

Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 9.

Теретёнков Александр Евгеньевич

20 апреля 2021 г.

Утверждение. Уравнение Накажимы-Цванцыга:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^t \mathcal{K}_s^t\rho_s ds$$

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}, \quad \mathcal{I}_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\text{Tex}}\left(\lambda \int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Утверждение. (Метод устранения временной свёртки)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}'_t\mathcal{Q}\rho_{t_0}$$

$$\mathcal{K}_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t(I - \Sigma_t)^{-1}\Sigma_t\mathcal{P}, \quad \mathcal{I}'_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t(I - \Sigma_t)^{-1}\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

$$\Sigma_t = \lambda \int_{t_0}^t ds \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} G_t^s, \quad G_t^s = \overrightarrow{\text{Tex}} \left(-\lambda \int_s^t \mathcal{L}_\tau d\tau \right)$$

(Если $(I - \Sigma_t)$ обратим!)

Локальное по времени кинетическое уравнение

Доказательство:

$$\rho_s = G_t^s \rho_t = G_t^s (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \rho_t$$

$$G_t^s = \overrightarrow{\text{Texp}} \left(-\lambda \int_s^t \mathcal{L}_\tau d\tau \right), \quad G_s^s = I$$

$$\mathcal{Q} \rho_t = \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q} \rho_{t_0} + \lambda \int_{t_0}^t ds \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} G_t^s (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \rho_t$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Введём супероператор

$$\Sigma_t = \lambda \int_{t_0}^t ds \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} G_t^s,$$

тогда

$$\mathcal{Q} \rho_t = \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q} \rho_{t_0} + \Sigma_t (\mathcal{P} + \mathcal{Q}) \rho_t$$

$$(I - \Sigma_t) \mathcal{Q} \rho_t = \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q} \rho_{t_0} + \Sigma_t \mathcal{P} \rho_t$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Оператор $(I - \Sigma_t)$ обратим при достаточно малых λ , либо при достаточно малых $t - t_0$.

$$\mathcal{Q}\rho_t = (I - \Sigma_t)^{-1} \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q}\rho_{t_0} + (I - \Sigma_t)^{-1} \Sigma_t \mathcal{P}\rho_t$$

Подставляя в уравнение

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}\rho_t = \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\rho_t$$

имеем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}\rho_t = \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t (I - \Sigma_t)^{-1} \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q}\rho_{t_0} + \lambda \mathcal{P}\mathcal{L}_t (I - \Sigma_t)^{-1} \Sigma_t \mathcal{P}\rho_t$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Обозначая

$$\mathcal{K}_t = \lambda \mathcal{P} \mathcal{L}_t (I - \Sigma_t)^{-1} \Sigma_t \mathcal{P}, \quad \mathcal{I}'_t = \lambda \mathcal{P} \mathcal{L}_t (I - \Sigma_t)^{-1} \mathcal{G}_{t_0}^t \mathcal{Q},$$

получаем

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P} \rho_t = \mathcal{K}_t \mathcal{P} \rho_t + \mathcal{I}'_t \mathcal{Q} \rho_{t_0}$$



Локальное по времени кинетическое уравнение

Утверждение. (Chaturvedi, Shibata, 1979)

$$\mathcal{K}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_t^{(n)},$$

$$\mathcal{K}_t^{(1)} = \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_t^{(2)} = \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}$$

$$\mathcal{K}_t^{(3)} = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t^{(4)} = & \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \\ & - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} + \\ & + \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \\ & - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{L}_t \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}) \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Доказательство:

$$(I - \Sigma_t)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \Sigma_t^n$$

$$\mathcal{K}_t = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{P} \mathcal{L}_t \Sigma_t^n \mathcal{P} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_t^{(n)},$$

где $\mathcal{K}_t^{(n)}$ — коэффициенты разложения $\mathcal{K}_t$ по степеням λ .

$$\mathcal{K}_t^{(n)} = \mathcal{P} \mathcal{L}_t \sum_{\substack{k_j \geq 1, \\ \sum_{j=1}^{n-1} k_j = n-1}} \Sigma_t^{(k_1)} \dots \Sigma_t^{(k_{n-1})} \mathcal{P},$$

где $\Sigma_t^{(n)}$ — коэффициенты разложения Σ_t по степеням λ .

Локальное по времени кинетическое уравнение

В частности,

$$\mathcal{K}_t^{(1)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P},$$

$$\mathcal{K}_t^{(2)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\Sigma_t^{(1)}\mathcal{P},$$

$$\mathcal{K}_t^{(3)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\Sigma_t^{(2)} + (\Sigma_t^{(1)})^2)\mathcal{P},$$

$$\mathcal{K}_t^{(4)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\Sigma_t^{(3)} + \Sigma_t^{(2)}\Sigma_t^{(1)} + \Sigma_t^{(1)}\Sigma_t^{(2)} + (\Sigma_t^{(1)})^3)\mathcal{P}.$$

Остаётся только вычислить $\Sigma_t^{(n)}$.

Локальное по времени кинетическое уравнение

При $t \geq s$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_s^t &= \overleftarrow{\text{Texp}} \left(\lambda \int_s^t \mathcal{Q} \mathcal{L}_\tau d\tau \right) = \\ &= 1 + \lambda \int_s^t dt_1 \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} + \lambda^2 \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_s^t dt_1 \dots \int_s^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G_t^s &= \overrightarrow{\text{Texp}} \left(-\lambda \int_s^t \mathcal{L}_\tau d\tau \right) = \\ &= 1 - \lambda \int_s^t dt_1 \mathcal{L}_{t_1} + \lambda^2 \int_s^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n \int_s^t dt_1 \dots \int_{t_{n-1}}^t dt_n \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{L}_{t_n}\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned}\Sigma_t &= \lambda \int_{t_0}^t ds \mathcal{G}_s^t \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} G_t^s = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \sum_{m=0}^n (-1)^{n-m} \int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \dots \int_s^{t_{m-1}} dt_m \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \dots \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_m} \cdot \\ &\quad \cdot \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \int_s^t dt'_1 \dots \int_{t'_{n-m-1}}^t dt'_{n-m} \mathcal{L}_{t'_1} \dots \mathcal{L}_{t'_{n-m}}\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\Sigma_t^{(1)} = \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{(2)} &= \int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} - \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \int_s^t dt'_1 \mathcal{L}_{t'_1} = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} - \int_{t_0}^t dt'_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \mathcal{L}_{t'_1} = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1}) \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned}\Sigma_t^{(3)} = & \int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_s \mathcal{P} - \\ & - \int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_s \mathcal{P} \int_s^t dt_2 \mathcal{L}_{t_2} + \\ & + \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s \mathcal{P} \int_s^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2}\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_s^{t_1} dt_2 = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \int_s^{t_1} dt_2 &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_s^{t_1} dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_s^{t_1} dt_2 + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_{t_1}^t dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_1} ds = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t ds \int_s^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_{t_1}^t dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned}
 \Sigma_t^{(3)} &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} - \\
 &\quad - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} - \\
 &\quad - \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} + \\
 &\quad + \int_{t_0}^t dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{L}_{t_2} = \\
 &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} - \\
 &\quad - \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} + \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_1})
 \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\mathcal{K}_t^{(2)} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\Sigma_t^{(1)}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathcal{L}_t \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \int_{t_0}^t dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$$

$$(\Sigma_t^{(1)})^2 = \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_t^{(3)} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\Sigma_t^{(2)} + (\Sigma_t^{(1)})^2)\mathcal{P} = \\ &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\Sigma_t^{(2)}\mathcal{P} = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t(\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1})\mathcal{P} = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$(\Sigma_t^{(1)})^3 = 0$$

$$\Sigma_t^{(1)} \Sigma_t^{(2)} = \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1}) = 0$$

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{(2)} \Sigma_t^{(1)} &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1}) \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} = \\ &= - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^t ds \mathcal{Q} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q} \mathcal{L}_s \mathcal{P} \end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^t ds &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_2}^{t_1} ds + \\ &+ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_1}^t ds = \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \\ &+ \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_{t_0}^s dt_2 + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_1}^t ds \int_{t_0}^{t_1} dt_2 = \\ &= \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} ds + \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} ds \int_{t_0}^s dt_2 + \int_{t_0}^t ds \int_{t_0}^s dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\begin{aligned} \Sigma_t^{(2)} \Sigma_t^{(1)} = \\ = - \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} + \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} + \\ + \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_t^{(4)} = \mathcal{P} \mathcal{L}_t (\Sigma_t^{(3)} + \Sigma_t^{(2)} \Sigma_t^{(1)} + \Sigma_t^{(1)} \Sigma_t^{(2)} + (\Sigma_t^{(1)})^3) \mathcal{P} = \\ = \mathcal{P} \mathcal{L}_t \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} - \\ - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} + \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{L}_{t_1} - \\ - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2} \mathcal{P} - \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3} \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_2} \mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1} \mathcal{P}) \mathcal{P} \quad \square \end{aligned}$$