О плотнейшей упаковке шаров в размерности 8

Весна 2021 Лекция 10

Лекция 10.

$$f_+(x) = \sin^2\frac{\pi r^2}{2}\int_0^{+\infty}\left(-t^2 g_+(it) + it\, g_1(it) + g_2(it)\right)e^{-\pi t|x|^2}\,dt$$

$r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^8$

где $$g_+(z) = \frac{\pi}{2160}\,\frac{(E_6 - E_2E_4)^2}{\Delta}, \qquad \underline{g_+(\infty) = 0.}$$

$$g_1(z) = \frac{i}{180}\,\frac{(E_4E_6 - E_4^2E_2)}{\Delta}$$

$$g_2(z) = -\frac{1}{60\pi}\,\frac{E_4^2}{\Delta}.$$

$g_+(z)$ – голом. на $\mathbb{H}$ ф-ия, 1-периодическая.

$$\underbrace{g_+\left(-\frac{1}{z}\right)z^2}_{\varphi_+(z)} = \frac{\pi}{2160}z^2\frac{(E_2E_4 - E_6)^2}{\Delta} + \frac{iz}{180}\frac{E_4E_6 - E_4^2E_2}{\Delta} - \frac{1}{60\pi}\frac{E_4^2}{\Delta}$$

Опр.:

$$a(x) = -\frac{1}{4i}\left(\int_{-1}^{i} \varphi_+(z+1)\, e^{\pi i |x|^2 z}\, dz + \int_{1}^{i} \varphi_+(z-1)\, e^{\pi i |x|^2 z}\, dz - 2\int_{0}^{i} \varphi_+(z)\, e^{i\pi |x|^2 z}\, dz + 2\int_{i}^{+\infty} g_+(z)\, e^{i\pi |x|^2 z}\, dz\right)$$

Утв: $a(x)$ — из класса Шварца и удовл.-ет $\hat{a}(x) = a(x)$.

Д-во: пусть $g_+(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_+(n)\, e^{2\pi i n z}$, $z \in \mathbb{H}$, и пусть мы д-ли, что $|c_+(n)| \ll e^{4\pi\sqrt{n}}$ (или даже $\ll e^{2\pi\varepsilon n}$, $\varepsilon > 0$).

$$|g_+(z)| \ll \sum_{n=1}^{+\infty} e^{4\pi\sqrt{n}} \left|e^{2\pi i n z}\right| \ll \sum_{n=1}^{+\infty} e^{4\pi\sqrt{n}}\, e^{-2\pi n \operatorname{Im} z} \ll$$

$$\ll e^{-2\pi \operatorname{Im} z}, \quad \operatorname{Im} z \geqslant \underset{\text{фикс.}}{\underset{\downarrow}{t_0}} > 0.$$

$$\ll e^{-2\pi(\operatorname{Im} z - \varepsilon)}, \quad \operatorname{Im} z \geqslant t_0, \quad \varepsilon \leq \frac{t_0}{2}, \quad 0 < t_0 < 1.$$

$$\left| \int_i^{i\infty} g_+(z)\, e^{i\pi\tau^2 z}\, dz \right| \ll \int_1^{+\infty} e^{-2\pi t}\, e^{-\pi\tau^2 t}\, dt = c\, \frac{e^{-\pi(\tau^2+2)}}{\tau^2+2} \text{ — }$$

убывает быстро.

$$\left| \int_{-1}^{i} \varphi_+(z+1)\, e^{i\pi\tau^2 z}\, dz \right| = \left| \int_{-1}^{i} g_+\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2\, e^{i\pi\tau^2 z}\, dz \right| = \left\{-\frac{1}{z+1} = t\right\}$$

$$= \left| \int_{i\infty}^{-\frac{1}{i+1}} g_+(z)\, z^{-4}\, e^{i\pi\tau^2\left(-\frac{1}{z}-1\right)}\, dz \right| \ll \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t}\, e^{-\frac{\pi\tau^2}{t}}\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^{\tau/\sqrt{2}} e^{-\frac{\pi\tau^2}{t}}\, dt + \int_{\tau/\sqrt{2}}^{+\infty} e^{-2\pi t}\, dt = \int_{\sqrt{2}/\tau}^{+\infty} e^{-\pi\tau^2 t}\, \frac{dt}{t^2} + \frac{e^{-2\pi\frac{\tau}{\sqrt{2}}}}{2\pi} \leq$$

$$\leq \frac{\tau^2}{2}\, \frac{e^{-\sqrt{2}\pi\tau}}{\pi\tau^2} + \frac{e^{-\sqrt{2}\pi\tau}}{2\pi} \text{ — быстро убывает.}$$

Аналогично рассм.-ся другие интегралы.

$x \in \mathbb{R}^8$, $|x|^2 = (x,x) = \sum_{i=1}^{8} x_i^2$

Берём $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}$, $\alpha \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^8$.

Получаем:

$$\int_i^{i\infty} g_+(z)\, e^{\pi i |x|^2 z}\, p_\alpha(z, x_1, \dots, x_8)\, dz \ll$$

используем то, что $e^{-|x|^2 a}$ из класса Шварца.

$$\ll \int_1^{+\infty} e^{-2\pi t} \frac{dt}{|x|^{2A}}$$ — убывает быстрее любой степени.

$$\left| \int_{-1}^{i} g_+\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 p_\alpha(z, x_1, \dots, x_8)\, e^{i\pi |x|^2 z}\, dz \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{i\infty}^{-\frac{1}{1+i}} g_+(z)\, z^{-4}\, e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}-1\right)} p_\alpha\left(-\frac{1}{z}-1, x_1, \dots, x_8\right) dz \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-2\pi t}\, e^{-i\pi \frac{|x|^2}{t}}\, \underset{\substack{\downarrow \\ \max p_\alpha \text{ по дуге}}}{C_\alpha}(x_1, \dots, x^8)\, dt \ll \frac{1}{|x|^A}$$

(мн-ен по $x_1 \dots x_8$)

$\Rightarrow \quad a(x)$ — из класса Шварца.

Проверим, что $\hat{a}(x) = a(x)$.

$$a(x) = -\frac{1}{4i}\Big(\int_{-1}^{i} g_+\Big(-\frac{1}{z+1}\Big)(z+1)^2 e^{i\pi|x|^2 z}\,dz + \int_{1}^{i} g_+\Big(-\frac{1}{z-1}\Big)(z-1)^2 e^{i\pi|x|^2 z}\,dz -$$

$$- 2\int_{0}^{i} g_+\Big(-\frac{1}{z}\Big) z^2 e^{i\pi|x|^2 z}\,dz + 2\int_{i}^{+\infty} g_+(z)\, e^{i\pi|x|^2 z}\,dz \Big).$$

$$-4i\,\hat{a}(y) = \int_{\mathbb{R}^8}\Big(\int_{-1}^{i} \ldots + 2\int_{i}^{+\infty} \ldots \Big) e^{-2\pi i(x,y)}\,dx.$$

Интегралы сх-ся абс-но $\Rightarrow$ можно переставить $\int_{\mathbb{R}^8}$, $\int_{-1}^{i}$ и др. Используем

$$\widehat{e^{\pi i|x|^2 z}} = z^{-4} e^{\pi i|y|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}.$$

$$\hat{a}(x) = \int_{-1}^{i} g_+\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 z^{-4} e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}\, dz +$$

$$+ \int_{1}^{i} g_+\left(-\frac{1}{z-1}\right)(z-1)^2 z^{-4} e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}\, dz -$$

$$- 2\int_{0}^{i} g_+\left(-\frac{1}{z}\right) z^2 \cdot z^{-4} e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}\, dz + 2\int_{i}^{+\infty} g_+(z) z^{-4} e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}\, dz$$

$$t = -\frac{1}{z}, \quad z = -\frac{1}{t}, \quad dz = \frac{1}{t^2}\, dt, \quad z+1 = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t},$$

$$-\frac{1}{z+1} = -\frac{t}{t-1} = -1 - \frac{1}{t-1}$$

$$\int_{-1}^{i} g_+\left(-\frac{1}{z+1}\right)(z+1)^2 z^{-4} e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}\right)}\, dz =$$

$$= \int_{1}^{i} g_+\left(-1 - \frac{1}{t-1}\right)(t-1)^2 e^{i\pi|x|^2 t}\, dt \underset{\substack{\downarrow \\ 1\text{-пер-ть } g_+}}{=} \int_{1}^{i} g_+\left(-\frac{1}{t-1}\right)(t-1)^2 e^{i\pi|x|^2 t} -$$

– это есть в $a(x)$.

$$-2\int_0^i g_+\left(-\frac{1}{z}\right) z^{-2} e^{i\pi|x|^2\left(-\frac{1}{z}\right)} dz =$$

$$= 2\int_i^{+\infty} g_+(t)\, e^{i\pi|x|^2 t} dt$$

$$\Rightarrow -4i\,\hat{a}(x) = -4i\,a(x).$$

Утв.-ие д-но.

Для д-ва утв.-ия надо оценить $|c_+(n)|$ — коэф-ты Фурье $g_+(z)$.

Утв.: а) коэф-ты $g_+(z) = \frac{\pi}{2160}\frac{(E_2E_4-E_6)^2}{\Delta}$ — неотрицательны;

б) коэф-ты $ig_1(z)$, $-g_2(z)$ тоже неотрицательны.

Д-во:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{q}\cdot\frac{1}{(1-q)^{24}}\,\frac{1}{(1-q^2)^{24}}\cdots = \frac{1}{q}(1+q+q^2+\ldots)^{24}(1+q^2+q^4+\ldots)^{24}\cdots \Rightarrow$$

коэф-ты $\frac{1}{\Delta}$ — неотриц.-ые.

а) Д-ем, что коэф-ты $E_2E_4-E_6$ — также неотр.-ны.

$$f' = \frac{1}{2\pi i}\frac{df}{dz} = q\frac{df}{dq}$$

$E_2 E_4 - E_6 = 3E_4'$

E_4 — имеет неотр.-ые коэф.-ты $\Rightarrow$ E_4' — также.

$\Rightarrow E_2 E_4 - E_6$ — аналогично.

б) $ig_1(z) = \frac{1}{180} \frac{E_4(E_2E_4 - E_6)}{\Delta}$ — имеет неотриц.-ые коэф-ты.

$-g_2(z) = \frac{1}{60\pi} \frac{E_4^2}{\Delta}$ — аналогично

Утв.: $g_t(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_t(n) q^n$, $q = e^{2\pi i z}$. При $n \geq n_0$

а) $|c_t(n)| \leq \frac{1}{30\pi} e^{4\pi\sqrt{n}}$

б) $c_{1}(n), c_2(n) \leq \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{30\pi}$.

Д-во:

$$g_+(it) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_+(n)\, e^{-2\pi n t} \geqslant c_+(k)\, e^{-2\pi k t} \quad \forall \ k \in \mathbb{N}.$$

$$c_+(k) \leq g_+(it)\, e^{2\pi k t}$$

$$g_+\left(-\frac{1}{z}\right) = g_+(z) + z^{-1} g_1(z) + z^{-2} g_2(z), \quad z = \frac{i}{t} \Rightarrow$$

$$g_+(it) = g_+\left(\frac{i}{t}\right) - it\, g_1\left(\frac{i}{t}\right) - t^2 g_2\left(\frac{i}{t}\right)$$

$$c_+(k) \leq e^{2\pi k t}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_+(n) e^{-2\pi n/t} - it \sum_{n=0}^{+\infty} c_1(n) e^{-2\pi n/t} - t^2 \sum_{n=-1}^{+\infty} c_2(n) e^{-2\pi n/t} \right) =$$

$$= e^{2\pi k t}\left(\frac{t^2}{60\pi} e^{2\pi/t} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_+(n) - it\, c_1(n) - t^2 c_2(n)\right) e^{-2\pi n/t} \right)$$

Берём $t = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

$$c_+(k) \leq e^{2\pi\sqrt{k}} \left(\frac{e^{2\pi\sqrt{k}}}{k \cdot 60\pi} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(c_+(n) - \frac{i}{\sqrt{k}} c_1(n) - \frac{1}{k} c_2(n) \right) e^{-2\pi n \sqrt{k}} .$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_-(n)\, e^{-2\pi n\sqrt{k}} \le \sum_{n=1}^{+\infty} c_+(n)\, e^{-2\pi n} = g_+(i)$$

$$-\frac{i}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} c_1(n)\, e^{-2\pi n\sqrt{k}} \le 0.$$

$$-\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} c_2(n)\, e^{-2\pi n\sqrt{k}} \le -\frac{1}{k} \sum_{n=0}^{+\infty} c_2(n)\, e^{-2\pi n} =$$

$$= -\frac{1}{k}\left(g_2(i) - c_2(-1)\, e^{2\pi}\right)$$

$$c_+(k) \le e^{2\pi\sqrt{k}}\left(\frac{e^{2\pi\sqrt{k}}}{60\pi k} + C\right) \Rightarrow$$

$k \geq k_0$ $\qquad c_+(k) \le \dfrac{e^{4\pi\sqrt{k}}}{30\pi k}.$

б) аналогично.

Дост.-на оценка $|c_+(n)| \le e^{2\pi n \varepsilon}$, $0 < \varepsilon \le \frac{1}{2}$.

Можно получить из оценки коэф.-ов рядов Лорана для ф-ий, голом.-их в проколотом диске.