КОРОТКИЕ SL_2-СТРУКТУРЫ НА ПРОСТЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

Стасенко Р.О.

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

9 июня 2021 г.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основное поле — $\mathbb{C}$.

Определение

Алгебра J, в которой выполнено, что $xy = yx$, $(x^2y)x = x^2(yx)$, $\forall x, y \in J$, называется йордановой алгеброй.

Теорема (Титс-Кантор-Кёхер)

Существует взаимно-однозначное соответствие между простыми йордановыми алгебрами и простыми алгебрами Ли, при котором простой йордановой алгебре J сопоставляется простая алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{der}(J) \oplus \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \otimes J$, где

$$[A \otimes x, B \otimes y] = (A, B)[L_x, L_y] + [A, B] \otimes xy, \qquad \forall A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}), x, y \in J.$$

Здесь L_z — линейный оператор умножения на элемент $z \in J$, а $(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$ для $A, B \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Определение

Пусть S — редуктивная алгебраическая группа. S-структурой на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется гомоморфизм $\Phi : S \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

Будем рассматривать случай $S = SL_2(\mathbb{C})$. Далее везде $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли.

Определение

SL_2-структура называется короткой (очень короткой), если представление Φ разлагается на неприводимые представления размерностей 1, 2 и 3 (1 и 3).

ИЗОТИПНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, на которой задана короткая SL_2-структура. Изотипное разложение соответствующего представления имеет вид:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes J_1, \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes J_2.$$

Коммутатор на $\mathfrak{g}$ дает SL_2-эквивариантные билинейные отображения:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g}_i \otimes \mathfrak{g}_j \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad (i \neq j), \\ \mathfrak{g}_i \times \mathfrak{g}_i \longrightarrow \bigwedge\nolimits^2 \mathfrak{g}_i \longrightarrow \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Согласно формуле Клебша-Гордана, выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_i] \subseteq \mathfrak{g}_i \quad (i = 0, 1, 2), && [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] \subseteq \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \\ &[\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] \subseteq \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, && [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] \subseteq \mathfrak{g}_1. \end{aligned}$$

Заметим, что из этих соотношений следует, что $\mathfrak{g}_0$ — подалгебра Ли.

КОММУТАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим произвольную простую алгебру Ли $\mathfrak{g}$, на которой задан инволютивный автоморфизм $\theta \neq \mathrm{id}$. Тогда:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}, \quad \text{где } \mathfrak{h} = \{\xi \in \mathfrak{g} : \theta(\xi) = \xi\}, \mathfrak{v} = \{\eta \in \mathfrak{g} : \theta(\eta) = -\eta\}.$$

Лемма

Подпространство $\mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли и ее присоединенное действие на подпространстве $\mathfrak{v}$ точно.

Применив лемму для $\theta = \Phi(-\mathrm{id}), \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \mathfrak{v} = \mathfrak{g}_1$, получим, что

$$J_2 \subset \mathfrak{gl}(J_1) \text{ и } \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{gl}(J_1).$$

Обозначим:
$(A, B) := \mathrm{tr}(AB)$, $\langle u, v\rangle := \det(u, v)$, $\qquad \forall A, B \in \mathfrak{sl}_2, u, v \in \mathbb{C}^2$.

КОММУТАЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ

Зададим симметрическое билинейное отображение $S : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathfrak{sl}_2$:

$$S(u, v)w = \langle u, w \rangle v + \langle v, w \rangle u.$$

Тогда для любых $D \in \mathfrak{g}_0$, $u, v \in \mathbb{C}^2$, $a, b \in J_1$, $X, Y \in \mathfrak{sl}_2$, $A, B \in J_2$:

$$\begin{aligned}
[D, u \otimes a] &= u \otimes Da, \\
[D, X \otimes A] &= X \otimes [D, A], \\
[u \otimes a, v \otimes b] &= S(u, v) \otimes \varphi(a, b) + 2\langle u, v \rangle \delta(a, b), \\
[u \otimes a, X \otimes B] &= 2Xu \otimes Ba, \\
[X \otimes A, Y \otimes B] &= 2[Y, X] \otimes (A \circ B) + 2(X, Y)\Delta(A, B).
\end{aligned}$$

Здесь: $\circ$ — коммутативная бинарная операция на J_2,
$\varphi : J_1 \times J_1 \to J_2$ — кососимметрическое билинейное отображение,
$\delta : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{g}_0$ — симметрическое билинейное отображение,
$\Delta : J_2 \times J_2 \to \mathfrak{g}_0$ — кососимметрическое билинейное отображение.

ЙОРДАНОВЫ АЛГЕБРЫ

Пусть A — ассоциативная алгебра. Алгебра $A^+ := (A, \circ)$, где $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba)$, $\forall a, b \in A$, — йорданова. Йорданова алгебра J изоморфная подалгебре в A^+, называется *специальной йордановой алгеброй*. Обозначим через L_a оператор умножения на $a \in J$. Тогда

$$\mathfrak{inn}(J) := \langle [L_a, L_b] : \ a, b \in J \rangle \lhd \mathfrak{der}(J).$$

Определение

Йорданова алгебра J называется полупростой, если на J задано невырожденное скалярное умножение $(\,,\,)$, со следующим свойством: $(ab, c) = (a, bc)$, $\forall a, b, c \in J$.

Если йорданова алгебра J полупроста, то $\mathfrak{der}(J) = \mathfrak{inn}(J)$.

Теорема

Йорданова алгебра J полупроста $\iff$ $J = J_1 \oplus \ldots \oplus J_k$, где $J_i \lhd J$ — простой идеал, $\forall i = \overline{1, k}$.

СТРУКТУРНАЯ ТЕОРЕМА

Вернемся к рассмотрению короткой SL_2-структуры на простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Напомним, что:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{g}_1 = \mathbb{C}^2 \otimes J_1, \quad \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes J_2, \quad J_2, \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{gl}(J_1).$$

$$[X \otimes A, Y \otimes B] = 2[Y, X] \otimes (A \circ B) + 2(X, Y)\Delta(A, B), \ \forall X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2.$$

Теорема

Алгебра J_2 является специальной йордановой с классическим умножением, определенным по формуле:

$$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA), \quad \forall A, B \in J_2,$$

причем кососимметрическое билинейное отображение $\Delta : J_2 \times J_2 \to \mathfrak{g}_0$ задается формулой $\Delta(A, B) = [A, B]$.

ИНВАРИАНТНОЕ СКАЛЯРНОЕ УМНОЖЕНИЕ

На простой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ зафиксируем инвариантное скалярное умножение $(,)$. Из леммы Шура следует, что $(\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j) = 0,\ i \neq j$. Тогда для любых $u, v \in \mathbb{C}^2,\ a, b \in J_1,\ X, Y \in \mathfrak{sl}_2,\ A, B \in J_2$:

$$(u \otimes a, v \otimes b) = 2\langle u, v\rangle\alpha(a, b), \quad (X \otimes A, Y \otimes B) = 2(X, Y)\beta(A, B),$$

где β (соотв. α) — невырожденная (косо)симметрическая билинейная форма на J_2 (на J_1). Будем обозначать форму β с помощью круглых скобочек $(,)$, а форму α с помощью угловых скобочек $\langle,\rangle$.

Теорема

Йорданова алгебра J_2 проста, а пространство J_1 — симплектическое векторное пространство, причем $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{sp}(J_1)$, $J_2 \subset \mathfrak{sym}(J_1)$, где $\mathfrak{sym}(J_1) := \{$симметрические операторы на $J_1\}$.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОРОТКАЯ SL_2-СТРУКТУРА

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_{4n+1}$ в базисе, в котором ее элементы представляют собой матрицы размера $(4n+1) \times (4n+1)$ кососимметричные относительно побочной диагонали. Рассмотрим на $\mathfrak{so}_{4n+1}$ короткую SL_2-структуру, заданную с помощью вложения алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в $\mathfrak{so}_{4n+1}$, при котором базисные элементы e, f и h алгебры $\mathfrak{sl}_2$, удовлетворяющие соотношениям:

$$[e, f] = h, \;\; [h, e] = 2e, \;\; [h, f] = -2f,$$

представляют из себя матрицы следующего вида:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & I^{2n} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I^{2n} & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, .., 1}_{2n}, 0, \underbrace{-1, .., -1}_{2n}\}.$$

Здесь через I^{2n} обозначена матрица $2n \times 2n$ следующего вида:

$$I^{2n} = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, .., 1}_{n}, \underbrace{-1, .., -1}_{n}\}.$$

УНИВЕРСАЛЬНАЯ КОРОТКАЯ SL_2-СТРУКТУРА

Для рассматриваемой короткой SL_2-структуры выполнено, что:

$$J_1 = \mathbb{C}^{2n}, \quad J_2 = \mathfrak{sym}(J_1), \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(J_1).$$

Скалярное умножение на алгебрах $\mathfrak{sym}(J_1)$ и $\mathfrak{sp}(J_1)$ имеет вид:

$$(A, B) = 2\,\mathrm{tr}(AB).$$

Матрица скалярного умножения на J_1 имеет вид:

$$I = \begin{pmatrix} & -I_n \\ I_n & \end{pmatrix}, \text{ где } I_n = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \text{ — матрица } n \times n.$$

Построенную короткую SL_2-структуру будем называть *универсальной короткой SL_2-структурой*.

Теорема

Любая короткая SL_2-структура с симплектическим пространством J_1 вкладывается в универсальную короткую SL_2-структуру с таким же симплектическим пространством так, что $J_2 \subset \mathfrak{sym}(J_1)$, $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{sp}(J_1)$.

КАНОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим на симплектическом пространстве J_1 линейные операторы ранга 1 $R(a,b) : J_1 \to J_1,\ \forall\ a, b \in J_1$, определяемые по формуле:

$$R(a,b)c = \langle a, c\rangle b, \qquad \forall a, b, c \in J_1.$$

Очевидно, что введенный оператор R обладает следующим свойством:

$$R^*(a,b) = -R(b,a), \qquad \forall a, b \in J_1,$$

где $R^*(a,b) : J_1 \to J_1$ — сопряженный оператор к $R(a,b)$.

Для универсальной короткой SL_2-структуры отображения $\varphi = \varphi_u : J_1 \times J_1 \to J_2 = \mathfrak{sym}(J_1)$ и $\delta = \delta_u : J_1 \times J_1 \to \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sp}(J_1)$ имеют вид:

$$\varphi_u(a,b) = \frac{1}{4}(R(a,b) + R^*(a,b)),$$

$$\delta_u(a,b) = \frac{1}{4}(R^*(a,b) - R(a,b)).$$

АССОЦИИРОВАННАЯ ФОРМА

Пусть $\mathfrak{h}$ — редуктивная алгебра Ли и $R : \mathfrak{h} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{v})$ — ее неприводимое точное ортогональное линейное представление. Определим

$$[\xi, x] = R(\xi)x = -[x, \xi], \qquad (\xi, [x, y]) = ([\xi, x], y), \qquad \forall \xi \in \mathfrak{h}, \forall x, y \in \mathfrak{v}.$$

На пространстве $\mathfrak{v}$ определим 4-х линейную форму

$$K(x, y, z, u) = ([x, y], [z, u]), \qquad \forall x, y, z, u \in \mathfrak{v}.$$

Теорема

Определенная выше операция в пространстве $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{v}$ задает на нем структуру $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры Ли тогда и только тогда, когда выполненно тождество Бианки:

$$K(x, y, z, u) + K(y, z, x, u) + K(z, x, y, u) = 0.$$

В этом случае K — тензор Римана на однородном пространстве G/H.

Вернемся к рассмотрению коротких SL_2-структур. Положим

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{g}_1,$$

$x = u_1 \otimes a,\ \ y = u_2 \otimes b,\ \ z = u_3 \otimes c,\ \ u = u_4 \otimes d, \quad u_i \in \mathbb{C}^2.$
Тогда, пользуясь коммутационными формулами, получим:

$$K = 4\big(\langle u_3, u_1\rangle\langle u_2, u_4\rangle + \langle u_3, u_2\rangle\langle u_1, u_4\rangle\big)(\varphi(a, b),\ \varphi(c, d)) + \\ + \ 4\langle u_1, u_2\rangle\langle u_3, u_4\rangle(\delta(a, b),\ \delta(c, d)).$$

Тогда тождество Бианки для формы K можно переписать в виде:

$$4\langle u_1, u_2\rangle\langle u_3, u_4\rangle F(a, b, c, d) + 4\langle u_2, u_3\rangle\langle u_1, u_4\rangle F(b, c, a, d) + \\ + 4\langle u_3, u_1\rangle\langle u_2, u_4\rangle F(c, a, b, d) = 0,$$

$$F(a, b, c, d) = (\delta(a, b), \delta(c, d)) + (\varphi(b, c), \varphi(a, d)) + (\varphi(a, c), \varphi(b, d)).$$

АССОЦИИРОВАННАЯ ФОРМА

Определение

Пусть J_1 *— симплектическое пространство,* $J_2 \subset \mathfrak{sym}(J_1)$ *— полупростая йорданова подалгебра и* $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{sp}(J_1)$ *— редуктивная подалгебра Ли, причем* $[J_2, J_2] \subset \mathfrak{g}_0$ *и* $[\mathfrak{g}_0, J_2] \subset J_2$*. Ассоциированной формой тройки* $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$ *называется четырехлинейная форма на пространстве* J_1*:*

$$F(a,b,c,d) = (\delta(a,b), \delta(c,d)) + (\varphi(b,c), \varphi(a,d)) + (\varphi(a,c), \varphi(b,d)),$$

где

$$\varphi = \pi_2 \varphi_u, \quad \delta = \pi_0 \delta_u,$$

а $\pi_2 : \mathfrak{sym}(J_1) \to J_2$ *и* $\pi_0 : \mathfrak{sp}(J_1) \to \mathfrak{g}_0$ *— ортогональные проекции на* J_2 *и* $\mathfrak{g}_0$ *соответственно.*

Для тройки $\left(\mathbb{C}^{2n}; \mathfrak{sp}(\mathbb{C}^{2n}); \mathfrak{sym}(\mathbb{C}^{2n})\right)$ ассоциированная форма $F_u \equiv 0$.

Симплектическая тройка Ли-Йордана

Определение

Пусть J_1 — *симплектическое пространство,* $J_2 \subset \mathfrak{sym}(J_1)$ — *полупростая йорданова подалгебра и* $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{sp}(J_1)$ — *редуктивная подалгебра Ли, причем* $[J_2, J_2] \subset \mathfrak{g}_0$ *и* $[\mathfrak{g}_0, J_2] \subset J_2$. *Тогда тройка* $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$ *называется симплектической тройкой Ли-Йордана, если ассоциированная с ней четырехлинейная форма* F *симметрична.*

Определение

Симплектическая тройка Ли-Йордана $(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2)$ *называется простой, если йорданова алгебра* J_2 *проста.*

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Теорема

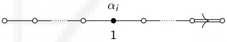
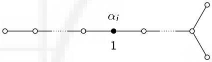
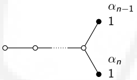
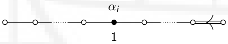
Существует биекция между простыми симлектическими тройками Ли-Йордана и простыми алгебрами Ли с короткой SL_2*-структурой:*

$$(J_1; \mathfrak{g}_0; J_2) \longleftrightarrow \mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\mathbb{C}^2 \otimes J_1\right) \oplus \left(\mathfrak{sl}_2 \otimes J_2\right),$$

где операция коммутирования на $\mathfrak{g}$ *определяется по следующим формулам (*$D \in \mathfrak{g}_0, u, v \in \mathbb{C}^2, a, b \in J_1, X, Y \in \mathfrak{sl}_2, A, B \in J_2$*):*

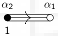
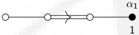
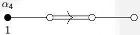
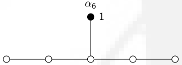
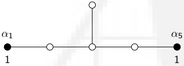
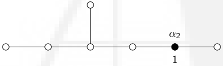
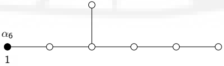
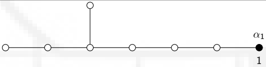
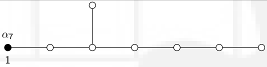
$$\begin{gathered}
[D, u \otimes a] = u \otimes Da, \quad [D, X \otimes A] = X \otimes [D, A], \\
[u \otimes a, v \otimes b] = S(u, v) \otimes \varphi(a, b) + 2\langle u, v\rangle \delta(a, b), \\
[u \otimes a, X \otimes B] = 2Xu \otimes Ba, \\
[X \otimes A, Y \otimes B] = 2[Y, X] \otimes (A \circ B) + 2(X, Y)[A, B].
\end{gathered}$$

Здесь $\varphi = \pi_2 \varphi_u$, $\delta = \pi_0 \delta_u$, *где* $\pi_2 : \mathfrak{sym}(J_1) \to J_2$ *и* $\pi_0 : \mathfrak{sp}(J_1) \to \mathfrak{g}_0$ *ортогональные проекции на* J_2 *и* $\mathfrak{g}_0$ *соответственно.*

$\mathfrak{g}$	Схема Дынкина	J_1	$\mathfrak{g}_0$	J_2
$\mathfrak{sl}_n$	 , $i = n - j$	$\left(\mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^*)^{n-2i}\right) \oplus \oplus \left(\mathbb{C}^{n-2i} \otimes (\mathbb{C}^*)^i\right)$	$(\mathfrak{gl}_i \oplus \mathfrak{gl}_{n-2i})/\mathbb{C}$	$\mathfrak{gl}_i$
$\mathfrak{so}_{2n+1}$	 , $i = 2k$	$\mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^*)^{2(n-i)+1}$	$\mathfrak{sp}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)+1}$	$\mathfrak{sym}_i^-$
$\mathfrak{so}_{2n}$	 , $i = 2k \leqslant n - 2$	$\mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^*)^{2(n-i)}$	$\mathfrak{sp}_i \oplus \mathfrak{so}_{2(n-i)}$	$\mathfrak{sym}_i^-$
$\mathfrak{so}_{2n}$	 , $n = 2k + 1$	$\mathbb{C}^{n-1} \otimes (\mathbb{C}^*)^2$	$\mathfrak{sp}_{n-1} \oplus \mathfrak{so}_2$	$\mathfrak{sym}_{n-1}^-$
$\mathfrak{sp}_{2n}$	 , $i < n$	$\mathbb{C}^i \otimes (\mathbb{C}^*)^{2(n-i)}$	$\mathfrak{so}_i \oplus \mathfrak{sp}_{2(n-i)}$	$\mathfrak{sym}_i^+$

Здесь через $\mathfrak{sym}_i^{\pm}$ обозначена йорданова алгебра матриц порядка i, симметричных относительно (косо)симметрической невырожденной билинейной формы, с классическим умножением.

КЛАССИФИКАЦИЯ КОРОТКИХ SL_2-СТРУКТУР

$\mathfrak{g}$	Схема Дынкина	J_1	$\mathfrak{g}_0$	J_2
G_2		$\mathrm{Sym}^3\,\mathbb{C}^2$	$\mathfrak{sl}_2$	$\mathbb{C}$
F_4		S^6	$\mathfrak{so}_6$	$\mathbb{C}^6 \oplus \mathbb{C}$
F_4		$\Lambda^3_0(\mathbb{C}^6)$	$\mathfrak{sp}_6$	$\mathbb{C}$
E_6		$\Lambda^3(\mathbb{C}^6)$	$\mathfrak{sl}_6$	$\mathbb{C}$
E_6		$S^7 \oplus S^7$	$\mathfrak{so}_7$	$\mathbb{C}^7 \oplus \mathbb{C}$
E_7		$\mathbb{C}^2 \otimes S^9$	$\mathfrak{sl}_2 \oplus \mathfrak{so}_9$	$\mathbb{C}^9 \oplus \mathbb{C}$
E_7		$S^{12}_{1/2}$	$\mathfrak{so}_{12}$	$\mathbb{C}$
E_8		$V(\pi_1)$	E_7	$\mathbb{C}$
E_8		S^{13}	$\mathfrak{so}_{13}$	$\mathbb{C}^{13} \oplus \mathbb{C}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Koeher. M*, Imbedding of Jordan algebras into Lie algebras. American Journal of Mathematics, 89: 787–816, 1967
- *Vinberg E.B.*, Non-abelian gradings of Lie algebras, 50th Seminar "Sophus Lie", Banach Center Publ., 113, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warszawa, 2017, 19–38
- *Vinberg E.B.*, Short SO3-structures on simple Lie algebras and associated quasielliptic planes, Lie Groups and Invariant Theory, Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2, 213, ed. E. Vinberg, AMS, 2005, 243–270