

$f \in S_k(\Gamma_1(N))$ - вэргэ $a_n(f) = a_1(T_n f) = 0 \Rightarrow f = 0$
 $T \in T_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ - вэргэ, нуга $a_1(Tf) = 0 \forall f \Rightarrow a_1(TT'f) = a_1(T'Tf) = 0$
 $\Rightarrow Tf = 0 \forall f \Rightarrow T = 0$.
 $\mathcal{A} = \{f \in S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}} \mid f \text{ - нормализованная, Тенке-собств.}\} \simeq$
 $\simeq \text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(T_k(\Gamma_1(N)), \mathbb{C})$. $f: T \mapsto a_1(Tf)$
 $\text{Id} \mapsto a_1(f) = 1$

$Tf = \lambda f; T'f = \mu f \Rightarrow TT'f = \lambda \mu f$
 $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}\text{-alg}}(T_k(\Gamma_1(N)), \mathbb{C})$, f - совб. форма
 $a_n(Tf) = a_1(T_n Tf) = \varphi(T_n) \varphi(T) = \varphi(T) \cdot a_1(T_n f)$
 $\Rightarrow f$ - Тенке совб.
 $\varphi(T) \cdot a_n(f)$
Дмг гур $f \in S_k(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$, м.т. f - нормализована, Тенке-совб.

S. Saito, Modular forms and Galois representations
 $\varphi_f: T_k(\Gamma_1(N)) \rightarrow \mathbb{C}$, $Q(f) = \text{Im } \varphi_f$.

$Q(f)$ - минимальное поле.

$k=2$, $S_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}} = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(T_2(\Gamma_1(N)), \mathbb{C})$

$\Gamma(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}^*)$ $\xleftrightarrow{\text{соотнесение}}$
 $H^1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \simeq H^0(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}^*) \oplus H^1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{X_1(N)})$
 $\Rightarrow H_1(X_1(N)_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ - свободный $T_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{C}}$ - модуль
 ранга 2.
 $\Rightarrow H_1(X_1(N), \mathbb{Q})$ - свободный $T_2(\Gamma_1(N))_{\mathbb{Q}}$ - мо-
 дуль ранга 2.
 λ - нормирование $\mathbb{Q}(f)$ над $\mathbb{Q}$ ($\ell \nmid N$).

$\mathcal{Z}_1(N) = \mathcal{Z}_{ac}(X_1(N))$, V_e - модуль Тейлора

Опр. $V_{f, \lambda} := V_e(\mathcal{Z}_1(N)) \otimes_{T_2(\Gamma_1(N))} \mathbb{Q}(\lambda)_\lambda$ -

2. первое представление Тейлора над $\mathbb{Q}(\lambda)_\lambda$.

$V_e(\mathcal{Z}_1(N)) \simeq H_1(X_1(N), \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_e$.

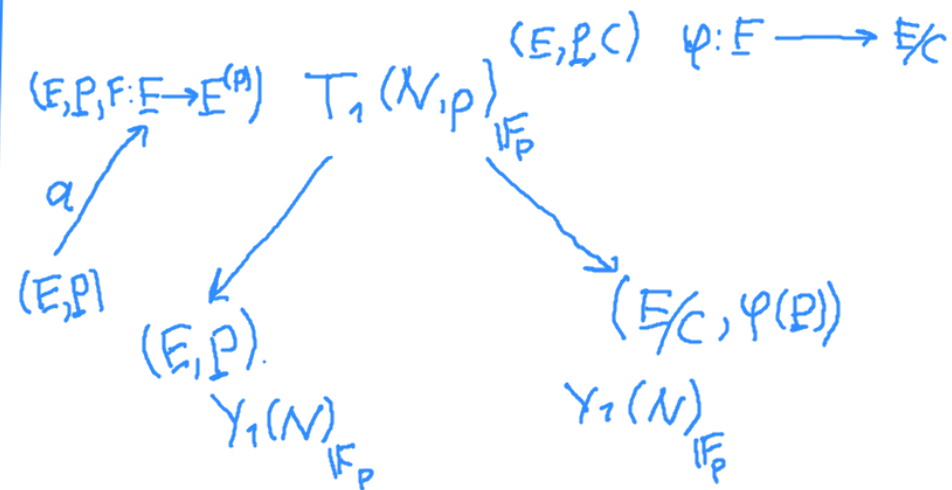
Теор. $\det(1 - \varphi_p \pm \bigwedge V_{f, \lambda}) = 1 - \alpha_p(\pm)H + E_f(p) \cdot p^{E^2}$
где $p \nmid N\ell$.

Зам. $\mathcal{Z}_1(N)(\mathbb{Q})[e^n] = \mathcal{Z}_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)[e^n]$
 $\downarrow \varphi_p$
 $\downarrow F_e$

$\rightarrow$ Глупо брать T_p, F_e на $X_1(N)_{\overline{\mathbb{F}}_p}$

Теорема (Зингер-Улльшлагер):

$$\mathcal{Z}_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)[e^n] \xrightarrow[T_{F_* + \langle p \rangle} F_e^*]{T_p} \mathcal{Z}_1(N)(\overline{\mathbb{F}}_p)[e^n]$$



$$\begin{array}{ccc}
 a, b: Y_1(N) \bigsqcup_{\mathbb{F}_p} Y_1(N)_{\mathbb{F}_p} & \xrightarrow{\quad} & T_1(N, p)_{\mathbb{F}_p} \\
 & \searrow (Id, F_p) & \downarrow S \text{ deg} = p+1 \\
 & & Y_1(N, p)_{\mathbb{F}_p} \\
 & \swarrow \text{deg} = p+1 & \\
 & &
 \end{array}$$

кон. модули

Зам. F_p -циркулярия, тогда
и p простое число

• E -суперэллиптическая, тогда $E[p] \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mu_p$
на $\mathbb{F}_p$, $p+1$ способов выбрать C .

а.е. (+ вложенная композиция)
T

$$T_p = E_{p*} + \langle p \rangle E_p^*$$

$$\text{а.е. } (1 - E_{p*}x)(1 - \langle p \rangle E_p^*x) = 1 - T_p x + \langle p \rangle p x^2$$

$$\text{Лемма } \det(1 - E_{p*}x) = \det(1 - \langle p \rangle E_p^*) \sim V_p(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

Это следует из сопряжённости E_{p*} , и
 $\langle p \rangle E_p^*$ отн. сопряжения $(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha, \omega_N \beta)$,

$$\text{где } \omega_N: Y_1(N) \times \text{Spec } \mathbb{Z}[\frac{1}{N}, \xi_N] \rightarrow$$

Анимация-Левина: $(E, p) \mapsto (E/\langle p \rangle, Q)$, где

$$Q \in E[N], \text{ т.е. } \langle p, Q \rangle = \xi_N.$$

$\Rightarrow$ Теорема.