

Лекция 8.

Теорема: пусть $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2$, $s = \sigma + it$,
тогда $|\zeta(s)| \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t$.

Доно g -но:

$$0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2} \quad |\zeta(s)| \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t$$

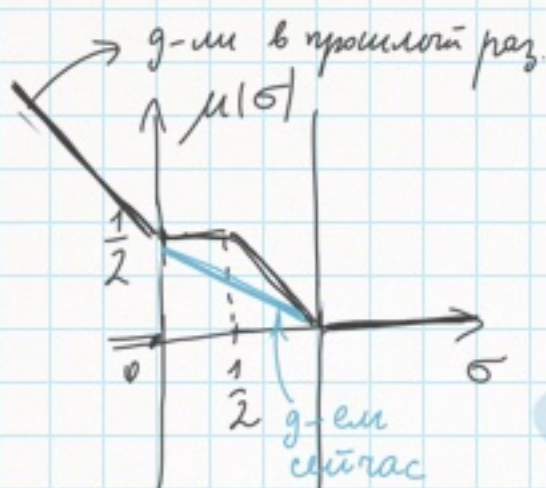
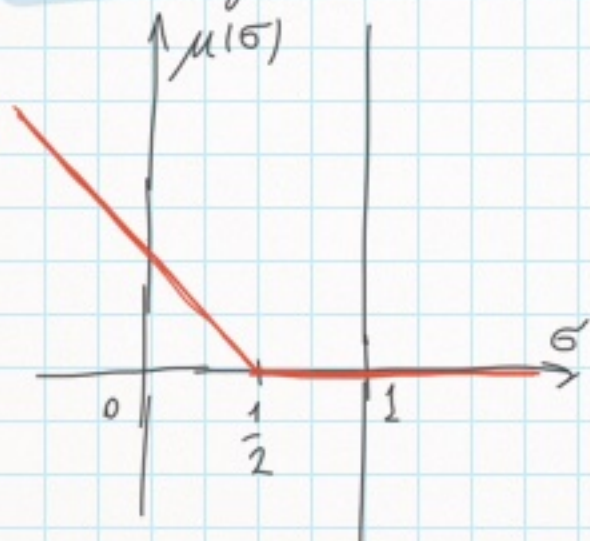
$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1 \quad |\zeta(s)| \ll t^{1-\sigma} \ln t$$

Отп: $|\zeta(s)| \ll t^{\mu(\sigma)+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\mu(\sigma) = 0, \quad \sigma \geq 1$$

$$\mu(\sigma) = \frac{1}{2} - \sigma, \quad \sigma \leq 0$$

Функция:



До-во:

бегим оп-но

$$f_{\varepsilon}(s) = \frac{1}{\ln(-is)} \cdot (-is)^{\frac{s-1}{2}} e^{i\varepsilon s}; \quad \varepsilon > 0.$$

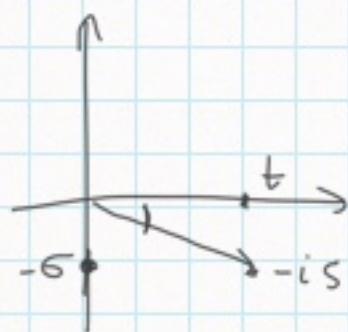
$f_{\varepsilon}(s)$ - анал. нпр $t \geq 2$.

$$|f_{\varepsilon}(s)| = \frac{1}{(\ln^2|s| + \arg^2(-is))^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{\sigma-1}{2} \ln|s| - \frac{t}{2} \arg(-is)} e^{-\varepsilon t}.$$

$$0 \leq \sigma \leq 1$$

$$\ln|s| = \ln\sqrt{t^2 + \sigma^2} = \ln t + \ln\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{t^2}} = \ln t + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

$$\arg(-is) = -\arctg \frac{\sigma}{t} = -\frac{\sigma}{t} + O\left(\frac{1}{t^3}\right).$$



$$\begin{aligned} (\ln^2|s| + \arg^2(-is))^{\frac{1}{2}} &= \ln|s| \left(1 + \frac{\arg^2(-is)}{\ln^2|s|}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= (\ln t + O(t^{-2})) (1 + O(t^{-2} \ln^{-2} t)) = \ln t + O(t^{-2}). \end{aligned}$$

$$|f_{\varepsilon}(s)| = \frac{1}{\ln t + O(t^{-2})} \cdot e^{\frac{\sigma-1}{2} \ln t + \frac{\sigma}{2} + O(t^{-2})} e^{-\varepsilon t} =$$

$$= \frac{t^{\frac{\sigma-1}{2}}}{\ln t} e^{\frac{\sigma}{2}} e^{-\varepsilon t} (1 + O(t^{-2}))$$

Рассм. $\zeta(s) f_\varepsilon(s)$ при $0 \leq \sigma \leq 1, t \geq 2$.

На $\operatorname{Re} s = 0, t \geq 2$ $|\zeta(s)| \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t$

На $\operatorname{Re} s = 1, t \geq 2$ $|\zeta(s)| \ll \ln t$.

На границе полулосы ($0 \leq \sigma \leq 1, t \geq 2$)

$$|\zeta(s) \cdot f_\varepsilon(s)| \leq M$$

Берем $T \geq T(\varepsilon)$. Оценим при $0 \leq \sigma \leq 1, t = T$

$$|\zeta(s) f_\varepsilon(s)| \ll T^{\frac{1}{4}} \cdot e^{-\varepsilon T} \ll 1.$$

↑ используем гл.-ую оценку для $|\zeta(s)|$.

$\exists T \geq T_0(\varepsilon)$: на границе прямоугольника

$$(0 \leq \sigma \leq 1, 2 \leq t \leq T)$$

$$|\zeta(s) f_\varepsilon(s)| \leq M. \quad (M \text{ не зав-т от } \varepsilon) \Rightarrow$$

$$|\zeta(s) f_\varepsilon(s)| \leq M \text{ внутри прямоугольника} \Rightarrow$$

оценка справедлива в полулосе.

$$|\zeta(s)| \leq \frac{M}{|f_\varepsilon(s)|} \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t \cdot e^{\varepsilon t} \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Переходим к $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Rightarrow$ теорема г-на.

Теорема: (Гамбургер, 1921)

пусть $G(s)$ — целая ф-ия конечного порядка
(т.е. $|G(s)| \leq e^{|s|^\mu}$, $\mu > 0$), $P(s)$ — многочлен,

$f(s) = \frac{G(s)}{P(s)}$, приведем также

$f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ — с.а. абсолютно при $\operatorname{Re} s > 1$.

Пусть $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma(\frac{1-s}{2}) g(1-s)$, где

$g(1-s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n^{1-s}}$ — с.а. абс.-но при

($0 < \lambda < 1$) $\operatorname{Re} s < -\lambda < 0$. Тогда $f(s) = c \cdot \zeta(s)$,
с — постоянная.

До-во:

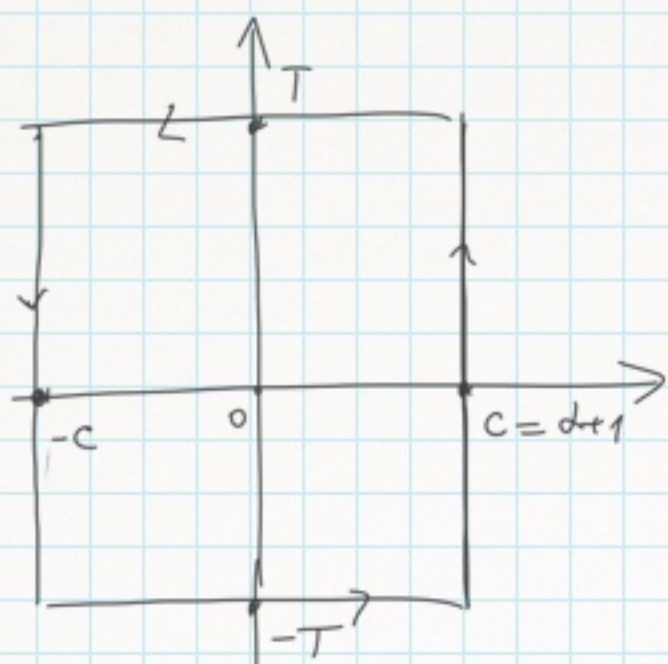
$x > 0$, $c = \lambda + 1$.

$$\Phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \underbrace{\Gamma(\frac{s}{2}) x^{-\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{s}{2}} f(s)}_{F(s)} ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(\frac{s}{2}) (\pi x n^2)^{-\frac{s}{2}} ds = \left\{ e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds \right\}$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\pi x n^2}.$$

До-ел. далее, что можно перенести правую
интегрирования левее, рассматривая прямоуго.-ый
контур и доказывая, что $\int$ по горизонт. или отрезкам $\rightarrow 0$.



Пусть T - дост.-но большое, что
внутри прямо.-го лежат
все полюса $f(s)$ (т.е. $\frac{1}{P(s)}$).

$$\frac{f(s)P(s)}{(s+A)^{\deg P+c+1}} - \text{равн. в полюсе } |\sigma| \leq c$$

$$A = c+10.$$

При $\operatorname{Re} s = c \quad \left| \frac{f(s)P(s)}{(s+A)^{\deg P+c+1}} \right| \ll 1$

При $\operatorname{Re} s = -c$

$$f(s) = g(1-s) \cdot \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})}$$

$$\left| \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} \right| \ll \left(\frac{t}{2} \right)^{\frac{1}{2}-\sigma} \ll t^{c+\frac{1}{2}} \quad (\text{при } \sigma = -c).$$

$$\left| \frac{f(s)P(s)}{(s+A)^{\deg P+c+1}} \right| \ll \frac{t^{c+\frac{1}{2}}}{t^{c+1}} \ll 1$$

$\downarrow$
 $g(1+c)$ - абс. const

Из принципа Фрагмена-Минделёра (где позже).
получим, что $\left| \frac{f(s)P(s)}{(s+A)^{\deg P+c+1}} \right| \ll 1$ во всей полосе.

$\Rightarrow |f(s)| \ll t^{c+1}$ на горизонт.-ых отрезках в полосе.

$\Rightarrow$ при $T \rightarrow +\infty$ из-за экспоненц.-ого убывания $\Gamma(\frac{s}{2})$ следует, что $\int$ -ые по горизонт.-ым отрезкам $\rightarrow 0$ при $T \rightarrow +\infty$. Итак,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} F(s) ds + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ |\operatorname{Re} s_j| \leq c}}^m \operatorname{Res}_{s_j} F(s)$$

$$\parallel$$

$$2 \sum a_n e^{-\pi x n^2}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} F(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} x^{-\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s) ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} x^{-\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) g(1-s) ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_{-c-i\infty}^{-c+i\infty} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) (\pi x^{-1} n^2)^{-\frac{1-s}{2}} x^{-\frac{1}{2}} ds =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{2\pi i} \int_{1+c-i\infty}^{1+c+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) (\pi x^{-1} n^2)^{-\frac{s}{2}} x^{-\frac{1}{2}} ds =$$

$$= 2 x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\pi x^{-1} n^2}$$

$$2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\pi x n^2} = 2 x^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-\pi x^{-1} n^2} + \sum_{\substack{\sigma=1 \\ |\operatorname{Re} s_j| \leq c}} \operatorname{Res}_{s_j} F(s) \quad (*)$$

$$F(s) = x^{-\frac{s}{2}} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) f(s).$$

Рассмотрим $\frac{1}{P(s)}$ (где $f(s) = \frac{G(s)}{P(s)}$) и $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$.

$s = s_0$ — нуль $\Rightarrow \operatorname{Res}_{s_0} F(s)$ — это

множитель от $\ln x$, умноженный на $x^{-\frac{s_0}{2}}$.

$$s = s_0: x^{-\frac{s}{2}} = x^{-\frac{s_0}{2}} x^{-\frac{s-s_0}{2}} = x^{-\frac{s_0}{2}} \left(1 - \frac{s-s_0}{2} \ln x + \dots\right)$$

$$\sum_{|\operatorname{Res}_{s_0}| \leq c} \operatorname{Res}_{s_0} F(s) \ll x^{\frac{c}{2}} (\ln x)^{\deg P}$$

Поскольку $t > 0$. (*) $\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-\pi x(n^2+t^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n^2 x^{-1} - \pi x t^2} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_\nu} x^{-\frac{s_0}{2}} c_{\mu,\nu} (\ln x)^\mu e^{-\pi x t^2}; \quad k_\nu \leq \deg P.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-\pi x(n^2+t^2)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n^2 x^{-1} - \pi x t^2} dx +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_\nu} c_{\mu,\nu} \int_0^{+\infty} x^{-\frac{s_0}{2}} (\ln x)^\mu e^{-\pi x t^2} dx$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x(n^2+t^2)} dx = \frac{1}{\pi(n^2+t^2)}.$$

$$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{s_D}{2}} (\ln x)^\mu e^{-\pi x t^2} dx = \left\{ \pi x t^2 = y \right\} =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y} \left(\frac{y}{\pi t^2} \right)^{-\frac{s_D}{2}} \ln^\mu \left(\frac{y}{\pi t^2} \right) \frac{dy}{\pi t^2} =$$

$$= \pi^{\frac{s_D}{2}-1} t^{s_D-2} \sum_{r=0}^{\mu} C_{\mu}^r (-1)^r \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{-\frac{s_D}{2}} (\ln y)^{\mu-r} (\ln \pi t^2)^r dy}_{\text{сходящийся интеграл}} =$$

$$= \pi^{\frac{s_D}{2}-1} t^{s_D-2} \sum_{r=0}^{\mu} (\ln t)^r C_{r,D}, \quad \mu \leq \deg P$$

$\mathcal{D}/\mathcal{D}$: $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n^2 x^{-1} - \pi x t^2} dx.$

Д/з:

30. Доказать, что можно переставить $\int$ и $\sum$ местами в выражении $\Phi(x)$ в начале г-ва th. Гамбургера.

31. Вычислить

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n^2 x^{-1} - \pi x t^2} dx = \frac{e^{-2\pi n t}}{t}$$

с помощью аналогичных шагов:

а) вынести полный квадрат вида $\pi \left(\frac{n}{\sqrt{x}} + t\sqrt{x} \right)^2$ в показателе экспоненты в

интеграле; сделать замену переменных интегрирования так, что получится

$$I = \frac{2}{t} e^{2\pi n t} \sqrt{n t} \int_0^{+\infty} e^{-\pi n t (x+x^{-1})^2} dx$$

б) вычислить $\int_0^{+\infty} e^{-a(x+x^{-1})^2} dx$, разбивая его на два: $\int_0^1 + \int_1^{+\infty}$. Преобразовать $\int_0^1$ к $\int_1^{+\infty}$, например.

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-a(x+x^{-1})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{e^{-4a}}{\sqrt{a}} \right).$$

32. Доказать асимптотическую ф-лу

$$\sum_{n \leq x} \tau_k(n) = x P_{k-1}(\ln x) + O(x^{\frac{1}{k} + \varepsilon}), \text{ где}$$

τ_k - число решений $n_1 \cdots n_k = n$, $n_j \in \mathbb{N}$.

