

О плотнейшей упаковке шаров в размерности 8

Весна 2021 Лекция 11

лекция 11.

Далее мы определим

$$f_+(x) = \sinh^2 \frac{\pi r^2}{2} \int_0^{+\infty} \underbrace{(-t^2 g_+(it) + it g_1(it) + g_2(it))}_{\varphi_{++}(it)} e^{-\pi t |x|^2} dt$$

$$r = |x|, \quad x \in \mathbb{R}^8$$

$$\text{где } g_+(z) = \frac{\pi}{2160} \frac{(E_6 - E_2 E_4)^2}{\Delta}, \quad \underline{g_+(\infty) = 0}.$$

$$g_1(z) = \frac{i}{180} \frac{(E_4 E_6 - E_4^2 E_2)}{\Delta}$$

$$g_2(z) = -\frac{1}{60\pi} \frac{E_4^2}{\Delta}.$$

$g_+(z)$ — инвариант на H ор-на, 1-пермодулярная.

$$\underbrace{g_+(-\frac{1}{z})}_{\varphi_{++}(z)} z^2 = \frac{\pi}{2160} z^2 \frac{(E_2 E_4 - E_6)^2}{\Delta} + \frac{iz}{180} \frac{E_4 E_6 - E_4^2 E_2}{\Delta} - \frac{1}{60\pi} \frac{E_4^2}{\Delta}$$

Опр.:
$$a(x) = -\frac{1}{4i} \left(\int_{-1}^i \varphi_+(z+1) e^{\pi i |x|^2 z} dz + \right.$$

$$+ \int_i^1 \varphi_+(z-1) e^{\pi i |x|^2 z} dz - 2 \int_0^i \varphi_+(z) e^{i\pi |x|^2 z} dz +$$

$$\left. + 2 \int_i^{+\infty} g_+(z) e^{i\pi |x|^2 z} dz \right)$$

Мы покажем, что

Умб: $a(x)$ — из класса Умбрыса и упр.-ем
 $\hat{a}(x) = a(x).$

Докажем теперь, что $a(x) = f_+(x).$

Умб.:

если $z > \sqrt{2}$

$$a(z) = \sin^2 \frac{\pi z^2}{2} \int_0^{+\infty} \psi_+(it) e^{-\pi z^2 t} dt \quad (= f_+(z)).$$

до-во:

$$\begin{aligned} \psi_+(z) &= z^2 g_+(z) + z g_1(z) + g_2(z) = \\ &= z^2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_+(n) q^n + z \sum_{n=0}^{\infty} c_1(n) q^n + \sum_{n=-1}^{+\infty} c_2(n) q^n, \quad q = e^{2\pi i z} \end{aligned}$$

$$\psi_+(it) \ll \begin{cases} e & , t \rightarrow +\infty \\ t^2 e^{-2\pi/t} & , t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$\int$ - и cx - cx абс.-но, если $z > \sqrt{2}$. Кроме того, интеграл определяет голом.-ую по z ф-ию в некот.-ой окр-ти веш.-ой прямой.

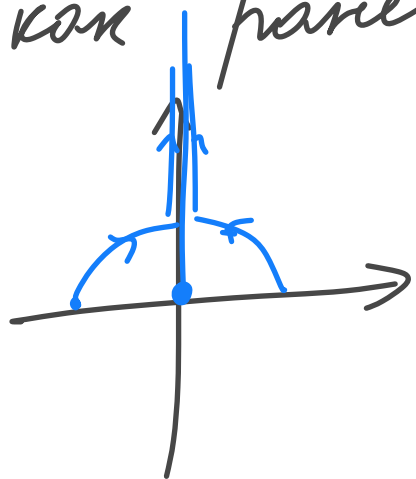
$$\sin^2 \frac{\pi z^2}{2} = -\frac{1}{4} (e^{i\pi z^2} + e^{-i\pi z^2} - 2)$$

$$f_+(z) = -i \sin^2 \frac{\pi z^2}{2} \int_0^{i\infty} \psi_+(z) e^{i\pi z^2 z} dz$$

$$-4i f_+(z) = -2 \int_0^{i\infty} \psi_+(z) e^{i\pi z^2 z} dz + \int_1^{1+i\infty} \psi_+(z-1) e^{i\pi z^2 z} dz +$$

$$+ \int_{-1}^{-1+i\infty} \psi_+(z+1) e^{i\pi z^2 z} dz.$$

Хотим, как и раньше, перенести контур f_+ из
как ранее:



$$\psi_+(z) = \frac{\pi}{2160} z^2 \frac{(E_2 E_4 - E_6)^2}{\Delta} + \frac{iz}{180} \frac{E_4 E_6 - E_4^2 E_2}{\Delta} -$$

$$- \frac{1}{60\pi} \frac{E_4^2}{\Delta}.$$

ψ_+ — голол на $\mathbb{H}$, подынтегр. — ае

ф-ия быстро убывает, когда $(\text{Im } z) \rightarrow +\infty \Rightarrow$

можно перенести контур.

$$-4i f_+(z) = \int_0^{i\infty} (\psi_+(z+1) + \psi_+(z-1) - 2\psi_+(z)) e^{i\pi z^2 z} dz -$$

$$- 2 \int_0^i \psi_+(z) \dots dz + \int_{-1}^i \psi_+(z+1) \dots dz + \int_1^i \psi_+(z-1) \dots dz = -4i a_+(z)$$

Проверим поведение $a(z)$ при $z=0$, или $z=\sqrt{2}$.

ymb.:
$$a(z) = \sin^2 \frac{\pi z^2}{2} \left[\left(\frac{4}{\pi^2 z^2} - \frac{42}{5\pi^2 z^2} - \frac{1}{60\pi^2(z^2-2)} \right) + \int_0^{+\infty} \left(\psi_+(it) - 4t - \frac{42}{5\pi} + \frac{e^{2\pi t}}{60\pi} \right) e^{-\pi z^2 t} dt \right], \quad z \geq 0.$$

Д-во:

$$\psi_+(it) = -\frac{e^{2\pi t}}{60\pi} - \frac{42}{5\pi} + 4t + O(t^2 e^{-2\pi t}), \quad t \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ $\int_0^{+\infty}$ в ymb-м ψ_+ -е при $z > 0$ (и game определена ψ_+ -е ψ_+ -е в ψ_+ -м $(0; +\infty)$).

При $z > \sqrt{2}$

$$\int_0^{+\infty} \left(4t + \frac{42}{5\pi} - \frac{e^{2\pi t}}{60\pi} \right) e^{-\pi z^2 t} dt = \frac{4}{\pi^2 z^2} - \frac{42}{5\pi^2 z^2} - \frac{1}{60\pi^2(z^2-2)}$$

$a(z)$ — не ψ_+ -е — ψ_+ -е в ψ_+ -м $(0; +\infty)$.

$\Rightarrow$ ymb.-е ψ_+ -е.

Сл-ве: $a(0)=1, a(\sqrt{2})=0, a'(\sqrt{2}) \neq 0,$
 $a(\sqrt{2}n)=0, n \geq 2.$

$$a(x) = 1 - \frac{21}{10} x^2 + O(x^4).$$

Д-во:

разложить $\sin^2$ в ряд Тейлора.

Аналогично исследуется $f_-(x)$.

$$\varphi_- = -\frac{1}{120\pi} \left(\frac{5\theta_0^8 \theta_1^{12} - 5\theta_0^4 \theta_1^{16} + 2\theta_1^{20}}{\Delta} \right).$$

$$\varphi_-(z) - \varphi_-(z-1) = \underbrace{\varphi_-\left(-\frac{1}{z}\right)}_{\parallel} z^2, \quad g_-(z+1) = -g_-(z).$$

$$\varphi_-(z+1) = \varphi_-(z-1) = -\frac{1}{60\pi} q^{-1} - \frac{12}{5\pi} - \frac{256}{3\pi} q^{1/2} - \dots$$

- Утв:**
- а) коэф-ты ряда по $q^{1/2}$ для $\varphi_-(z+1)$ неположительны;
 - б) коэф-ты для $g_-(z)$ по $q^{1/2}$ неотрицательны; ($=0$, если степень q - чётная);
 - в) коэф-ты при $q^{k/2}$ (k - нечётное) для $g_-(z)$ и $\varphi_-(z+1)$ нах.-ся в отношении $2:-1$

D-60:

б) следует из $\varphi_-(z) - \varphi_-(z-1) = g_-(z)$.

а) коэф-ты $\frac{1}{\Delta}$ — неотриц. —ые.

$$5\theta_0^8 \theta_1^{12} - 5\theta_0^4 \theta_1^{16} + 2\theta_1^{20} = \frac{2\theta(t) + \theta(t+1)}{3}, \text{ где}$$

$\theta(t)$ — масса-ряд разбиения Dual Extremal $(20, 2)$ а
(см. Catalogue of Lattices, Gabriele Nebe)
(проверить проб-во первых 6 коэф-ов ряда по $q^{1/2}$).

в) следует из а) и б).

Ymb.:

$$\forall n \geq 6, \quad n \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$|c_{\varphi_-}(n)| \leq \frac{e^{4\pi\sqrt{n}}}{30\pi}$$

$$\left. \begin{aligned} |c_{\varphi_-(z+1)}(n)| &\leq \dots \\ |c_{g_-(z)}(n)| &\leq \dots \end{aligned} \right\} \text{аналогично.}$$

Cr-ue:

$$|g_-(z)| \ll e^{-\pi \operatorname{Im} z}, \quad \operatorname{Im} z \geq t_0 > 0.$$

$\downarrow$
привлеч.

Onp:

$$b(x) = -\frac{1}{4i} \int_{-1}^i \varphi_-(z+1) e^{-\pi i z^2} dz + \int_1^i \varphi_-(z-1) \dots dz +$$

$$- 2 \int_0^i \varphi_-(z) \dots dz - 2 \int_i^\infty g_-(z) \dots dz$$

Ymb.:

$$b(x) \text{ из массы Мбарнса, } \tilde{b}(x) = -b(x).$$

Ymb.:

$$x > \sqrt{2} \quad b(x) = \sin^2 \frac{\pi x^2}{2} \int_0^\infty \varphi_-(it) e^{-\pi t x^2} dt$$

Ymb.:

$$x \geq 0 \quad b(x) = \sin^2 \frac{\pi x^2}{2} \left[-\frac{12}{5\pi^2 x^2} - \frac{1}{60\pi^2(x^2-2)} + \int_0^{+\infty} (\varphi_-(it) + \right.$$

$$\left. + \frac{12}{5\pi} + \frac{e^{2\pi t}}{60\pi}) e^{-\pi x^2 t} dt \right]$$

Сл-ие:

$$b(0) = 0, \quad b(\sqrt{2}) = 0, \quad b'(\sqrt{2}) \neq 0.$$

$$b(z) = 0 \quad \forall \quad z = \sqrt{2}i^n, \quad n \geq 2.$$

$$b(z) = -\frac{3}{5}z^2 + O(z^4).$$

Теорема:

$$f(x) = a(x) + b(x). \quad \text{Тогда}$$

$$f(x) = 0 \quad \forall \quad x \in E_8 u$$

$$1) \quad |x| > \sqrt{2} \Rightarrow f(x) \leq 0$$

$$2) \quad \hat{f}(x) \geq 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^8$$

$$3) \quad f(0) = \hat{f}(0) = 1.$$

Проверим, что нет других нулей, и что
верны 1) и 2) (3) уже г-ли).

ymb.-ue:

$$A(t) = \varphi_+(it) + \varphi_-(it). \text{ Тогда}$$

$$A(t) < 0 \quad \forall \quad t \in (0; +\infty).$$

Ci-ue:

$$1) \quad |x| > \sqrt{2} \Rightarrow f(x) \leq 0.$$

D-ko ymb.-ue:

$$A(t) = -t^2 g_+\left(\frac{i}{t}\right) - t^2 g_-\left(\frac{i}{t}\right) = \quad (1)$$

$$= -t^2 g_+(it) + it g_1(it) + g_2(it) + \varphi_-(it) \quad (2)$$

(1) - глѣм разложение через $e^{-\pi/t}$

(2) через $e^{-\pi t}$

$$A(t) = A_0^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n/t}), \quad t \rightarrow 0$$

$$A(t) = A_\infty^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi n t}), \quad t \rightarrow +\infty$$

$n=6$ гост.-но, чтобы свойства по модулю были меньше, чем м.-ый член.

$$A_0^{(6)} = t^2 \left(-\frac{512}{3\pi} e^{-\pi/t} - 240\pi e^{-2\pi/t} - \frac{104448}{5\pi} e^{-3\pi/t} - 14400 e^{-4\pi/t} - \frac{4027352}{5\pi} e^{-5\pi/t} \right)$$

$$A_\infty^{(6)} = -\frac{1}{30\pi} e^{2\pi t} - \frac{54}{5\pi} + \dots$$

$$A_0^{(6)}, A_\infty^{(6)} < 0$$

$$R_0^{(n)} = A(t) - A_0^{(n)}(t)$$

$$R_\infty^{(n)} = A(t) - A_\infty^{(n)}(t)$$

Используя равенства на коэф-ты $c_+(n)$, $c_-(n)$, ...

можно показать, что

$$|R_0^{(6)}| < |A_0^{(6)}| \quad \forall t \in (0; 1]$$

$$|R_\infty^{(6)}| < |A_\infty^{(6)}| \quad \forall t \in [1; +\infty).$$

$$\Rightarrow A(t) < 0 \quad \forall t \in (0; +\infty).$$

Зам. $B(t) = \varphi_+(it) - \varphi_-(it) > 0 \quad \forall t > 0.$

($\Rightarrow$ н. 2) th.).

D-бс:

$$\hat{f}(\tau) = \sin^2 \frac{\pi \tau^2}{2} \int_0^{+\infty} B(t) e^{-\pi \tau^2 t} dt, \quad \tau > \sqrt{2}.$$

q^{-1} слагаемых у φ_+ и φ_- уничтожаются, т.е.

интеграл сд-се абс-но при $\tau > 0$.

$$B(t) = -t^2 g_+ \left(\frac{i}{t} \right) + t^2 g_- \left(\frac{i}{t} \right) =$$

$$= -t^2 g_+(it) + it g_1(it) + g_2(it) - \varphi_-(it).$$

$$B(t) = B_0^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi h/t}), \quad t \rightarrow +0$$

$$B(t) = B_\infty^{(n)}(t) + O(t^2 e^{-\pi h t}), \quad t \rightarrow +\infty$$

$n=6$ достаточно, чтобы g -ть убыв-ла.
аналогично предсказывал.

Теорема М. Вязовской доказана.