Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 10.

Теретёнков Александр Евгеньевич

27 апреля 2021 г.

В прошлый раз...

Утверждение. (Chaturvedi, Shibata, 1979)

$$\mathcal{K}_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_t^{(n)},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_t^{(1)} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} \\
\mathcal{K}_t^{(2)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \\
\mathcal{K}_t^{(3)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) \\
\mathcal{K}_t^{(4)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
&\quad - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\
&\quad + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
&\quad - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})
\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Обнуляя нечётные моменты:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_t^{(1)} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0 \\
\mathcal{K}_t^{(2)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} = \\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \\
\mathcal{K}_t^{(3)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) = \\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} = 0
\end{aligned}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\mathcal{K}_t^{(4)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} -$$
$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) =$$
$$= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} -$$
$$- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Заметим, что между проекторами $\mathcal{P}$ произведения упорядочены по времени. Оказывается, что в общем случае верна формула

$$\mathcal{K}_t^{(n)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_{n-1}}),$$

где $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_{n-1}})$ — *частично упорядоченные кумулянты*.

Локальное по времени кинетическое уравнение

1. Пишем строчку $\mathcal{P}\mathcal{L}\ldots\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. На её основе пишем все возможные строчки, вставляя операторы $\mathcal{P}$ так, чтобы получившая строчка содержала хотя бы один символ $\mathcal{L}$ между двумя операторами $\mathcal{P}$ и ставим знак $(-1)^{\#\mathcal{P}}$, где $\#\mathcal{P}$ — количество вставленных операторов $\mathcal{P}$.
3. Добавляем к первому символу $\mathcal{L}$ индекс t, а к остальным индексы t так, чтобы между любой парой супероператоров $\mathcal{P}$ индексы t_k были упорядочены по возростанию индекса k. Если таких способов несколько, то выписываем все возможные способы, сохраняя знак, получившийся на предыдущем шаге.
4. Складываем получившиеся члены с учётом знаков.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1})$ - ?

1. $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}$.
3. $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$
4. $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3})$ - ?

1. $\mathcal{PLLLLP}$.
2. $\mathcal{PLLLLP}$, $-\mathcal{PLPLLLP}$, $-\mathcal{PLLPLLP}$, $-\mathcal{PLLLPLP}$,$\mathcal{PLLPLPLP}$,$\mathcal{PLPLLPLP}$,$\mathcal{PLPLPLLP}$, $-\mathcal{PLPLPLPLP}$.
3. $-\mathcal{PLLPLLP} \to$ $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}$
4.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$
\begin{gathered}
\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}) = \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}
\end{gathered}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}'_t\mathcal{Q}\rho_{t_0}$$

Неоднородность

$$\mathcal{I}'_t = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\mathcal{I}_t^{(n)}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}'_t\mathcal{Q}\rho_{t_0}$$

Неоднородность

$$\mathcal{I}'_t = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{I}_t^{(n)}$$

Первые члены такого разложения могут быть получены аналогичным способом (Chang, Skinner, 1993)

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_t^{(1)} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\\
\mathcal{I}_t^{(2)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\\
\mathcal{I}_t^{(3)} &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_t^{(4)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (&\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\
&- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} + \\
&+ \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\
&- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})
\end{aligned}
$$

Пример

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$$

$$\hat{H}_{\text{SB}}^{\text{RWA}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega \sigma_+ \sigma_- \otimes I + \int \left(g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k \sigma_+ \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t) = \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \sigma_+ \otimes b_k \right) dk$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t), \rho]$$

$$\mathcal{P}\rho = \operatorname{Tr}_B \rho \otimes |vac\rangle\langle vac|$$

Пример

Утверждение.

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \sigma_+ \otimes \rho_B = -G_I(t - t_1) \sigma_+ \otimes \rho_B,$$

где

$$\rho_B = |vac\rangle\langle vac|$$

$$G_I(t) = \int |g_k|^2 dk e^{-i(\omega_k - \Omega)t}$$

Кроме того,

$$\mathcal{P} \sigma_+ \otimes \rho_B = \sigma_+ \otimes \rho_B$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}^{\mathrm{RWA}}_{\mathrm{SB,I}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$
$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}^{\text{RWA}}_{\text{SB,I}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$

$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) =$$

$$= -\left[\hat{H}^{\text{RWA}}_{\text{SB,I}}(t), \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk\right] =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \sigma_- \sigma_+ \otimes b_{k'} b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \otimes \delta(k - k') |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int dk e^{-i(\omega_k - \Omega)(t - t_1)} |g_k|^2 \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| =$$

$$= -G_I(t - t_1)\sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| \quad \square$$

Пример

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\
= -(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3} + \mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\
= -(G_I(t - t_2)G_I(t_1 - t_3) + G_I(t - t_3)G_I(t_1 - t_2))\sigma_+ \otimes \rho_B
\end{gathered}
$$

Пример

Если взять точное решение (лекции 6–7), то редуцированная матрица плотности имеет вид

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} 1 - |\psi_I(t)|^2 & \psi_0(0)\psi_I^*(t) \\ \psi_0^*(0)\psi_I(t) & |\psi_I(t)|^2 \end{pmatrix},$$

где $\psi_I(t)$ — решение

$$\frac{d}{dt}\psi_I(t) = -\lambda^2 \int_0^t ds G_I(t-s)\psi_I(s).$$

Упражнение. Получить точное уравнение (при $\psi_I(t) \neq 0$)

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-, \rho(t)] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\sigma_+\sigma_-\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)\sigma_+\sigma_-\right),$$

где

$$\gamma(t) = -2\,\mathrm{Re}\,\frac{\frac{d}{dt}\psi_I(t)}{\psi_I(t)}, \qquad \Delta\varepsilon(t) = -\,\mathrm{Im}\,\frac{\frac{d}{dt}\psi_I(t)}{\psi_I(t)}.$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) =$$

$$= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-,\rho] + \gamma(t) \left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho\} \right) \right) \otimes \rho_B$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) =$$
$$= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-,\rho] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right)\right) \otimes \rho_B$$

$$\mathcal{K}_t(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -\left(i\Delta\varepsilon(t) + \frac{\gamma(t)}{2}\right)(\sigma_+ \otimes \rho_B)$$

Пример

Откуда ясно, что

$$\mathcal{K}_t(\rho\otimes\rho_B) =$$

$$= \left(-i[\Delta\varepsilon(t)\sigma_+\sigma_-,\rho] + \gamma(t)\left(\sigma_-\rho\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-,\rho\}\right)\right)\otimes\rho_B$$

$$\mathcal{K}_t(\sigma_+\otimes\rho_B) = -\left(i\Delta\varepsilon(t) + \frac{\gamma(t)}{2}\right)(\sigma_+\otimes\rho_B)$$

$$i\Delta\varepsilon^{(2)}(t) + \frac{\gamma^{(2)}(t)}{2} = \int_0^t dt_1 G_I(t-t_1)$$

$$i\Delta\varepsilon^{(4)}(t) + \frac{\gamma^{(4)}(t)}{2} =$$

$$= \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 (G_I(t-t_2)G_I(t_1-t_3) + G_I(t-t_3)G_I(t_1-t_2))$$

Пример

В условиях резонанса:

$$G_I(t) = g^2 e^{-\frac{\gamma}{2}t}$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \gamma_M(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}), \gamma_M = \frac{4g^2}{\gamma}, \qquad \varepsilon^{(2)}(t) = 0$$

$$\gamma^{(4)}(t) = \frac{2\gamma_M^2}{\gamma}\left(\operatorname{sh}\frac{\gamma}{2}t - \frac{\gamma}{2}t\right)e^{-\frac{\gamma}{2}t}, \qquad \varepsilon^{(4)}(t) = 0$$

$$\mathcal{K}_t(\rho \otimes \rho_B) =$$

$$= \left(\lambda^2\gamma^{(2)}(t) + \lambda^4\gamma^{(4)}(t) + O(\lambda^6)\right)\left(\sigma_-\rho(t)\sigma_+ - \frac{1}{2}\{\sigma_+\sigma_-, \rho(t)\}\right) \otimes \rho_B$$

Пример

Точное решение

$$\psi_I(t) = e^{-\frac{\gamma}{4}t}\left(\operatorname{ch}\Delta t + \frac{\gamma}{4\Delta}\operatorname{sh}\Delta t\right), \Delta = \frac{1}{4}\sqrt{\gamma^2 - 16\lambda^2 g^2},$$

$$\Delta = \frac{\gamma}{4}\sqrt{1 - 16\lambda^2\frac{g^2}{\gamma^2}} = \frac{\gamma}{4}\left(1 - 8\lambda^2\frac{g^2}{\gamma^2} - 2\lambda^4\frac{g^4}{\gamma^4} + O(\lambda^6)\right)$$

$$\psi_I(t) = 1 + \frac{4g^2}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\gamma t}{2} + e^{-\frac{\gamma t}{2}}\right)\lambda^2 -$$
$$-\frac{16g^4}{\gamma^4}\left(3 - \gamma t + \frac{\gamma^2 t^2}{8} - \left(3 + \frac{\gamma t}{2}\right)e^{-\frac{\gamma t}{2}}\right)\lambda^4 + O(\lambda^6)$$

Пример

$$\ln\psi_I(t) = \frac{4g^2}{\gamma^2}\left(1 - \frac{\gamma t}{2} + e^{-\frac{\gamma t}{2}}\right)\lambda^2 -$$

$$-\frac{16g^4}{\gamma^4}\left(\frac{5}{2} - \frac{\gamma t}{2} - (2+\gamma t)e^{-\frac{\gamma t}{2}} - \frac{1}{2}e^{-\gamma t}\right)\lambda^4 + O(\lambda^6)$$

$$-2\frac{d}{dt}\ln\psi_I(t) = \frac{4g^2}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma t}{2}}\right)\lambda^2 +$$

$$+2\frac{16g^4}{\gamma^3}\left(\frac{1}{2} - e^{-\gamma t} - \frac{\gamma}{2}te^{-\frac{\gamma}{2}t}\right)\lambda^4 + O(\lambda^6)$$