Стандартные мономы и торические вырождения для многообразий флагов

И. Махлин, Сколтех/НИУ ВШЭ

Начальные идеалы

- кольцо $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$
- для $w \in \mathbb{R}^N$ введем градуировку $\operatorname{grad} x_i = w_i$, тогда начальная часть $\operatorname{in}_w p$ — однородная компонента p минимальной градуировки
- формулой: для $p = \sum_i c_i \mathrm{x}^{d_i} \in R$:

$$\operatorname{in}_w p = \sum_{i|(w,d_i)=\min_j(w,d_j)} c_i \mathrm{x}^{d_i}$$

- для идеала $I \subset R$ начальный идеал $\operatorname{in}_w I$ — линейная оболочка $\{\operatorname{in}_w p, p \in I\}$
- пример: $\operatorname{in}_{(1,2,3)}\langle x_1^2x_2 + 2x_3^2 - x_1x_3\rangle = \langle x_1^2x_2 - x_1x_3\rangle$
- вырождение Грёбнера: существует плоское семейство над $\mathbb{C}$ (свободная $\mathbb{C}[t]$-алгебра) со слоем R/I вне 0 и слоем $R/\operatorname{in}_w I$ в 0

Идеал Плюккера

- фиксируем $n \geq 2$
- вложение Плюккера для многообразия флагов:

$$F_n \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(\wedge^1 \mathbb{C}^n) \times \ldots \times \mathbb{P}(\wedge^{n-1} \mathbb{C}^n)$$

- $R = \mathbb{C}[\{X_{a_1,\ldots,a_k}\}]$, где $1 \leq k \leq n-1$, $1 \leq a_1 < \cdots < a_k \leq n$, — мултиградуированное однородное координатное кольцо произведения $\mathbb{P}$
- $F_n \subset \mathbb{P}$ задается идеалом $I \subset R$ (*идеал Плюккера*), его мультиоднородное координатное кольцо R/I — *алгебра Плюккера*

Полустандартные таблицы и мономиальный идеал

- таблица Юнга со столбцами $A_i = \begin{smallmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,l_i} \end{smallmatrix}$ (где $l_i \geq l_{i+1}$) полустандартна, если $a_{i,j} < a_{i,j+1}$ и $a_{i,j} \leq a_{i+1,j}$
- **классический факт:** в R/I есть базис из образов мономов $X_{a_{1,1},\dots,a_{1,l_1}} \dots X_{a_{m,1},\dots,a_{m,l_m}}$ таких, что $\begin{smallmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,l_i} \end{smallmatrix}$ образуют ПСТЮ (*стандартные мономы*)
- нестандартные мономы линейно порождают мономиальный идеал I^m
- **общий факт:** если мономиальный идеал $J' \subset R$ является начальным для J, то образы мономов, не входящих в J', образуют базис в R/J
- **наблюдение:** идеал I^m является начальным для I, отсюда следует **классический факт**
- получаем «мономиальное» плоское вырождение многообразия флагов

Алгебры с правилом выпрямления

- коммутативная алгебра S — *алгебра с правилами выпрямления* (algebra with straightening laws, также *алгебра Ходжа*, опр. de Concini–Eisenbud–Procesi) над ЧУМом $(\Omega, <)$ относительно вложения $\varepsilon : \Omega \hookrightarrow S$, если

(ASL-1) произведения $\varepsilon(\omega_1)\dots\varepsilon(\omega_m)$ $(*)$, где $\omega_1 \leq \dots \leq \omega_m$, образуют базис в S

(ASL-2) для несравнимых $\chi_1, \chi_2 \in \Omega$ в разложении $\varepsilon(\chi_1)\varepsilon(\chi_2)$ по базису выше встречаются только произведения $(*)$, в которых $\omega_1 \leq \chi_1, \chi_2$

- разложения в (ASL-2) — *правила выпрямления*, они порождают идеал соотношений $J \subset \mathbb{C}[\{X_\omega, \omega \in \Omega\}]$ в S
- идеал $I^m(\Omega)$, порожденный произведениями $X_{\chi_1}X_{\chi_2}$ с $\chi_1 \not\sim \chi_2$, — начальный для J
- ЧУМ $\mathcal{L}$ из полустандартных столбцов: $A_1 \leq A_2$, если таблица со столбцами A_1, A_2 полустандартна
- R/I — алгебра с правилами выпрямления над $\mathcal{L}$, отсюда следует **наблюдение**

Торическое вырождение

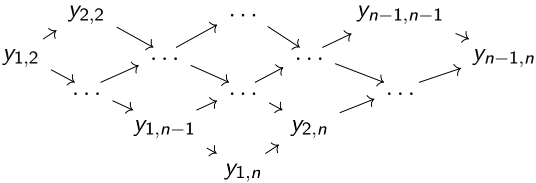
- $\mathcal{L}$ не просто ЧУМ, а дистрибутивная решетка:

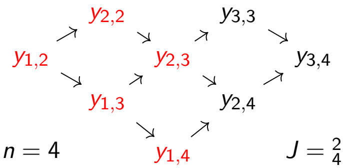
$$\begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{array} \vee \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{array} = \begin{array}{c} \max(a_1,b_1) \\ \vdots \\ \max(a_k,b_k) \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{array} \wedge \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{array} = \begin{array}{c} \min(a_1,b_1) \\ \vdots \\ \min(a_k,b_k) \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_l \end{array}$$

- *идеал Хиби* решетки $\mathcal{L}$: $I^h \subset R$, порожденный элементами $X_A X_B - (X_A \wedge X_B)(X_A \vee X_B)$
- **Теорема (Gonciulea–Lakshmibai, 1996):** идеал I^h — начальный для I.
- **общий факт:** идеал $I^m = I^m(\mathcal{L})$ — начальный для I^h
- получаем торическое вырождение, которое затем вырождается в «мономиальное»

Соответствующий ЧУМ

- для ЧУМа $(P,<)$ обозначим $\mathcal{J}(P,<)$ множество порядковых идеалов (нижних множеств) в $(P,<)$
- $(\mathcal{J}(P,<),\cup,\cap,\subset)$ — дистрибутивная решетка
- **Теорема Биркгофа:** существует единственное с точностью до изоморфизма $(P,<)$ такое, что $\mathcal{J}(P,<)\simeq\mathcal{L}$.
- выберем такое $(P,<)$ и отождествим $\mathcal{J}(P,<)$ с $\mathcal{L}$
- P состоит из $y_{i,j}$ с $i\in[1,n-1]$, $j\in[2,n]$ и $i\le j$, диаграмма Хассе $(P,<)$ выглядит так (слева):





- идеал, отвечающий столбцу $a_1<\cdots<a_k$, содержит $y_{i,j}$, титтк $j\le n-k$ или $j>n-k$ и $i\le a_{n-j+1}-j$, см. пример

Многогранник Гельфанда–Цетлина

- для $M \subset P$ выберем **инъективный** гомоморфизм ЧУМов $\lambda : (M, <) \to ((0,1), >)$
- *отмеченный порядковый многогранник* $O_{M,\lambda}(P,<) \subset \mathbb{R}^P$ состоит из гоморфизмов $(P,<) \to ([0,1], >)$, которые в ограничении на M совпадают с λ (Ardila–Bliem–Salazar)
- для $K \in \mathcal{J}(M,<)$ пусть $\mathcal{J}_K = \{J | J \cap M = K\} \subset \mathcal{J}(P,<)$
- $R = \mathbb{C}[\{X_A, A \in \mathcal{L}\}]$ — мультиоднородное координатное кольцо произведения $\times_{K \in \mathcal{J}(M,<)} \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\mathcal{J}_K})$
- **общий факт:** I^h задает в $\times_{K \in \mathcal{J}(M,<)} \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\mathcal{J}_K})$ торическое многообразие многогранника $O_{M,\lambda}(P,<)$
- если $M = \{y_{i,i}\}$, то $O_{M,\lambda}(P,<)$ — многогранник Гельфанда–Цетлина
- столбцы высоты k в $\mathcal{L}$ — это $\mathcal{J}_K \subset \mathcal{J}(P,<)$ для $K = \{y_{i,i}, i \le k\}$
- Получаем **теорему (Kogan–Miller, 2003):** I^h задает в $\mathbb{P}$ торическое многообразие многогранника ГЦ.

ПБВ-полустандартные таблицы

- таблица Юнга со столбцами $A_i = \begin{matrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,l_i} \end{matrix}$ (где $l_i \geq l_{i+1}$)

  ПБВ-полустандартна, если
  - $a_{i,j} = j$ или $a_{i,j} > l_i$
  - если $a_{i,j_1} > a_{i,j_2} > l_i$, то $j_1 < j_2$
  - если $i > 1$, то найдется $j' \geq j$ с $a_{i-1,j'} \geq a_{i,j}$
- **Теорема (Фейгин 2010):** в R/I есть базис из образов мономов $X_{a_{1,1},\ldots,a_{1,l_1}} \ldots X_{a_{m,1},\ldots,a_{m,l_m}}$ таких, что $\begin{matrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,l_i} \end{matrix}$ образуют ПБВ-ПСТЮ.
- ЧУМ $\mathcal{M}$ из ПБВ-полустандартных столбцов: $A_1 \leq A_2$, если таблица со столбцами A_1, A_2 ПБВ-полустандартна
- идеал $I^m(\mathcal{M})$ начальный для I (из этого следует теорема Фейгина)
- R/I — алгебра с правилами выпрямления над $\mathcal{M}$

Изоморфизм решеток

- **факт:** $\mathcal{M}$ и $\mathcal{L}$ изоморфны!
- чтобы это увидеть отождествим $\mathcal{M}$ с $\mathcal{J}(P,<)$
- ПБВ-полустандартному столбцу $A = \begin{matrix} a_1 \\ \vdots \\ a_l \end{matrix}$ сопоставим порядковый идеал, порожденный всеми y_{i,a_i} и $y_{l,l}$, пример:

$$\begin{tikzcd}
 & y_{2,2} \arrow[dr] & & y_{3,3} \arrow[dr] & \\
y_{1,2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & y_{2,3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & y_{3,4} \\
 & y_{1,3} \arrow[ur] \arrow[dr] & & y_{2,4} \arrow[ur] & \\
 & & y_{1,4} \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$n = 4$ $\qquad$ $A = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$

- $A \leq B$ в $\mathcal{M}$ титтк $J_B \subset J_A$
- по самодвойственности ЧУМа $(P,<)$ и решетки $\mathcal{L}$ получаем изоморфизм

Торическое вырождение ФФЛВ

- выберем M и λ как раньше
- *отмеченный цепной многогранник* $C_{M,\lambda}(P,<)$ состоит из $x \in \mathbb{R}^P$, которые совпадают с λ на M, все $x(p) \geq 0$ и для любой цепи $p_1 < \cdots < p_m$ выполнено $\sum x(p_i) \leq \lambda_+(p_1) - \lambda_-(p_m)$, где $\lambda_+(p) = \lambda_-(p) = \lambda(p)$ для $p \in M$ и $\lambda_+(p) = 1$ и $\lambda_-(p) = 0$ иначе (ABS)
- бинарная операция $*_M$ на $\mathcal{J}(P,<)$: идеал $J_1 *_M J_2$ порожден $J_1 \cap J_2 \cap M$ и антицепью $\max(J_1 \cap J_2) \cap (\max J_1 \cup \max J_2) \cap (P \setminus M)$
- идеал $I^M \subset R$ порожден биномами $X_{J_1}X_{J_2} - X_{J_1 \vee J_2} X_{J_1 *_M J_2}$
- **общий факт:** I^M задает в $\times_{K \in \mathcal{J}(M,<)} \mathbb{P}(\mathbb{C}^{\mathcal{J}_K})$ торическое многообразие многогранника $C_{M,\lambda}(P,<)$
- если $M = \{y_{i,i}\}$, то $O_{M,\lambda}(P,<)$ — многогранник ФФЛВ, а I^M — начальный для I (Feigin–Fourier–Littelmann 2013, Fang–Feigin–Fourier–M. 2017), т.е. задает торическое вырождение