикальной оси, а затем относительно горизонтальной. Получим веер многообразия, которое является раздутием поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_1$ в неподвижной точке, отвечающей конусу первой четверти плоскости.

Пункт 2

Нетрудно убедиться, что $\mathscr{C}(\Sigma)$ равно

$$\{\{\rho_1', \rho_0\}, \{\rho_2', \rho_0\}, \{\rho_3', \rho_0\},$$

$$\{\rho_1', \rho_2\}, \{\rho_2', \rho_3\}, \{\rho_3', \rho_1\}, \{\rho_1, \rho_2, \rho_3\}\}. \qquad (***)$$

Из формул $(**)$ следует, что при $x_0 = 0$ группа $\mathbb{G}_a^3$ действует тривиально, значит X_0 состоит из неподвижных точек. Это завершает доказательство утверждения (2).

Пункты 3-4

Если $x \in Y_1$, то $x_3' \neq 0$ в силу равенства $(***)$. Рассмотрим открытое G-инвариантное подномжество U_1' многообразия Y_1, задаваемое условиями $x_0 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3 \neq 0$, то есть $U_1' = Y_1 \cap \{x_0x_2x_3 \neq 0\}$. На множестве U_1' группа $\mathbb{G}_a^3$ действует с двумерным ядром неэффективности, изменяя только координату x_1'. Разложение дополнения U_1' до Y_1 на неприводимые компоненты имеет вид $Y_1 \setminus U_1' = S_{10}' \cup S_{12}' \cup S_{13}'$, где $S_{1k}' = Y_1 \cap \{x_k = 0\}$. Заметим, что

$$S_{10}' \cap S_{12}' = G \cdot (0,0,0,1,1,1,1),\ S_{10}' \cap S_{13}' = G \cdot (0,0,1,0,1,1,1),$$

$$S_{12}' \cap S_{13}' = \emptyset.$$

Обозначим $S_{1k} = \pi(S_{1k}')$. Многообразие S_{1k}' является гладким, а значит нормальным. Поскольку при факторизации свойство нормальности сохраняется, а для кривых нормальность эквивалентна гладкости, имеем $\mathbb{P}^1 \simeq S_{10} \simeq S_{12} \simeq S_{13}$.

Пункты 3-4

Рассуждая аналогично, получаем $Y_2 = U_2' \sqcup (S_{20}' \cup S_{21}' \cup S_{23}')$ и $Y_3 = U_3' \sqcup (S_{30}' \cup S_{31}' \cup S_{32}')$, где $U_j' = Y_j \cap \left\{ \prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{3} x_k \neq 0 \right\}$, $S_{jk}' = Y_j \cap \{x_k = 0\}$. Таким образом,

$$Y_1 \cap Y_2 = S_{12}', \; Y_1 \cap Y_3 = S_{13}', \; Y_2 \cap Y_3 = S_{23}', \; Y_1 \cap Y_2 \cap Y_3 = \emptyset;$$

$$Y_0 \cap Y_j = S_{j0}', \; |\pi(Y_0 \cap Y_j \cap Y_l)| = 1.$$

Обозначив $S_{jk} = \pi(S_{jk}')$, получаем утверждения (3)-(4).