

Лекция 9.

В произвольной функции g -м:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} e^{-\pi x(n^2+t^2)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n x^{-1} - \pi x t^2} dx +$$

$$+ \underbrace{\sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=0}^{k_\nu} c_{\mu,\nu} t^{s_\nu-2} (\ln t)^\mu}_{H(t)}, \quad k_\nu \leq \deg P$$

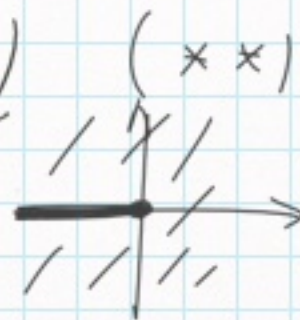
s_ν — натурала, $|\operatorname{Re} s_\nu| \leq c = d+1$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-\pi x(n^2+t^2)} dx = \frac{1}{\pi(n^2+t^2)}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\pi n x^{-1} - \pi x t^2} dx = \frac{e^{-2\pi n t}}{t}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\pi(n^2+t^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \frac{e^{-2\pi n t}}{t} + H(t) \quad (*)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \underbrace{\frac{2t}{n^2+t^2}}_{\parallel \frac{1}{t-in} + \frac{1}{t+in}} = 2\pi \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-2\pi n t}}_{\substack{\text{равно.} \\ \text{при } \operatorname{Re} t > 0.}} + \underbrace{2\pi t H(t)}_{\substack{\text{равно.} \\ \text{при } t \neq \pm in}}$$



$$2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-2\pi n t} - i\text{-непрерывная пот.}$$

Пусть $a_1 = a_2 = \dots = a_D \neq a_{D+1}$.

Берём $t = \varepsilon - i(D+1)$, $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^D a(n) \left(\frac{1}{\varepsilon + i(n-D-1)} + \frac{1}{\varepsilon - i(n+D+1)} \right) + a(D+1) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon - 2i(D+1)} \right) + \\ & + \sum_{n=D+2}^{+\infty} a(n) \left(\frac{1}{\varepsilon + i(n-D+1)} + \frac{1}{\varepsilon - i(n+D+1)} \right) - 2\pi(\varepsilon - i(D+1)) H(\varepsilon - i(D+1)) = \\ & = 2\pi \sum_{n=1}^{+\infty} b_n e^{-2\pi n \varepsilon} := B(\varepsilon) \end{aligned}$$

Заменяем $t \rightarrow t + i$.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{D-1} a(n) \left(\frac{1}{\varepsilon + i(n-D)} + \frac{1}{\varepsilon - i(n+D+2)} \right) + a(D) \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon - 2i(D+1)} \right) + \\ & + \sum_{n=D+1}^{+\infty} a(n) \left(\frac{1}{\varepsilon + i(n-D)} + \frac{1}{\varepsilon - i(n+D+2)} \right) - 2\pi(\varepsilon - iD) H(\varepsilon - iD) = B(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{a(D+1) - a(D)}{\varepsilon} &= - \frac{a(1)}{a(D)} \left(\frac{1}{\varepsilon - iD} + \frac{1}{\varepsilon - i(D+2)} \right) + \\ & + 2\pi(\varepsilon - i(D+1)) H(\varepsilon - i(D+1)) - 2\pi(\varepsilon - iD) H(\varepsilon - iD) = C(D, \varepsilon) \\ & \quad \downarrow \varepsilon \rightarrow 0 \\ & C(D, 0) \neq \infty \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a(D+1) = a(D).$$

Теорема доказана по методу использования принципа Гурвица-Линдшёда.

Теорема (принцип Грассмана - Лунге-Якоби):

$s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$, $f(s)$ - норм.

при $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$. При этом

$|f(s)| \leq C$ при $e^{c|t|}$ $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$ и в породе

$|f(s)| \leq A e^{c|t|}$, $0 < c < \frac{\pi}{\sigma_2 - \sigma_1}$. Тогда

$|f(s)| \leq C$ во всей породе.

До-во:

Будем считать, что $\sigma_1 = -\frac{\pi}{2}$, $\sigma_2 = \frac{\pi}{2}$, $0 < c < 1$
т.е. $|f(s)| \leq A e^{c|t|}$.

(замена $\tilde{s} = \frac{\pi}{\sigma_2 - \sigma_1} (s - \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2))$).

Рассм.-им

$$\begin{aligned} g(s) &= f(s) e^{-\varepsilon \cos b s} \\ |g(s)| &= |f(s)| e^{-\varepsilon \operatorname{Re} \cos b s} = |f(s)| e^{-\varepsilon \operatorname{Re} \left(\frac{e^{ibs} + e^{-ibs}}{2} \right)} = \\ &= |f(s)| e^{-\varepsilon \left(\frac{e^{-bt} \cos b \sigma + e^{bt} \cos b \sigma}{2} \right)} \leq |f(s)| e^{-\varepsilon \left(\cos b \frac{\pi}{2} \right) \cdot \frac{e^{b|t|}}{2}} \leq A e^{c|t|} e^{-\frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{b\pi}{2} e^{b|t|}} \leq C \text{ при } |t| \geq T_0 \end{aligned}$$

На границе прям.-ка $|\sigma| \leq \frac{\pi}{2}$, $|t| \leq T_0 \Rightarrow |g(s)| \leq C \Rightarrow$
во всей прям.-ке $|g(s)| \leq C \Rightarrow |g(s)| \leq C$ в породе.
 $|f(s)| = |g(s)| e^{\varepsilon \operatorname{Re} \cos b s} \leq C e^{\varepsilon \cos b \sigma - \operatorname{ch}(bt)}$

Переходим к $\lim$ при $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow |f(s)| \leq C$.

Теорема Сельберга о нулях на критической прямой $\zeta(s)$.

$$N(T) = \sum_{\substack{\rho = \beta + i\gamma \\ 0 < \gamma \leq T \\ \zeta(\rho) = 0}} 1 = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T).$$

$$N_0(T) = \sum_{\substack{\rho = \frac{1}{2} + i\gamma \\ 0 < \gamma \leq T}} 1$$

Теорема (1942, А. Сельберг): $N_0(T) \gg T \ln T$, $T \geq T_0$.

1914 г., Г. Харди: $\zeta(s)$ имеет беск. много нулей на $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

1921 г., Г. Харди - Д. Литтлвуд: $N_0(T) \gg T$, $T \geq T_0$.

1930-41 гг.: А. Сельберг: $\frac{N_0(T)}{T} \rightarrow +\infty$, $T \rightarrow +\infty$

$$N_0(T) \gg T \ln \ln T.$$

Угел g-ва:

$$\xi_0(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \xi_0(1-s) \Rightarrow$$

$\xi_0\left(\frac{1}{2} + it\right)$ — вещ.-ая при вещ.-ых t .

Пусть $f(t)$ — вещ.-ая непрерыв.-ая ф-ия при $t \in \mathbb{R}$.

$$I(t, h) := \left| \int_t^{t+h} f(u) du \right|$$

$$J(t, h) := \int_t^{t+h} |f(u)| du$$

Если $J(t, h) > I(t, h) \Rightarrow f$ меняет знак на $(t, t+h)$.
 ($\Rightarrow$ имеет там нуль нег.-ого порядка).

Пусть мы д-м, что $J > I$ на промежутке
 $E \subset (T, T+H)$ мерой μE .

Тогда $f(t)$ имеет $\gg \mu E \cdot h^{-1}$ нулей на $(T, T+H)$.

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\quad} N_0(T, H) \gg \frac{\mu E}{2h} \\ \downarrow \\ \text{число} \\ \text{перемен знака } f(t) \text{ на } (T, T+H) \end{array}$$

Для $\mathcal{S}(s)$ $\sqrt{T} < H = H(T) \leq T$, и требуется:

$$h = h(T) \asymp \frac{1}{\ln T}, \quad \mu E \gg H. \Rightarrow$$

получим теорему, или даже

$$N_0(T+H) - N_0(T) \gg H \ln T.$$

Пусть мы д-м, что

$$\int_T^{T+H} |I(t, h)|^2 dt \ll H h / \ln T. \quad \text{Тогда}$$

мера $t \in (T, T+H)$: $|I(t, h)| \leq \frac{h}{C}$ оценивается

снизу как $H - \mu \underbrace{\{t \in (T, T+H) : |I| > \frac{h}{C}\}}_{E^*} \geq H \left(1 - \frac{C_0}{h \ln T}\right)$

$$\begin{array}{l} \int_T^{T+H} |I|^2 \ll H (h / \ln T) \\ \underbrace{\mu E^* \cdot \frac{h^2}{C^2}}_{\text{сверху}} \ll H (h / \ln T) \Rightarrow \mu E^* \ll \frac{H}{h \ln T} \end{array}$$

$$|I(t, h)| \leq \frac{h}{C} \text{ на подмн-ве } (T, T+H)$$

$$\text{мера} \geq H \left(1 - \frac{C}{h \ln T}\right) \underset{\text{хотим}}{\gg} H. \quad \left(\Rightarrow h = \frac{A}{\ln T} \right)$$

при большем A
обеспечивает оценку.

Мы оценим

$$|J(t, h)| \gg h \left(1 - |M(t, h)|\right) \Rightarrow \text{из оценки среднего на } |M|$$

$$\Rightarrow |J(t, h)| > \frac{h}{C} \text{ на подмн-ве мера } \gg H.$$

$$\Rightarrow \text{получим } J > I \text{ на подмн-ве интервала } (T, T+H) \\ \text{мера } \gg H.$$

Если брать $f(t) = \zeta_0 \left(\frac{1}{2} + it\right)$ (убрав множителем
эксп.-ое убыв-ие $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$) $\Rightarrow$ получим лишь th. Харди-Литтлвуда.

Идея Сельберга: сделать $f(t)$ в среднем константой, т.е.
умножить $f(t)$ на "успокаивающий мн-ль",
кот. не добавляет перемен знака, но
произведение $f(t)$ на "усп.-ий мн-ль" в
среднем уже константа.

Варианты "усн.-их мн.-ей":

$$a) \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{1/2} = \eta(s); \quad \underbrace{\eta(s)\eta(1-s)}_{\text{"усн.-их мн.-ей"}} = 1.$$

$$b) \eta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n^s}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} = s^{-1/2} (s).$$

Из a), b) можно получить мн. $N_0(T) \gg T \ln T$.

$$b) \text{ Сабдери: } \eta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{\lambda(n)}{n^s} \underbrace{P\left(\frac{\ln x/n}{\ln x}\right)}_{\text{интервал}}$$

Перейдем к g-вы th. Сабдери:

$$F(t) = \zeta_0\left(\frac{1}{2} + it\right)$$

$$f(t) = F(t) e^{(\frac{\pi}{4} - \delta)t} \cdot |\eta\left(\frac{1}{2} + it\right)|^2, \text{ где}$$

$$\frac{1}{T} \leq \delta = \delta(T), \quad \eta(s) = \sum_{n \leq X} \frac{b(n)}{n^s}, \quad X = T^\varepsilon, \varepsilon > 0.$$

$$b(n) = \lambda(n) \cdot \lambda(n), \quad \lambda(n) = \begin{cases} 1, & n \leq \sqrt{x} \\ \frac{2 \ln x/n}{\ln x}, & \sqrt{x} \leq n \leq x \\ 0, & n > x \end{cases}$$

$$I(t, h) = \int_0^h f(t+u) du$$

$$J(t, h) = \int_0^h |f(t+u)| du = \int_t^{t+h} |F(u)| \cdot |\eta\left(\frac{1}{2} + iu\right)|^2 e^{(\frac{\pi}{4} - \delta)u} du \geq$$

$$\geq \pi^{-1/2} \cdot C_0 \left| \int_t^{t+h} \zeta\left(\frac{1}{2} + iu\right) \eta^2\left(\frac{1}{2} + iu\right) du \right| \geq \text{пер-во тригонометрич}$$

$$\geq \pi^{-1/2} C_0 \left(h - \underbrace{\left| \int_t^{t+h} (\zeta \eta^2\left(\frac{1}{2} + iu\right) - 1) du \right|}_{:= M(t, h)} \right)$$

$$M(t, h) = \left| \int_t^{t+h} (\zeta \eta^2 | \frac{1}{2} + iu) - 1) du \right|$$

Ymb.: rycm6 $F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \zeta_0(\frac{1}{2} + it) |\eta^2(\frac{1}{2} + it)| e^{(\frac{\pi}{4} - \delta)t}$

$$\hat{F}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-ity} dt. \text{ Тогда}$$

$$\hat{F}(y) = 2z^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta(\partial_1) \beta(\partial_2)}{\partial_2} \exp\left(-\frac{\pi h^2 \partial_1^2}{\partial_2^2 z^2}\right) - z^{\frac{1}{2}} \eta(1) \eta(0), \text{ где}$$

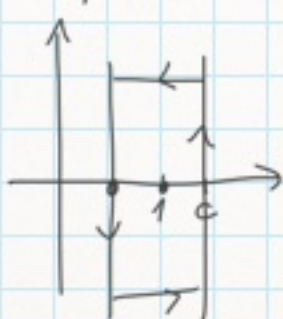
$$z = e^{-y - i(\frac{\pi}{4} - \delta)}.$$

D-60:

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{c-i\infty \\ (c>1)}}^{c+i\infty} \zeta_0(s) \eta(s) \eta(1-s) z^{s-\frac{1}{2}} ds =$$

$$= z^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\partial_1, \partial_2 \leq X} \frac{\beta(\partial_1) \beta(\partial_2)}{\partial_2} \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{\pi} h \partial_1}{\partial_2 z}\right)^{-s} ds}_{2 \exp\left(-\frac{\pi h^2 \partial_1^2}{\partial_2^2 z^2}\right)}$$

Перенесём прямо интегрирование на $\text{Res}_{s=1}$.



$$A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\substack{1+i\infty \\ \frac{1}{2}-i\infty}}^{\frac{1}{2}+i\infty} \dots + \text{Res}_{s=1} \dots$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \zeta_0\left(\frac{1}{2} + it\right) |\eta\left(\frac{1}{2} + it\right)|^2 e^{-ity} e^{(\frac{\pi}{4} - \delta)t} dt}_{\hat{F}(y)}$$

$$\text{Res}_{s=1} \dots = \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \eta(0) \eta(1) z^{\frac{1}{2}} = z^{\frac{1}{2}} \eta(0) \eta(1). \text{ Это } g\text{-ко.}$$

Д/з:

33. Построить оценку снизу на $\Gamma(\frac{1}{2}+it)$ при дост. больших t .

34. Проверить, что можно перенести контур интегрирования в $A(z)$ с прямой $\operatorname{Re} z = c > 1$ на прямую $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$ (т.е., что вклад от интегралов по горизонт.-ым отрезкам $\rightarrow 0$ при $|\operatorname{Im} z| \rightarrow +\infty$).

35. Д-ть, что если $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(t^\varepsilon)$, то $\zeta(\sigma+it) = O(t^\varepsilon)$ при $\sigma \geq \frac{1}{2}$.

36. Д-ть, что если справедлива ЛН (ипотеза Линдлёрфа о том, что $\zeta(\frac{1}{2}+it) = O(t^\varepsilon) \forall \varepsilon > 0$ при $t \geq t_0(\varepsilon)$), то $\forall \sigma > \frac{1}{2}$
 $N(\sigma, T+1) - N(\sigma, T) = o(\ln T)$.

Идея: использовать теорему Пеллеса

$$\ln \frac{z^n}{z_1 \dots z_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(ze^{i\varphi})| d\varphi - \ln |f(0)|$$

где $\zeta(s+2+it)$.

37. Проверить г-во th. Адамара о трёх кругах: если f - целая в кольце $r_1 \leq |z| \leq r_3$, $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$,

то при $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ справедливо нер-во

$$\ln\left(\frac{\tau_3}{\tau_1}\right) \ln M(\tau_2) \leq \ln\left(\frac{\tau_3}{\tau_2}\right) \ln M(\tau_1) + \ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_1}\right) \ln M(\tau_3).$$

(см., например, книги Э. Титмарша, А.А. Карацубы
и др.).