ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВРЕМЕНИ ПОПАДАНИЯ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ШУМОВ ОТОБРАЖЕНИЙ ОКРУЖНОСТИ

Джалилов Ахтам Абдурахманович

Туринский политехнический университет в городе Ташкенте

Пусть имеется динамическая система (X, F, μ, T) где $X-$ множество, $F - \sigma-$ алгебра подмножеств X; $\mu-$ вероятностная мера; $T : X \to X$ преобразование сохраняющее меру μ, т.е. $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$, для $\forall A \in F$ (в этом случае, $\mu-$ называется инвариантной мерой для T.) Будем рассматривать конечные или счетные измеримые разбиения пространства X, т.е. наборы множеств $\mathbf{P} = \{P_i\}$, $P_i \in F$, таких, что

- $\cup_i P_i = X(mod0)$,
- $P_i \cap P_j = \emptyset(mod0)$, при $i \neq j$.

Мы будем считать, что $\mu(A_i) > 0$ при всех i.

Определение 1

Энтропией разбиения $\mathbf{P} = \{P_i\}$ *называется число*

$$h(\mathbf{P}) = -\sum_i p_i \ln p_i, \text{ где } p_i = \mu(P_i)$$

- Для конечного разбиения $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, ..., P_r\}$ справедливо неравенство
$$0 \leq h(p) \leq \ln r$$
- $h(\mathbf{P}) = \ln r \Leftrightarrow \mu(\mathbf{P}_i = \frac{1}{r})$ для всех i.
- $h(\mathbf{P}) = 0 \Leftrightarrow r = 1$ т.е. $\mathbf{P} = X$ и $\mathbf{P}(P_1) = 1$.

Обозначим через $\mathbf{P} \vee Q$ произведение разбиений $\mathbf{P}$ и Q:

$$\mathbf{P} \vee Q := \{P \cap Q,\ P \in \mathbf{P},\ Q \in \mathbf{Q}\},$$

$$\mathcal{P}_n := \mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee ... \vee T^{-(n-1)}\mathcal{P}.$$

Пусть $\mathcal{P} = \{P_i\}$, $i = \overline{1, r}-$ конечное разбиение т.е. $P_i \in F$, $i = \overline{1, r}$.

Определение 2

Мы скажем, что $\mathcal{P}_n$ - имя точки $x \in X$ есть слово $(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$, если $x \in P_{x_0}, \ Tx \in P_{x_1}, \ T^2x \in P_{x_2}, \ T^{n-1}x \in P_{x_{n-1}}, \ x_i = 1, 2, ..., r.$

Лемма 1

Пусть $T-$ эндоморфизм вероятностного пространства (X, F, μ). Для произвольного конечного или счетного измеримого разбиения $\mathbf{P}$ с конечной энтропией (т.е. $h(\mathbf{P}) < \infty$), существует предел

$$h(T; \mathbf{P}) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} h(\mathcal{P}_n)$$

Число $h(T; \mathbf{P})$ называется энтропией преобразования T относительно разбиение $\mathbf{P}$.

Определение 3

Число

$$h(T) = \sup_{\mathbf{P}} h(T; \mathbf{P}),$$

(где супремум берётся по всем разбиениям с конечной энтропией) называется энтропией Колмогорова-Синая для эндоморфизма T.

Свойства $h(T)$**:**

1. $0 \leq h(T) \leq +\infty$;
2. Если $T-$ автоморфизм, то $h(T) = h(T^{-1})$;
3. Для любого эндоморфизма T и любого $k \geq 1$

$$h(T^k) = kh(T).$$

4. Энтропия есть инвариант динамической системы, т.е. изоморфные динамические системы имеют одинаковую энтропию.

Определение 4

Разбиение $\mathbf{P}$ *пространства* X *называется образующим для автоморфизма* T, *если разбиение*

$$\bigvee_{n=-\infty}^{0} T^{-n}\mathbf{P}$$

порождает всю $\sigma-$ *алгебру* F.

Теорема 1 (Колмогоров)

Если $\mathbf{P}$ *образующее разбиение для* T *и* $h(T;\mathbf{P}) < +\infty$, *то*

$$h(T) = h(T;\mathbf{P}).$$

Теперь сформулируем важную теорему.

Теорема 2 (Шеннон-Макмиллан-Брейман)

Пусть T эргодический автоморфизм пространства Лебега (X, F, μ), $\mathbf{P}-$ произвольное конечное разбиение пространства X. Тогда для почти всех $x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\ln \mu(P_n(x))}{n} = h(T; \mathbf{P}).$$

где $P_n(x)$ есть элемент разбиения $\mathcal{P}_n$ содержащий точку x.

Времена возвращения и времена попадания

Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ вероятностное пространство и $T : X \to X$ преобразование, сохраняющее меру μ. Последнее означает, что $\mu(A) = \mu(T^{-1}(A))\ \ \forall A \in \mathcal{B}$.

Теорема 3 (Боголюбов и Крылов)

Пусть M компактное метрическое пространство и $T : M \to M$ непрерывное отображение. Тогда T имеет хотя бы одну вероятностную инвариантную меру.

Сформулируем следующую теорему [1].

Теорема 4

Всякий гомеоморфизм окружности T с иррациональным числом вращения $\rho = \rho(T)$ является строго эргодическим, т.е. обладает единственной вероятностной инвариантной мерой.

[1] Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. - М.: Наука,1980.

Замечательным следствием инвариантности меры μ является теорема А. Пуанкаре (см. напр. [1, КСФ]).

Теорема 5 (теорема Пуанкаре о возвращении)

Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *вероятностное пространство и* $T : X \to X$ *преобразование сохраняющее меру* μ. *Тогда для любого подмножества* $A, \ \ \mu(A) > 0$, $\mu-$ *почти все точки* $x \in A-$ *возвращающиеся.*

Из теоремы Пуанкаре легко можно вывести, что $\mu-$почти все точки $x \in A$ бесконечно много раз возвращаются, т.е. существует возрастающая подпоследовательность $n_k := n_k(x) \uparrow \infty$, такая, что

$$T^{n_k}(x) \in A, \ \ k \geq 1.$$

Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, μ). Пусть преобразование $T : X \to X$ сохраняет меру μ. Четверка $(X, \mathcal{B}, \mu\ T)$ называется **динамической системой.**
Пусть A такое, что $\mu(A) > 0$. Определим функцию **первого возвращения R** $: A \to \mathbf{Z}_+$:

$$\mathbf{R}_A(x) := inf\{n|\ T^n(x) \in A\},\ \forall x \in A.$$

Если точка $x \in A$ ни разу не возвращается в A, то положим $\mathbf{R}_A(x) = 0$. Классическая **лемма Каца** (см. напр. [1, КСФ]) утверждает, что

$$\int\limits_A \mathbf{R}_A(x) d\mu \leq 1.$$

Если T **эргодическое преобразование,** то имеет место равенство.

Будем рассматривать конечные или счетные измеримые разбиения пространства X, т.е. наборы множеств $\mathcal{P} = \{P_i\}$, $P_i \in F$, таких, что

- $\bigcup P_i = X \ (mod\, 0)$;
- $P_i \bigcap P_j = \emptyset \ (mod\, 0)$ при $i \neq j$.
- $\mu(P_i) > 0$, для всех элементов P_i разбиения $\mathcal{P}$.

Для измеримых разбиений $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ их **произведением** $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ назовем разбиение, элементами которого служат всевозможные множества вида $P_i \cap Q_j$.

Мы будем писать $\mathcal{P} \preceq \mathcal{Q}$, если каждый элемент разбиения $\mathcal{Q}$ содержится в некотором элементе разбиения $\mathcal{P}$.

Для каждого $n \geq 1$ положим

$$\mathcal{P}_n := \mathcal{P} \vee T^{-1}\mathcal{P} \vee ... \vee T^{-n+1}\mathcal{P}.$$

Ясно, что $\mathcal{P}_n \preceq \mathcal{P}_{n+1}$, $n \geq 1$. Обозначим через $P_n(x)$ элемент разбиения $\mathcal{P}_n$ содержащий точку x. Таким образом получаем вложенные измеримые множества содержащие точку x т.е.

$$P_1(x) \supset P_2(x) \supset ... \supset P_n(x) \supset ....$$

Определим
$$\mathbf{R}_n(x) := \mathbf{R}_{P_n(x)}(x),\ \ x \in \Omega.$$
Орнстейн и Вейсс [2] доказали следующий замечательный результат.

Теорема 6 (Орнстейн и Вейсс)

Пусть $(X, F, \mu,\ \ T)$ эргодическая динамическая система. Предположим, что $\mathcal{P}-$ измеримое разбиение пространства X, такое, что $h_\mu(\mathcal{P}) < \infty$. Тогда для $\mu-$почти всех точек x
$$\lim \frac{\log_2 \mathbf{R}_{P_n(x)}(x)}{n} = h_\mu(T, \mathcal{P}).$$

Другими словами, приведенная выше теорема утверждает, что $\mu-$ почти каждая точка $x \in A$ возвращается примерно через $2^{nh(T,\mathcal{P})}$ шагов.

[2] Ornstein D., Weiss B. Entropy and data compression schemes. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. 39, Issue 1, 78–83 (1993).

Пусть $b \in (0, \theta)$. Найдется $i > 0$, такое, что

$$||q_i\theta|| < b \leq ||q_{i-1}\theta||.$$

Определим число k_0 :

$$k_0 := \max\{k : \; k||q_i\theta|| + ||q_{i+1}\theta|| < b\}$$

Замечательным фактом является то, что функция $\mathbf{R}_n(x)$ может принимать не более трех значений [3].

[3] Kim D.H., Seo B.K. The waiting time for irrational rotations. // Nonlinearity 16.-2003.-P. 1861-1868.

Теорема 7 (см. [3, Д.Ким и Б.Сео])

Рассмотрим иррациональный поворот T_θ, $0 < \theta < 1$ *и точку* b, $x_0 := 0 < b < \theta$. *Тогда для функции первого возвращения* $\mathbf{R}_{[0,b)}(x)$ *справедливы следующие утверждения.*
1) Если i*-четное число, то*

$$\mathbf{R}_{[0,b)}(x) = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } x_{-q_{i+1}} \leq x < b \\ k_0 q_{i+1} + q_i, & \text{если } x_0 \leq x < T_\theta^{-q_i - k_0 q_{i+1}}(b) \\ (k_0+1) q_{i+1} + q_i, & \text{если } T_\theta^{-q_i - k_0 q_{i+1}}(b) \leq x < x_{-q_{i+1}}. \end{cases}$$

2) Если i*-нечетное число, то*

$$\mathbf{R}_{[0,b)}(x) = \begin{cases} q_{i+1}, & \text{если } x_0 \leq x < T_\theta^{-q_{i+1}}(b) \\ k_0 q_{i+1} + q_i, & \text{если } x_{-q_i - k_0 q_{i+1}} \leq x < b \\ (k_0+1) q_{i+1} + q_i, & \text{если } T_\theta^{-q_{i+1}}(b) \leq x < x_{-q_i - k_0 q_{i+1}}. \end{cases}$$

Заметим, что для каждого $i \geq 1$ значение функция $\mathbf{R}_{[0,b)}(x)$ на среднем отрезке совпадает с суммой ее значений на крайних отрезках.

Д. Ким, Б. Сео [3] изучили предельное поведение времени попадания для иррациональных поворотов окружности $S^1 := R/Z \simeq [0,1)$. Рассмотрим иррациональный поворот окружности на угол $\theta, \ 0 < \theta < 1:$

$$T_\theta x = x + \theta \mod 1, \ x \in S^1.$$

А на окружности $[0,1)$ определим разбиение τ_n, разбивая ее на 2^n отрезков т.е.

$$\tau_n := \left\{ Q_s = \left[\frac{s}{2^n}, \frac{s+1}{2^n} \right), \ 0 \leq s < 2^n - 1 \right\}.$$

Обозначим через $Q^{(n)}(x)$ отрезок разбиения τ_n содержащий точку $x \in [0,1)$.

Определим функцию попадания $\tilde{E}_n : S^1 \times S^1 \to Z_+$ по формуле

$$\tilde{E}_n(x, y) := \inf\{j \geq 1 \ : \ \ T^j y \in Q^{(n)}(x)\}$$

В силу иррациональности θ, орбита любой точки всюду плотна на окружности. Следовательно $\tilde{E}_n(x, y)$ принимает конечные значения. С ростом n длины отрезков разбиения τ_n экспоненциально убывает к нулю и максимальное значение функции попадания $\tilde{E}_n(x, y)$ экспоненциально возрастает к бесконечности. Определим нормированную функцию попадания $E_n(x, y)$:

$$E_n(x, y) := \frac{\log_2 \tilde{E}_n(x, y)}{n}$$

Нас интересует асимптотическое поведение случайной величины $E_n(x, y)$ при $n \to +\infty$.

В дальнейшим нам необходимо следующее определение типа иррационального числа.
Для каждого действительного числа $t \in R^1$ определим его норму $||t||$:

$$||t|| := \min_{z \in Z} |t - z|.$$

Определение 5

Иррациональное число $\theta \in (0,1)$ называется иррациональным числом типа η, если

$$\eta := \sup\{\beta : \lim \inf_{n \to \infty} n^{\beta} ||n\theta|| = 0\}$$

Пусть $\theta = [k_1, k_2, \dots, k_n, \dots]$ и $k_n = 2^{r^n}$, $n \geq 1$, для некоторого $r > 0$. Тогда θ является иррациональным типа r.

Хорошо известно, что лебегова мера подмножества $M_1 \subset (0,1)$ иррациональных чисел типа 1 равно 1.

Обозначим

$$W_{B(x,r)}(y) := min\{j \geq 1 \ : \ \ T_\theta^j y \in B(x,r)\}, \ \ B(x,r) := \{y \ : \ |y-x| < r\}.$$

Ким и Сео [3] доказали следующий результат.

Теорема 8

Для каждого поворота T_θ, где $\theta \in (0,1)-$иррациональное число типа $\eta \geq 1$ имеют место следующие соотношения:

$$(A) \quad \liminf_{n\to\infty} E_n(x,y) = \liminf_{t\to 0} \frac{\log_2 W_{B(x,r)}(y)}{-\log_2 r} = 1 \ \text{ п.в..} \qquad (1)$$

$$(B) \quad \limsup_{n\to\infty} E_n(x,y) = \limsup_{t\to 0} \frac{\log_2 W_{B(x,r)}(y)}{-\log_2 r} = \eta \ \text{ п.в..} \qquad (2)$$

Очевидно, что для иррациональных чисел типа - 1, верхние и нижние пределы, следовательно, предел существует и равен единице. В частности, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log_2 \tilde{E}_n(x,y) = 1, \quad \text{п.в. по } \ \mu_2.$$

Последнее число есть энтропия дуального преобразования
$f_2(x) = 2x\ mod 1,\ x \in [0, 1)$.
Из доказательства теоремы Ким и Сео, можно понять, что если вместо разбиения $\tau_n^{(2)}$ взять разбиение на равных $p^{-n},\ p \geq 3$ полуинтервалов т.е.

$$\tau_n^{(p)} := \left\{ Q_s = \left[\frac{s}{p^n}, \frac{s+1}{p^n} \right),\ 0 \leq s < p^n - 1 \right\},$$

то получим

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{E}_n(x, y) = \ln p.$$

А число $\ln p$ есть энтропия преобразования
$f_p(x) = px\ mod 1,\ x \in [0, 1)$.
Замечание. Отметим, что значение предела в теореме Ким и Сео не зависит от отображения T_θ, а зависит только от образующего разбиения $\tau_n^{(p)}$, более точно, от энтропии хаотического преобразования f_p.

Возникает естественный вопрос, что можно сказать о выше сказанном пределе, если взять другие разбиения?
Мы теперь сформулируем наш совместный результат с М. Хомидовым.
Непрерывные дроби.
Любое действительное число $\theta \in (0,1)$ однозначно представляется в виде непрерывной дроби (см. [4]):

$$\theta = 1/(k_1 + 1/(k_2 + ...)) := [k_1, k_2, ..., k_n, ...),$$

где $k_1, k_2, ..., k_n, ...-$ натуральные числа. Последнее разложение конечно, если x рационально, и бесконечно, если x иррационально. Для каждого $n \geq 1$ положим

$$p_n/q_n = [k_1, k_2, ..., k_n].$$

Числа p_n/q_n называются **подходящими дробями** числа θ. А числа $q_n, n \geq 1$ называются **временами первого возвращения для** T_θ.

[4] Хинчин А.Я. Цепные дроби. - М.: Наука, 1978.

Для чисел p_n и q_n выполняются следующие рекуррентные соотношения:

$$p_{n+1} = k_{n+1}p_n + p_{n-1},$$

$$q_{n+1} = k_{n+1}q_n + q_{n-1}, \ n \geq 1,$$

При этом, полагается $p_0 = 0, \ p_1 = k_1 \ q_0 = 1, \ q_1 = k_1$.
Числа $q_n := q_n(\rho)$ называются временами первого возвращения.

Теорема 9

Существует подмножество иррациональных чисел $M_0 \subset [0,1]$, такое, что $\ell(M_0) = 1$, и для каждого $\rho \in M_0$ имеет место следующее соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln q_n(\rho)}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}.$$

Рассмотрим иррациональный поворот $T_\alpha,\ \alpha \in (0,1)$. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in S^1$. Здесь и в дальнейшем f^n обозначает $n-$ую итерацию f. При помощи орбиты $O_{T_\alpha}(x_0)$ определим последовательность $\{\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0),\, n \geq 1\}$ динамических разбиений окружности. Разбиение $\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0)$ получается при помощи части орбиты точки $x_0 : \{x_i,\, 0 \leq i \leq q_n + q_{n+1} - 1\}$. Для каждого $n \geq 1$ обозначим через $\Delta_0^{(n)}(\alpha;\, x_0)$ отрезок, соединяющий точки x_0 и $T_\alpha^{q_n} x_0$. Положим $\Delta_i^{(n)}(\alpha;\, x_0) = T_\alpha^i(\Delta_0^{(n)}(\alpha;\, x_0)),\ i \geq 0$. Тогда разбиение $\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0)$ состоит из системы отрезков $\{\Delta_i^{(n)}(\alpha;\, x_0),\, 0 \leq i < q_{n+1}\}$ и $\{\Delta_j^{(n+1)}(\alpha;\, x_0),\, 0 \leq j < q_n\}$ (см. [5]), т.е.

$$\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0) = \{\Delta_i^{(n)}(\alpha;\, x_0),\ 0 \leq i < q_{n+1}\} \cup \{\Delta_j^{(n+1)}(\alpha;\, x_0),\ 0 \leq j < q_n\}.$$

[5] Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории.–М.:Изд.фирмы "Физико-математическая литература", 1995.

Разбиение $\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0)$ называется n-**ым динамическим разбиением** окружности. Отметим, что любые два отрезка разбиения $\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0)$ могут пересекаться только концевыми точками. При переходе от $\mathbf{P}_n(T_\alpha;\, x_0)$ к $\mathbf{P}_{n+1}(T_\alpha;\, x_0)$ все "короткие" отрезки $\Delta_j^{(n+1)}(\alpha;\, x_0)$, $0 \le j \le q_n - 1$ сохраняются, а "длинные" отрезки $\Delta_i^{(n)}(\alpha;\, x_0)$, $0 \le i < q_{n+1}$, разбивается на k_{n+2} отрезков:

$$\Delta_i^{(n)}(\alpha;\, x_0) = \Delta_i^{(n+2)}(\alpha;\, x_0) \cup \bigcup_{s=0}^{k_{n+2}-1} \Delta_{i+sq_n}^{(n+1)}(\alpha;\, x_0). \tag{3}$$

Функции попадания для динамических разбиений.
Пусть $\theta, \rho \in (0,1)$ иррациональное число. Определим функцию попадания $\tilde{E}_n^{\theta,\rho} :\, S^1 \times S^1 \to Z_+$ для иррационального поворота T_θ по формуле

$$\tilde{E}_n^{\theta,\rho}(x,y) := min\{j \ge 1 \;:\; T_\theta^j y \in \Delta^{(n)}(\rho, x)\},$$

где $\Delta^{(n)}(\rho, x)$ интервал динамического разбиения $\mathbf{P}_n(T_\rho;\, x_0)$, содержащий x.

Теперь сформулируем наш результат.

Теорема 10

Пусть $M_0 \subset (0,1)$ *множество иррациональных чисел, определяемое по теореме 9. Предположим, что* $\theta \in (0,1)$ *иррациональное число типа 1 и* $\rho \in M_0$. *Рассмотрим последовательность динамических разбиений* $\{\mathbf{P}_n(T_\rho; x_0),\ n \geq 1\}$ *- отображения* T_ρ. *Тогда существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \tilde{E}_n^{\theta,\rho}(x,y)}{n} = \frac{\pi^2}{12\ln 2}, \tag{4}$$

для почти всех (по мере Лебега) $(x,y) \in S^1 \times S^1$.

Замечание. Подмножество иррациональных чисел $M_1 \subset (0,1)$ имеет полную лебегову меру. С другой стороны лебегова мера подмножество иррациональных чисел $M_0 \subset (0,1)$ для которых выполняется (4) имеет меру единица.

Заметим, что $M_0 \subset M_1$. Кроме того M_0 не содержит иррациональные числа “ограниченного типа”.

Меру Лебега на окружности S^1 обозначим через μ, а меру Лебега на торе $S^1 \times S^1$ обозначим через ν. Для иррациональных чисел ρ алгебраического типа, т.е. с периодическим разложением в непрерывную дробь $\rho = [k_1, k_2, ..., k_s, k_1, k_2, ..., k_s, ...]$ введем следующие обозначения:

$$\bar{\rho} := \sqrt[s]{\rho_1 \rho_2 ... \rho_s},$$

$$\rho_j^{-1} := [k_j, k_{j-1}, ..., k_1, k_s, k_{s-1}, ..., k_1, k_s, k_{s-1}, ..., k_1, ...], \quad j = \overline{1, s}.$$

Теорема 11

Пусть $\theta \in (0,1)$ иррациональное число типа 1, а ρ - иррациональное число алгебраического типа, т.е. $\rho = [k_1, k_2, ..., k_s, k_1, k_2, ..., k_s, ...]$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \tilde{E}_n^{\theta,\rho}(x, y)}{n} = \ln \bar{\rho}, \quad \textit{п.в. по мере } \nu. \tag{5}$$

Центральная предельная теорема для стохастических возмущений отображений окружности с изломом

Одной из центральных задач теории динамических систем является описание типичного поведения орбит по мере того, как время стремится к бесконечности, и как это поведение меняется при малых возмущениях системы. Мы изучаем стохастические возмущения отображений окружности с одной точкой излома, используя в качестве основного инструмента термодинамический формализм.
Я.Г. Синай впервые построил термодинамической формализм для диффеморфизмов Аносова, обобщенный позже в работах Д. Рюэля, Р. Боуэна и для других системам. Э. Вул, Я.Г. Синай и К. Ханин, построили термодинамической формализм для отображения Фейгенбаума, которое является основным обьектом в теории универсальности Фейгенбаума.

Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, гомеоморфизм окружности с одной точкой излома x_b, в которой $T'(x)$ имеет разрыв первого рода и обе односторонние производные в точке x_b строго положительные, и с иррациональным числом вращения ρ_T. Предположим, что разложение числа вращения ρ_T в непрерывную дробь, начиная с некоторого номера, совпадает с золотым сечением т.е.

$$\rho_T = [k_1, k_2, .., k_m, 1, 1, ...], \ \ m \geq 1.$$

Рассмотрим стохастическую последовательность

$$\overline{x}_{n+1} = T(\overline{x}_n) + \sigma\xi_{n+1}, \overline{x}_0 := x_0,$$

где $\{\xi_n, \ n = 1, 2, ...\}$ - последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин, со средним 0, а $\sigma > 0$ - это небольшой параметр, называемый уровнем шума, который контролирует размер шума. Для шумов, удовлетворяющих некоторым слабым условиям на случайную последовательность $\{\xi_n, \ n = 1, 2, ...\}$, мы покажем, что нормированная случайная последовательность сходится к гауссовской с.в..

В работе Вуд, Синая и Ханина [6] разработан подход строгого термодинамического формализма для критических отображений с удвоением периода. Среди многих других результатов эти авторы исследовали влияние шума орбиты точек. Ими показано, что для систем со слабым шумом существует стационарная мера, зависящая от величины шума, которая сходится для исчезающего шума к инвариантной мере аттрактора.

О. Диас-Эспиноза и Р. де Лаяве изучали в работе [7] стохастические возмущения нескольких систем, используя технику ренормгруппы. Среди прочего, они доказали центральную предельную теорему для критических отображений окружности с числом вращения ровным золотому сечению и при некоторых мягких условий на стохастический шум.

---

[6] Вул Е.Б., Синай Я.Г., Ханин К.М. Универсальность Фейгенбаума и термодинамический формализм// Успехи математических наук. -1984. т.39. - №3. -С. 3-37.

[7] Diaz-Espinosa O., de la Llave R., “Renormalization and central limit theorem for critical dynamical systems with weak external noise”, J. Mod. Dyn., 1:3 (2007), 477–543.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов нашей работы, напомним более подробная информация о двух основных результатах О. Диас-Эспиноза и Р. де Лаяве в [7].
Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ вероятностное пространство и $T : S^1 \to S^1$, сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности S^1. Пусть стохастическая последовательность определяется соотношениями

$$\overline{x}_{n+1} = T(\overline{x}_n) + \sigma_n \xi_{n+1}, \ \overline{x}_0 := x \in S^1 \tag{6}$$

где (ξ_n) независимые случайные величины с $p > 2-$конечными моментами, удовлетворяющими следующим условиям:

$$E\xi_n = 0; \tag{7}$$

$$const \le (E|\xi_n|^2)^{1/2} \le (E|\xi_n|^p)^{1/p} \le Const. \tag{8}$$

Линеаризованный эффективный шум определяется как

$$L_n(x) = \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \prod_{j=k}^{n-1} T'(x_j), \ x \in S^1. \tag{9}$$

Теперь определим другую стохастическую последовательность $\omega_n(x, \sigma_n)$ по формуле

$$\omega(x, \sigma_n) = \frac{\bar{x}_n - x_n}{\sigma_n \sqrt{\mathrm{var}(L_n(x))}}. \tag{10}$$

Для произвольной точки $z_0 \in S^1 \setminus \{T^i(x_b),\ i = 0, -1, -2, ...\}$ и натуральных чисел $s \geq 0$, $n \geq 1$, определим **функции Ляпунова:**

$$\Lambda_s(z_0, n) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \prod_{j=k}^{n-1} \left| T'(z_j) \right|^s \tag{11}$$

$$\hat{\Lambda}(z_0, n) = \max_{0 \leq i \leq n-1} \sum_{k=0}^{i} \prod_{j=k}^{i} \left| T'(z_j) \right| \tag{12}$$

Используя подход ренормгруппы, О. Диас-Эспиноза и Р. де ла Лаяве установили (см. [7]), достаточное условие для выполнения ЦПТ для последовательности случайных величин $\omega_n(x, \sigma_n)$, определяемых некоторыми одномерными отображениями.

Теорема 12 (см. [7])

Пусть $T : M \to M$ *есть* C^2 *— отображение для* $M = R^1$, $I = [-1,1]$ *или* S^1, *и* $\{\xi_n,\ n = 1, 2, ...\}$ *независимые случайные величины с* $p > 2-$*конечными моментами. Предположим, что для некоторой точки* $x \in M$ *существует возрастающая последовательность натуральных чисел* n_k, *таких, что*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Lambda_p(x, n_k)}{(\Lambda_2(x, n_k))^{p/2}} = 0. \tag{13}$$

Пусть σ_k- *последовательность положительных чисел. Предположим далее, что любое из следующих двух условий выполняется*

- [H1] *шум* (ξ_n) *удовлетворяет условиям (7) и (8) при некотором* $p > 2$, *и последовательность* σ_k *удовлетворяет*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sup\limits_{x\in S^1} |T''(x)| \| \max\limits_{1\le j\le n_k} \xi_j\|_p^2 (\hat{\Lambda}(x, n_k))^6 \sigma_k}{\sqrt{\Lambda_2(x, n_k)}} = 0; \tag{14}$$

• $[H2]$ шум (ξ_n) удовлетворяет условиям (7) и (8) при некотором $p > 4$, и последовательность σ_k удовлетворяет

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sup_{x\in S^1} |T''(x)| \| \max_{1\leq j\leq n_k} \xi_j\|_p^2 (\hat{\Lambda}(x, n_k))^3 \sigma_k}{\sqrt{\Lambda_2(x, n_k)}} = 0. \tag{15}$$

Тогда существует последовательность событий $B_k \in \mathcal{F}$ такая, что

- M1. $\lim_{k\to\infty} P(B_k) = 1$,
- M2. следующие две стохастические последовательности

$$\omega_{n_k}(x, \sigma_{n_k}) = \frac{\bar{x}_{n_k} - x_{n_k}}{\sigma_{n_k}\sqrt{\mathrm{var}(L_{n_k}(x))}}. \tag{16}$$

$$\tilde{\omega}_{n_k}(x, \sigma_{n_k}) = \frac{(\bar{x}_{n_k} - x_{n_k})\mathbf{1}_{B_k}}{\sqrt{\mathrm{var}((\bar{x}_{n_k} - x_{n_k})\mathbf{1}_{B_k})}}. \tag{17}$$

сходятся по распределению к стандартному распределению Гаусса $N(0,1)$ при $k \to \infty$.

Если к тому же последовательность ξ_n поддерживается на компакте, то мы можем выбрать $B_k = \Omega$ для всех k. В этой теореме для скорости сходимости к гауссовскому, эти авторы получили следующий результат, где $\Phi(z)-$ распределение стандартного гауссовского распределения на вещественной прямой:

Теорема 13 (см. [7])

Пусть T, ξ_n определяются как в Теореме 12 и пусть $s = \min(p, 3)$. Предположим, что условие (13) выполняется при некотором $x \in M$. Если σ_k- последовательность положительных чисел такая, что

$$\frac{(\hat{\Lambda}(x, n_k))^3}{\sqrt{var(L_{n_k}(x))}} \sup_{x \in S^1} |T''(x)| \| \max_{1 \leq j \leq n_k} \xi_j \|_s^2 \sigma_k \leq \left(\frac{\Lambda_s(x, n_k)}{(\Lambda_s(x, n_k))^{s/2}} \right)^2, \quad (18)$$

тогда мы имеем

$$\sup_{z \in R} |P(\omega_{n_k}(x, \sigma_k) \mathbf{1}_{B_k} \leq z) - \Phi(z)| \leq A \frac{\Lambda_s(x, n_k)}{(\Lambda_s(x, n_k))^{s/2}}, \quad (19)$$

где константа $A > 0$ зависит только от x.

Теперь сформулируем наш результат полученный в совместно с А. Алиевым.

Теорема 14

Пусть $T \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_b\})$, $\varepsilon > 0$, *гомеоморфизм окружности с одной точкой излома* x_b, $T'(x) \geq Const > 0$, $x \in [x_b, x_b + 1]$ *и с числом вращения* $\rho_T = [k_1, k_2, .., k_m, 1, 1, ...]$, $m \geq 1$. *Рассмотрим последовательность независимых случайных величин* (ξ_n) *с конечными* $p > 2$ *моментами, удовлетворяющие условиям (7) и (8) для некоторой точки* $x \in S^1 \setminus \{T^i(x_b), \; i = 0, -1, -2, ...\}$.
Тогда

- *существует константа* $\gamma > 0$ *такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n n^{\gamma} = 0,$$

  и стохастическая последовательность $\omega_{q_n}(x, \sigma_{q_n})$, *определенная по (16), сходится по распределению к стандартному распределению Гаусса* $N(0,1)$ *при* $k \to \infty$.

- кроме того, существуют константы $\tau > 0$ и $\kappa > 0$, зависящие от p, и константа $C_1 > 0$, такие, что если $\sigma_n \leq C_1 n^{-\tau}$, то

$$\sup_{z \in \mathcal{R}} \left| P(\omega_{q_n}(x, \sigma_{q_n}) \leq z) - \Phi(z) \right| \leq C q_n^{-\kappa},$$

где q_n—время первого возвращения для T, константа $C > 0$ зависит только от x, и $\Phi(z)$— распределение стандартного гауссовского распределения на вещественной прямой.

Спасибо за внимание!