

Структуры коммутативных алгебраических моноидов на нормальных аффинных поверхностях

По работе Sergey Dzhunusov and Yulia Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine surfaces. Forum Mathematicum 33 (2021), no. 1, 177-191

07.05.2021

Постановка общей задачи

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики нуль.

Задача

Найти все операции $\mu: X \times X \rightarrow X$, обладающие следующими свойствами:

- морфизм алгебраических многообразий
- ассоциативность
- коммутативность
- наличие единицы

Моноиды на $\mathbb{A}^n$ (Arzhantsev, Bragin, Z.'2018)

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^1: \quad x \cdot y &= xy \\ x \cdot y &= x + y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{A}^2: \quad (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 y_2) \\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 x_2, x_1^b y_2 + y_1^b x_2), \quad b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\end{aligned}$$

Моноиды на $\mathbb{A}^n$ (Arzhantsev, Bragin, Z.'2018)

$$\mathbb{A}^1: \quad \begin{aligned} x \cdot y &= xy \\ x \cdot y &= x + y \end{aligned}$$

$$\mathbb{A}^2: \quad \begin{aligned} (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 x_2, y_1 y_2) \\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 x_2, x_1^b y_2 + y_1^b x_2), \quad b \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Теорема (структуры моноидов на $\mathbb{A}^3$)

- 1) $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
- 2) $(x_1 y_1, x_1^b y_2 + y_1^b x_2, x_1^c y_3 + y_1^c x_3), \quad b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad b \leq c$
- 3) $(x_1 y_1, x_1^b y_2 + y_1^b x_2, x_1^c y_3 + y_1^c x_3 + Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2)), \quad b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad 0 < b \leq c,$
 $Q_{b,c}(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sum_{k=1}^d \binom{d+1}{k} x_1^{e+b(k-1)} y_1^{e+b(d-k)} x_2^{d-k+1} y_2^k, \quad \text{где } c = be + d, \quad 0 < d \leq b$
- 4) $(x_1 y_1, x_2 y_2, x_1^b x_2^c y_3 + y_1^b y_2^c x_3), \quad b, c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad b \leq c$
- 5) $(x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3)$

Пример умножения на гиперповерхности

$$X = \{ab = cd\} \subseteq \mathbb{A}^4$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1c_2 + a_2c_1, b_1b_2, c_1c_2, d_1b_2 + d_2b_1)$$

Пример умножения на гиперповерхности

$$X = \{ab = cd\} \subseteq \mathbb{A}^4$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1c_2 + a_2c_1, b_1b_2, c_1c_2, d_1b_2 + d_2b_1)$$

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}, \det = 0 \right\} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{K})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & d_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_2 + a_2c_1 & d_1b_2 + d_2b_1 \\ c_1c_2 & b_1b_2 \end{pmatrix}$$

Пример умножения на гиперповерхности

$$X = \{ab = cd\} \subseteq \mathbb{A}^4$$

$$(a_1, b_1, c_1, d_1) \cdot (a_2, b_2, c_2, d_2) = (a_1c_2 + a_2c_1, b_1b_2, c_1c_2, d_1b_2 + d_2b_1)$$

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}, \det = 0 \right\} \subseteq \text{Mat}_2(\mathbb{K})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & d_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_2 + a_2c_1 & d_1b_2 + d_2b_1 \\ c_1c_2 & b_1b_2 \end{pmatrix}$$

Здесь нейтральный элемент $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, проверка ассоциативности:

$$\begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & d_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_3 & d_3 \\ c_3 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1c_2c_3 + a_2c_1c_3 + a_3c_1c_2 & d_1b_2b_3 + d_2b_1b_3 + d_3b_1b_2 \\ c_1c_2c_3 & b_1b_2b_3 \end{pmatrix}$$

Алгебраические моноиды и групповые вложения

Группа обратимых элементов $G(X) \subseteq X$ моноида X открыта по Зарисскому в X и обладает структурой алгебраической группы.

Многообразие X аффинно $\Leftrightarrow$ группа $G(X)$ аффинна ($\Leftarrow$ Rittatore'07)

Определение

Пусть G — аффинная алгебраическая группа. *Групповым вложением* называется такое аффинное неприводимое многообразие X с открытым вложением $G \hookrightarrow X$, что действия левыми и правыми умножениями G на себе продолжаются до действий G на X .

Взаимно-однозначное соответствие:

- (а) моноиды $X \times X \rightarrow X$ с группой обратимых элементов G ;
- (б) групповые вложения $G \hookrightarrow X$;

Доказательство (б) $\rightarrow$ (а).

Хотим продолжить умножение $\mu: G \times G \rightarrow G$ до морфизма $X \times X \rightarrow X$.

$G \hookrightarrow X \Rightarrow \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[G]$. Имеем $\Phi: \mathbb{K}[G] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[G]$.

$$\left. \begin{array}{l} G \times X \rightarrow X \\ X \times G \rightarrow X \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X] \\ \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[G] \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{K}[X] \rightarrow (\mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X]) \cap (\mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[G]) = \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$$

Классическая задача: Описать все групповые вложения данной группы G .

Частный случай: редуктивные моноиды (G редуктивная)

Waterhouse'82: G полупроста $\Rightarrow X = G$

Vinberg'95: произвольные редуктивные моноиды, $\text{char} = 0$

Rittatore'98: произвольные редуктивные моноиды, $\forall \text{char}$

Наша задача: Описать все групповые вложения в данное многообразие X .

Коммутативные моноиды

Определение

X — коммутативный моноид, если $\mu: X \times X \rightarrow X$ коммутативно

$\Leftrightarrow G(X)$ коммутативна

Взаимно-однозначное соответствие:

(а) моноиды $X \times X \rightarrow X$ с группой обратимых элементов G ;

(б) групповые вложения $G \hookrightarrow X$;

(в) эффективные действия $G \times X \rightarrow X$ с фикс. точкой $x_0 \in X$ из открытой орбиты.

(в) $\rightarrow$ (а).

$$x_0 \in X \implies G \hookrightarrow X, g \mapsto g \cdot x_0 \implies \mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[G].$$

$$G \times X \rightarrow X \implies \mathbb{K}[G] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X]$$



Моноиды ранга $n - 1$

$\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики 0 $\Rightarrow$
 $G(X) = \mathbb{G}_m^r \times \mathbb{G}_a^{n-r}$, где $n = \dim X$. Число r — ранг моноида X .

$r = n \Rightarrow X$ — аффинное торическое многообразие

$r = 0 \Rightarrow X \simeq \mathbb{A}^n$

Предложение

Пусть аффинное многообразие X имеет структуру коммутативного моноида ранга $n - 1$. Тогда X торическое, и все структуры коммутативных моноидов на X происходят из корней Демажюра конуса X .

Доказательство.

Пусть X аффинное торическое, $e \in \mathfrak{R}$ — корень Демажюра конуса X .

$\mathbb{G}_a = \{\exp \alpha \partial_e \mid \alpha \in \mathbb{K}\}$ нормализуется тором T ($T \ltimes \mathbb{G}_a$)

$\mathbb{G}_m^{n-1} = \text{Ker } \chi^e \subseteq T$ коммутирует с $\mathbb{G}_a$ ($\mathbb{G}_m^{n-1} \times \mathbb{G}_a$)

$\mathbb{G}_m^{n-1} \times \mathbb{G}_a \hookrightarrow X$ — групповое вложение.

Согласно (Arzhantsev, Kotenkov'a'15, Theorem 2) любое групповое вложение коммутативной группы ранга $n - 1$ получается таким способом. □

Изоморфизмы

$$\tau: X_1 \rightarrow X_2$$

Морфизм моноидов:

$$\begin{aligned}\tau(x * y) &= \tau(x) * \tau(y) \quad \forall x, y \in X_1 \\ \tau(e_1) &= e_2\end{aligned}$$

Морфизм групповых

вложений группы G :

$$\tau(g \cdot y) = g \cdot \tau(y) \quad \forall g \in G, y \in X_1$$

Структуры моноида на X , соответствующие одному действию $G \times X \rightarrow X$ и разным точкам x_0 в открытой орбите, изоморфны.

(Arzhantsev, Kotenкова'15, Proposition 10) $\implies$

Предложение

Моноиды ранга $n - 1$, соответствующие корням Демажюра $e_1, e_2 \in \mathfrak{A}$, изоморфны тогда и только тогда, когда существует автоморфизм решетки N , сохраняющий конус X и индуцирующий автоморфизм двойственной решетки M , который переводит e_2 в e_1 .

Коумножения

$$\mu: X \times X \rightarrow X \quad \longleftrightarrow \quad \Phi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$$

Теорема

Пусть X — нормальное аффинное алгебраическое многообразие размерности n со структурой коммутативного моноида ранга 0, $n - 1$ или n . Тогда X торическое, то есть $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{u \in S_X} \mathbb{K}\chi^u$, и коумножение $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$ с точностью до

изоморфизма задается одной из следующих формул:

- 1) $r = n$: $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$ для всех $u \in S_X$;
- 2) $r = n - 1$:

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{\langle p_i, u \rangle}$$

для всех $u \in S_X$,

где p_i — примитивный вектор на луче конуса X и $e \in \mathfrak{R}_i$ — один из корней Демажюра, соответствующий этому лучу;

- 3) $r = 0$: $X = \mathbb{A}^n$, $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes 1 + 1 \otimes \chi^u$ для всех $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

Переформулировка через вычисляющие гомоморфизмы

точки на X $\longleftrightarrow$ вычисляющие гомоморфизмы $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$

Пусть X допускает структуру алгебраического моноида ранга 0, $n - 1$ или n . Тогда X торическое, $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{u \in S_X} \mathbb{K}\chi^u$, и произведение xu любых двух точек $x, u \in X$

задано одним из следующих вычисляющих гомоморфизмов $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$:

- 1) $r = n$: $\chi^u \mapsto \chi^u(x)\chi^u(y)$ для любых $u \in S_X$;
- 2) $r = n - 1$: $\chi^u \mapsto \chi^u(x)\chi^u(y)(\chi^e(x) + \chi^e(y))^{\langle p_i, u \rangle}$ для любых $u \in S_X$, где p_i — примитивный вектор на луче конуса X и $e \in \mathfrak{R}_i$ — один из корней Демазюра, соответствующий этому лучу;
- 3) $r = 0$: $X = \mathbb{A}^n$, $\chi^u \mapsto \chi^u(x) + \chi^u(y)$ для всех $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n$.

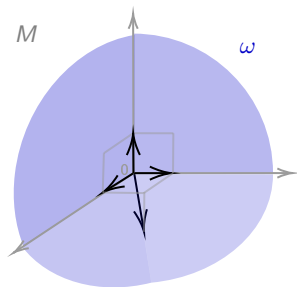
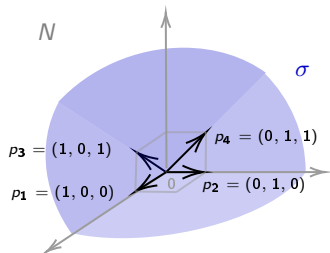
Пример

Аффинное торическое мн-зие X , $\sigma \subseteq N$ и $\omega = \sigma^\vee \subseteq M$ изображены на рисунке.

Порождающие полугруппы $S_X = M \cap \omega$: $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, -1)$.

Пусть $a = \chi^{(1,0,0)}$, $b = \chi^{(0,1,0)}$, $c = \chi^{(0,0,1)}$, $d = \chi^{(1,1,-1)}$

$\Rightarrow \mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[a, b, c, d]/(ab - cd) \Rightarrow X \cong \{ab = cd\} \subset \mathbb{A}^4$.



$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &= \{(-1, l_2, l_3 + 1) \mid l_2, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, & \mathfrak{R}_2 &= \{(l_1, -1, l_3 + 1) \mid l_1, l_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, \\ \mathfrak{R}_3 &= \{(l_1, l_2, l_1 + 1) \mid l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}, & \mathfrak{R}_4 &= \{(l_1, l_2, l_2 + 1) \mid l_1, l_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}. \end{aligned}$$

Пример

$X = \{ab = cd\} \subseteq \mathbb{A}^4$, моноиды ранга 2 для $p_1 = (1, 0, 0)$.

Коумножение: $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{u_1}$.

Так как $a = \chi^{(1,0,0)}$, $b = \chi^{(0,1,0)}$, $c = \chi^{(0,0,1)}$, $d = \chi^{(1,1,-1)}$,
для $e = (-1, l_2, l_3 + 1) \in \mathfrak{R}_1$ имеем $\chi^e(x) = a(x)^{-1} b(x)^{l_2} c(x)^{l_3+1}$, $l_2, l_3 \geq 0$.

$$a(x * y) = a(x) b(y)^{l_2} c(y)^{l_3+1} + b(x)^{l_2} c(x)^{l_3+1} a(y),$$

$$b(x * y) = b(x) b(y), \quad c(x * y) = c(x) c(y),$$

$$d(x * y) = d(x) b(y)^{l_2+1} c(y)^{l_3} + b(x)^{l_2+1} c(x)^{l_3} d(y).$$

Симметричность лучей $\Rightarrow$ это все структуры моноида ранга 2 на $X = \{ab = cd\}$ с точностью до изоморфизма.

$$\begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ c_1 & b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & d_2 \\ c_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_2^{l_2} c_2^{l_3+1} + a_2 b_1^{l_2} c_1^{l_3+1} & d_1 b_2^{l_2+1} c_3^{l_3} + d_2 b_1^{l_2+1} c_2^{l_3} \\ c_1 c_2 & b_1 b_2 \end{pmatrix}$$

Доказательство

Согласно предложению: $e \in \mathfrak{R}_i$, $G = \text{Ker } \chi^e \times \mathbb{G}_a$. ЛНД $\partial_e: \chi^u \mapsto \langle p_i, u \rangle \chi^{u+e}$.
 Действие $\varphi: G \times \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$: элемент $(t, \alpha) \in G$ действует с помощью $t \exp \alpha \partial_e$, применяя к $\chi^u \in \mathbb{K}[X]$ получаем

$$t^u \left(\chi^u + \alpha \langle p_i, u \rangle \chi^{u+e} + \frac{\alpha^2}{2} \langle p_i, u \rangle \langle p_i, u+e \rangle \chi^{u+2e} + \dots \right) = t^u \sum_{j=0}^{\langle p_i, u \rangle} \binom{\langle p_i, u \rangle}{j} \alpha^j \chi^{u+je},$$

Тогда $\Phi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X]$ задаётся как $\Phi(\chi^u) = t^{-u} \sum_{j=0}^{\langle p_i, u \rangle} \binom{\langle p_i, u \rangle}{j} (-\alpha)^j \chi^{u+je}$.

Берём в открытой орбите точку x_0 : $\chi^u(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{если } \langle p_i, u \rangle = 0 \\ 0 & \text{если } \langle p_i, u \rangle > 0 \end{cases}$.

Действуем на x_0 ; вложение $\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[G]$ есть $\chi^u \mapsto t^{-u}(-\alpha)^{\langle p_i, u \rangle}$, $(t, \alpha) \in G$.
 В частности, функция χ^{u+je} отождествляется с $t^{-u}(-\alpha)^{\langle p_i, u+je \rangle} = t^{-u}(-\alpha)^{\langle p_i, u \rangle - j}$, где $0 \leq j \leq \langle p_i, u \rangle$. Таким образом, искомое коумножение $\Phi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$:

$$\Phi(\chi^u) = \sum_{j=0}^{\langle p_i, u \rangle} \binom{\langle p_i, u \rangle}{j} \chi^{u+(\langle p_i, u \rangle - j)e} \otimes \chi^{u+je} = \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{\langle p_i, u \rangle}$$

Техническая лемма к доказательству

Лемма

Пусть $\varphi: G \times \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$ соответствует действию G на X . Тогда отображение $\Phi: \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[G] \otimes \mathbb{K}[X]$, двойственное к действию $G \times X \rightarrow X$, отображает $f \in \mathbb{K}[X]$ в $\varphi(g^{-1}, f)$, рассматриваемую как функцию аргумента $g \in G$.

Доказательство.

Если $\varphi: G \times \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $(g, f) \mapsto \varphi(g, f)$ — действие на $\mathbb{K}[X]$, то действие $G \times X \rightarrow X$ отображает пару (g, x) в точку $\varphi(g^{-1}, f)(x)$, рассматриваемую как вычисляющий гомоморфизм $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}$ от аргумента f . Его двойственным является требуемое. □

Конструкция Кокса

$T \curvearrowright X$ — аффинное торическое многообразие с веером σ , $\langle \sigma(1) \rangle = N \otimes \mathbb{Q}$.

$\rho_i \in \sigma(1)$, $1 \leq i \leq m$ — лучи веера $\longleftrightarrow$ T -инвариантные дивизоры D_i .

Все T -инвариантные дивизоры Вейля на X : $\sum a_i D_i \in \bar{M} \simeq \mathbb{Z}^m$

$$0 \rightarrow M \rightarrow \bar{M} \rightarrow \text{Cl}(X) \rightarrow 0, \quad \text{где} \quad \begin{aligned} M &\rightarrow \bar{M}, \quad u \mapsto \text{div}(\chi^u) \simeq \bar{u} := (\langle p_1, u \rangle, \dots, \langle p_m, u \rangle) \\ \bar{M} &\rightarrow \text{Cl}(X), \quad D \mapsto [D] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \leftarrow T \xleftarrow{\pi'} \bar{T} \xleftarrow{\parallel} H_X \leftarrow 1 \\ (\mathbb{K}^\times)^m \curvearrowright \mathbb{A}^m = \bar{X} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Cl}(X)\text{-градуировка на кольце Кокса} \\ &\mathcal{R}(X) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m], \quad \deg x_i = [D_i] \in \text{Cl}(X) \end{aligned}$$

$$\mathbb{K}[\bar{T}] \xrightarrow{(\pi')^*} \mathbb{K}[\bar{T}] = \mathbb{K}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_m^{\pm 1}], \quad \chi^u \mapsto \chi^{\bar{u}}$$

$$\mathbb{K}[X] \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[\bar{X}]^{H_X} \quad \Rightarrow \quad \pi: \bar{X} \xrightarrow{H_X} X$$

Согласованность действий

Определение

Действие группы $\mu: G \times X \rightarrow X$ *согласовано* с действием $\bar{\mu}: \bar{G} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если существует такой эпиморфизм $\pi': \bar{G} \rightarrow G$, что действия $\bar{G}$ и H_X на $\bar{X}$ коммутируют и диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Согласованность действий

Определение

Действие группы $\mu: G \times X \rightarrow X$ согласовано с действием $\bar{\mu}: \bar{G} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если существует такой эпиморфизм $\pi': \bar{G} \rightarrow G$, что действия $\bar{G}$ и H_X на $\bar{X}$ коммутируют и диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Лемма

Действие тора T на X согласовано с действием тора $\bar{T}$ на $\bar{X}$.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccccc} \bar{T} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} & \mathbb{K}[\bar{X}] & \xleftarrow{\bar{\mu}(\bar{t}, \cdot)^*} & \mathbb{K}[\bar{X}] & \chi^{\bar{u}}(\bar{t})\chi^{\bar{u}} & \xleftarrow{\bar{t}} & \chi^{\bar{u}} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi & \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* & \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ T \times X & \xrightarrow{\mu} & X & \mathbb{K}[X] & \xleftarrow{\mu(\pi'(\bar{t}), \cdot)^*} & \mathbb{K}[X] & \chi^u(t)\chi^u & \xleftarrow{t} & \chi^u \end{array}$$



Согласованность действий

Определение

Действие группы $\mu: G \times X \rightarrow X$ согласовано с действием $\bar{\mu}: \bar{G} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если существует такой эпиморфизм $\pi': \bar{G} \rightarrow G$, что действия $\bar{G}$ и H_X на $\bar{X}$ коммутируют и диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Лемма

Действие тора T на X согласовано с действием тора $\bar{T}$ на $\bar{X}$.

Лемма

Действие подтора $\text{Ker } \chi^u \subset T$ на X для любого $u \in M$ согласовано с действием подтора $\text{Ker } \chi^{\bar{u}} \subset \bar{T}$ на $\bar{X}$ для $\bar{u} \in \bar{M}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \chi^u(t) &= \chi^{\bar{u}}(\bar{t}) \text{ для } u \in M, \bar{t} \in \bar{T} \text{ и } t = \pi'(\bar{t}) \implies \text{Ker } \chi^{\bar{u}} \text{ — прообраз } \text{Ker } \chi^u. \\ 1 &\leftarrow \text{Ker } \chi^u \xleftarrow{\pi'} \text{Ker } \chi^{\bar{u}} \leftarrow H_X \leftarrow 1 \end{aligned}$$



Согласованность действий

Определение

Действие группы $\mu: G \times X \rightarrow X$ согласовано с действием $\bar{\mu}: \bar{G} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если существует такой эпиморфизм $\pi': \bar{G} \rightarrow G$, что действия $\bar{G}$ и H_X на $\bar{X}$ коммутируют и диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Лемма

Действие тора T на X согласовано с действием тора $\bar{T}$ на $\bar{X}$.

Лемма

Действие подтора $\text{Ker } \chi^u \subset T$ на X для любого $u \in M$ согласовано с действием подтора $\text{Ker } \chi^{\bar{u}} \subset \bar{T}$ на $\bar{X}$ для $\bar{u} \in \bar{M}$.

$e \in \mathfrak{X}_i$ — корень Демажюра $X \implies \bar{e} = (\langle p_1, e \rangle, \dots, \langle p_m, e \rangle)$ — корень Демажюра $\bar{X} = \mathbb{A}^m$: $\langle p_i, e \rangle = -1$ и $\langle p_j, e \rangle \geq 0, j \neq i$.

Согласованность действий

Определение

Действие группы $\mu: G \times X \rightarrow X$ согласовано с действием $\bar{\mu}: \bar{G} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если существует такой эпиморфизм $\pi': \bar{G} \rightarrow G$, что действия $\bar{G}$ и H_X на $\bar{X}$ коммутируют и диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Лемма

Действие тора T на X согласовано с действием тора $\bar{T}$ на $\bar{X}$.

Лемма

Действие подтора $\text{Ker } \chi^u \subset T$ на X для любого $u \in M$ согласовано с действием подтора $\text{Ker } \chi^{\bar{u}} \subset \bar{T}$ на $\bar{X}$ для $\bar{u} \in \bar{M}$.

Лемма

$\mathbb{G}_a$ -действие на X , соответствующее корню Демазюра $e \in M$, согласовано с $\mathbb{G}_a$ -действием на $\bar{X}$, соответствующим корню Демазюра $\bar{e} \in \bar{M}$.

Согласованность действий

Определение

Действие группы $\mu: G \times X \rightarrow X$ согласовано с действием $\bar{\mu}: \bar{G} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если существует такой эпиморфизм $\pi': \bar{G} \rightarrow G$, что действия $\bar{G}$ и H_X на $\bar{X}$ коммутируют и диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi' \times \pi & & \downarrow \pi \\ G \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\bar{X}] & \xleftarrow{\partial_{\bar{e}}} & \mathbb{K}[\bar{X}] \\ \uparrow \pi^* & & \uparrow \pi^* \\ \mathbb{K}[X] & \xleftarrow{\partial_e} & \mathbb{K}[X] \end{array}$$

$$(\pi')^*: \exp \alpha \partial_{\bar{e}} \leftrightarrow \exp \alpha \partial_e.$$

$$\pi^*: \partial_e(\chi^u) = \langle p_i, u \rangle \chi^{u+e} \leftrightarrow \partial_{\bar{e}}(\chi^{\bar{u}}) = \langle e_i, \bar{u} \rangle \chi^{\bar{u}+\bar{e}}$$



Лемма

$\mathbb{G}_a$ -действие на X , соответствующее корню Демажюра $e \in M$, согласовано с $\mathbb{G}_a$ -действием на $\bar{X}$, соответствующим корню Демажюра $\bar{e} \in \bar{M}$.

Конструкция Кокса – дополнение

X — аффинное торическое многообразие, $\langle \sigma(1) \rangle = N_0 \otimes \mathbb{Q} \neq N \otimes \mathbb{Q}$.

$$X = X_0 \times (\mathbb{K}^\times)^{\tilde{m}}$$

$$\mathbb{A}^m // H_X = X_0 \quad \longrightarrow \quad \underbrace{\mathbb{A}^m \times (\mathbb{K}^\times)^{\tilde{m}}}_{\bar{X}} // H_X = X$$

$$\mathbb{K}[\bar{X}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m, x_{m+1}^{\pm 1}, \dots, x_{m+\tilde{m}}^{\pm 1}]$$

$$\mathbb{K}[\bar{X}]^{H_X} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]^{H_X} [x_{m+1}^{\pm 1}, \dots, x_{m+\tilde{m}}^{\pm 1}] \simeq \mathbb{K}[X_0][x_{m+1}^{\pm 1}, \dots, x_{m+\tilde{m}}^{\pm 1}] = \mathbb{K}[X]$$

$$\chi^{\bar{u}} \leftrightarrow \chi^u$$

$$u = u_0 + \tilde{u} \in S_X = S_{X_0} + \mathbb{Z}^{\tilde{m}} \subseteq M = M_0 + \mathbb{Z}^{\tilde{m}},$$

$$\bar{u} = (\langle p_1, u \rangle, \dots, \langle p_m, u \rangle, \tilde{u}_{m+1}, \dots, \tilde{u}_{m+\tilde{m}}) \in \bar{M} = \bar{M}_0 + \mathbb{Z}^{\tilde{m}}.$$

Согласованность моноидов

Определение

Пусть X и $\bar{X}$ наделены структурами моноида.

Умножение $\mu: X \times X \rightarrow X$ согласовано с умножением

$\bar{\mu}: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$, если диаграмма коммутативна.

$$\begin{array}{ccc} \bar{X} \times \bar{X} & \xrightarrow{\bar{\mu}} & \bar{X} \\ \downarrow \pi \times \pi & & \downarrow \pi \\ X \times X & \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

Лемма

Пусть G и $\bar{G}$ действуют согласовано с открытыми орбитами на X и $\bar{X}$ соответственно. Пусть $\bar{x}_0 \in \bar{X}$ — точка в открытой орбите и $x_0 = \pi(\bar{x}_0)$. Рассмотрим умножения на X и $\bar{X}$, построенные по этим действиям и точкам. Тогда эти структуры моноидов согласованы.

Доказательство.

$$\begin{array}{ccc} \bar{G} \hookrightarrow & \longrightarrow & \bar{X} \\ \downarrow \pi' & & \downarrow \pi \\ G \hookrightarrow & \longrightarrow & X \end{array} \implies \begin{array}{l} \pi \text{ продолжает } \pi' \\ \text{при отождествлении группы с открытой орбитой} \end{array}$$

Моноиды на языке конструкции Кокса

Теорема

Пусть X — нормальное аффинное алгебраическое многообразие размерности n , допускающее структуру моноида ранга 0, $n - 1$ или n . Тогда X торическое, и умножение на X согласовано с умножением на $\bar{X} = \mathbb{A}^m \times (\mathbb{K}^\times)^{\tilde{m}}$. С точностью до изоморфизма моноидов на X и $\bar{X}$ умножение на $\bar{X}$ задаётся одной из следующих формул:

1) $r = n$: $(x_1, \dots, x_{m+\tilde{m}}) \cdot (y_1, \dots, y_{m+\tilde{m}}) = (x_1 y_1, \dots, x_{m+\tilde{m}} y_{m+\tilde{m}})$.

2) $r = n - 1$:

$$(x_1, \dots, x_{m+\tilde{m}}) \cdot (y_1, \dots, y_{m+\tilde{m}}) = (x_1 y_1, \dots, x_i y_i^{\tilde{e}, i} + y_i x_i^{\tilde{e}, i}, \dots, x_{m+\tilde{m}} y_{m+\tilde{m}}),$$

где p_i — примитивный вектор на луче веера X , $e \in \mathfrak{R}_i$ — корень Демазюра,

соответствующий этому лучу, $\tilde{e} \in \mathbb{Z}^{\tilde{m}}$, $x_i^{\tilde{e}, i} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} x_j^{\langle p_j, e \rangle} \prod_{m < j \leq m+\tilde{m}} x_j^{\tilde{e}_j}$;

3) $r = 0$: $X = \bar{X} = \mathbb{A}^n$, $(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$.

Доказательство теоремы

$e \in \mathfrak{R}$, $G = \text{Ker } \chi^e \times \mathbb{G}_a$.

$\mathbb{G}_a$ -действие $\exp \alpha \partial_e$ на X согласовано с $\mathbb{G}_a$ -действием $\exp \alpha \partial_{\bar{e}}$ на $\bar{X}$.

Действие $\text{Ker } \chi^e$ на X согласовано с действием $\text{Ker } \chi^{\bar{e}}$ на $\bar{X}$.

$\bar{e}$ — корень Демазюра $\bar{X} \implies$

действие $\text{Ker } \chi^{\bar{e}} \times \mathbb{G}_a$ для любой точки $\bar{x}_0 \in \bar{X}$ даёт структуру моноида на $\bar{X}$.

Она согласована со структурой моноида действия $\text{Ker } \chi^e \times \mathbb{G}_a$ для точки $x_0 = \pi(\bar{x}_0)$.

$\bar{e} = (\langle p_1, e \rangle, \dots, \langle p_m, e \rangle, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m) \implies$ ЛНД $\partial_{\bar{e}} = x^{\bar{e}, i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq i}} x_j^{\langle p_j, e \rangle} \prod_{m < j \leq m + \tilde{m}} x_j^{\tilde{e}_j} \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Действие $(t, \alpha) \in \text{Ker } \chi^{\bar{e}} \times \mathbb{G}_a$ на $\bar{X}$:

$$(t, \alpha) \cdot \bar{x} = (t_1 x_1, \dots, t_{i-1} x_{i-1}, t_i (x_i + \alpha x^{\bar{e}, i}), t_{i+1} x_{i+1}, \dots, t_{m+\tilde{m}} x_{m+\tilde{m}}).$$

Берём точку $\bar{x}_0 = (1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1) \in \bar{X}$ в открытой орбите.

Действуя на неё, получаем вложение $\text{Ker } \chi^{\bar{e}} \times \mathbb{G}_a \hookrightarrow \bar{X}$:

$$(t, \alpha) \mapsto (t, \alpha) \cdot \bar{x}_0 = (t_1, \dots, t_{i-1}, t_i \alpha, t_{i+1}, \dots, t_{m+\tilde{m}}) =: \bar{y} = (y_1, \dots, y_{m+\tilde{m}}).$$

$t \in \text{Ker } \chi^{\bar{e}} \implies t_i^{-1} t^{\bar{e}, i} = 1$. Подставляем $t_j = y_j$ для $j \neq i$ и $t_i \alpha = y_i$, получаем умножение на $\bar{X}$: $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x_1 y_1, \dots, y^{\bar{e}, i} x_i + y_i x^{\bar{e}, i}, \dots, x_{m+\tilde{m}} y_{m+\tilde{m}})$.

Пример

$\sigma: p_1 = (1, 0, 0), p_2 = (0, 1, 0), p_3 = (1, 0, 1), p_4 = (0, 1, 1), D_1, \dots, D_4$ — дивизоры.

Соотношения на $[D_1], \dots, [D_4] \in \text{Cl}(X)$: $[\text{div}(\chi^u)] = 0$ для базисных u , то есть

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D_1] \\ [D_2] \\ [D_3] \\ [D_4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{aligned} \text{Cl}(X) \simeq \mathbb{Z} \text{ порождена} \\ [D_1] = -[D_2] = -[D_3] = [D_4], \\ \mathcal{R}(X) = \mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4], \\ \deg x_i = [D_i] \in \text{Cl}(X) \end{aligned}$$

$H_X = \mathbb{K}^\times \curvearrowright \bar{X} = \mathbb{A}^4$ как $t \cdot (x_1, x_2, x_3, x_4) = (tx_1, t^{-1}x_2, t^{-1}x_3, tx_4) \implies$
 $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4]^{H_X} = \mathbb{K}[x_1x_2, x_1x_3, x_2x_4, x_3x_4] \implies \mathbb{A}^4 // H_X$ есть $X = \{ab = cd\}$, где

$$a = \chi^{(1,0)}, b = \chi^{(1,1)}, c = \chi^{(1,2)} \text{ из } \mathbb{K}[X]$$

$$\chi^{\overline{(1,0)}} = \chi^{(0,2)} = x_2^2, \chi^{\overline{(1,1)}} = \chi^{(1,1)} = x_1x_2, \chi^{\overline{(1,2)}} = \chi^{(2,0)} = x_1^2 \text{ из } \mathbb{K}[\bar{X}].$$

Умножение на $\bar{X} = \mathbb{A}^4$, соответствующее корню $e = (-1, l_2, l_3 + 1) \in \mathfrak{R}_1$:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 y_2^{l_2} y_3^{l_3} y_4^{l_2+l_3+1} + x_2^{l_2} x_3^{l_3} x_4^{l_2+l_3+1} y_1, x_2 y_2, x_3 y_3, x_4 y_4).$$

Следствия для поверхностей

Следствие

Пусть X — нормальная аффинная поверхность со структурой коммутативного моноида. Тогда X торическая, то есть $\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{u \in S_X} \mathbb{K}\chi^u$, и с точностью до изоморфизма коумножением $\mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X] \otimes \mathbb{K}[X]$ является одно из следующего:

1) $r = 2$: $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u$ для всех $u \in S_X$;

2) $r = 1$:

$$\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{\langle p_i, u \rangle}$$

для всех $u \in S_X$, где p_i — примитивный вектор на луче веера X и $e \in \mathfrak{R}_i$ — один из корней Демажюра, соответствующих этому лучу;

3) $r = 0$: $X = \mathbb{A}^2$, $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes 1 + 1 \otimes \chi^u$ для всех $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^2$.

Следствия для поверхностей

Следствие

Пусть X — нормальная аффинная алгебраическая поверхность со структурой коммутативного моноида ранга r . Тогда X торическая, и любая структура коммутативного моноида происходит из одной из следующих на $\bar{X}$:

1) $r = 2$, $\bar{X} = \mathbb{A}^2$, $\bar{X} = X = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{K}^\times$, $(\mathbb{K}^\times)^2$:

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_2);$$

2) $r = 1$, $\bar{X} = \mathbb{A}^2$

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_2^{\langle p_2, e \rangle} + y_1 x_2^{\langle p_2, e \rangle}, x_2 y_2), \quad e \in \mathfrak{R}_1,$$

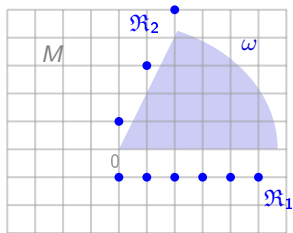
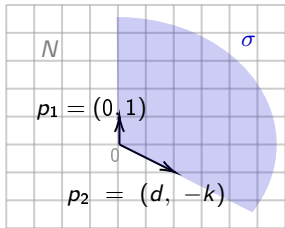
$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 y_1^{\langle p_1, e \rangle} + y_2 x_1^{\langle p_1, e \rangle}), \quad e \in \mathfrak{R}_2,$$

где p_i и $\mathfrak{R}_i$, $i = 1, 2$ — примит. векторы на лучах и корни Демазюра X ;

3) $r = 1$, $\bar{X} = X = \mathbb{A}^1 \times \mathbb{K}^\times$:

$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_2^l + y_1 x_2^l, x_2 y_2), \quad l \in \mathbb{Z};$$

4) $r = 0$: $X = \mathbb{A}^2$, $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.



$r = 1$, $p_1 = (0, 1)$, $X = \{ac = b^2\} \subseteq \mathbb{A}^3$. Коумножение:
 $\chi^u \mapsto \chi^u \otimes \chi^u (1 \otimes \chi^e + \chi^e \otimes 1)^{u_2}$. $a = \chi^{(1,0)}$, $b = \chi^{(1,1)}$, $c = \chi^{(1,2)}$. Для корня
 Демажюра $e = (l, -1) \in \mathfrak{R}_1$ имеем $\chi^e(x) = a(x)^{l+1} b(x)^{-1} \implies$

$$a(x * y) = a(x)a(y), \quad b(x * y) = b(x)a(y)^{l+1} + a(x)^{l+1}b(y),$$

$$c(x * y) = c(x)a(y)^{2l+1} + a(x)^{2l+1}c(y) + 2a(x)^l b(x)a(y)^l b(y).$$

Умножение на $\bar{X} = \mathbb{A}^2$ для $e = (l, -1) \in \mathfrak{R}_1$:

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1 y_2^{2l+1} + x_2^{2l+1} y_1, x_2 y_2).$$

Изоморфизм

Нормальная форма строго выпуклого двумерного конуса σ : существует базис $e_1, e_2 \in N$ $\sigma = \text{cone}(e_2, de_1 - ke_2)$, где $d > 0$, $0 \leq k \leq d$ и $\text{НОД}(d, k) = 1$.

Тогда $p_1 = (0, 1)$, $p_2 = (d, -k)$, корни Демажюра

$$\mathfrak{R}_1 = \{e_1^{(l)} = (l, -1) \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

$$\mathfrak{R}_2 = \{(l_1, l_2) \mid dl_1 - kl_2 = -1, l_2 \geq 0\} = \{e_2^{(l)} = e_2^{(0)} + (d, k)l \mid l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

Следствие

Если $k^2 \not\equiv 1$ по модулю d , то структуры моноидов ранга 1, перечисленные в следствиях, попарно неизоморфны. Если $k^2 \equiv 1$ по модулю d , то моноиды изоморфны тогда и только тогда, когда они соответствуют $e_1^{(l)}$ и $e_2^{(l)}$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Доказательство.

В базисе e_1, e_2 матрица $\tau: \begin{pmatrix} k & d \\ \frac{1-k^2}{d} & -k \end{pmatrix}$ — целочисленна $\Leftrightarrow d$ делит $k^2 - 1$. □

Список литературы-1

- [1] Ivan Arzhantsev, Sergey Bragin, and Yulia Zaitseva. Commutative algebraic monoid structures on affine spaces. Accepted in Commun. Cont. Math. (2019)
- [2] Ivan Arzhantsev, Ulrich Derenthal, Jürgen Hausen, and Antonio Laface. *Cox rings*. Cambridge Studies in Adv. Math. 144, Cambridge University Press, New York, 2015
- [3] Ivan Arzhantsev and Polina Kotenkova. Equivariant embeddings of commutative linear algebraic groups of corank one. Doc. Math. 20 (2015), 1039-1053
- [4] Andrzej Białynicki-Birula. Remarks on the action of an algebraic torus on k^n . Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 14 (1966), 177-181
- [5] David Cox. The homogeneous coordinate ring of a toric variety. J. Alg. Geom. 4 (1995), no. 1, 17-50
- [6] David Cox, John Little, and Henry Schenck. *Toric Varieties*. Graduate Studies in Math. 124, AMS, Providence, RI, 2011
- [7] Walter Ferrer Santos and Alvare Rittatore. *Actions and invariants of algebraic groups*. Pure and Applied Math., no. 269, Chapman & Hall/CRC, 2005
- [8] Gene Freudenburg. *Algebraic theory of locally nilpotent derivations*. Encyclopaedia Math. Sci., vol. 136, Springer, Berlin, 2006
- [9] William Fulton. *Introduction to toric varieties*. Annales of Math. Studies 131, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993
- [10] James Humphreys. *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Math. 21, Springer Verlag, New York, 1975

Список литературы-2

- [11] Alvaro Liendo. Affine $\mathbb{T}$ -varieties of complexity one and locally nilpotent derivations. *Transform. Groups* 15 (2010), no. 2, 398-425
- [12] Karl-Hermann Neeb. Toric varieties and algebraic monoids. *Seminar Sophus Lie* 2 (1992), 159-187
- [13] Vladimir Popov and Ernest Vinberg. *Invariant Theory*. Algebraic Geometry IV, Encyclopaedia Math. Sci., vol. 55, 123-284, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- [14] Mohan Putcha. Quadratic semigroups on affine spaces. *Linear Algebra Appl.* 26 (1979), 107-121
- [15] Mohan Putcha. *Linear Algebraic Monoids*. London Math. Soc. Lecture Notes, vol. 133, Cambridge Univ. Press. Cambridge, 1988
- [16] Lex Renner. *Linear Algebraic Monoids*. Encyclopaedia Math. Sciences 134, Springer, Berlin, 2005
- [17] Alvaro Rittatore. Algebraic monoids and group embeddings. *Transform. Groups* 3 (1998), no. 4, 375-396
- [18] Alvaro Rittatore. Algebraic monoids with affine unit group are affine. *Transform. Groups* 12 (2007), no. 3, 601-605
- [19] Ernest Vinberg. On reductive algebraic semigroups. In: *Lie Groups and Lie Algebras*, E.B. Dynkin Seminar, S. Gindikin and E. Vinberg, Editors, AMS Transl. 169, 145-182, Amer. Math. Soc., 1995