ТЕОРИЯ РАЗРУШЕНИЯ (КАТАСТРОФ) РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ.

КРИТИЧЕСКИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ

ПРИМЕРЫ

1. Параболическое уравнение:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \text{ в } \mathbb{R}_+^{N+1} \quad (p > 1), \\ u|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, \quad u_0(x) \not\equiv 0. \end{cases} \tag{1}$$

Локальный анализ:

$$\forall p > 1 \ \exists T = T(u_0): \ \exists u(t,x) \text{ при } 0 < t < T,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Глобальный анализ:

$? \ T = \infty \quad ! \quad \exists p_{cr} = 1 + \frac{2}{N}$ (H. Fujita '66)

$\forall p\colon 1 < p \leq p_{cr} \quad \nexists u(t,x) \ \forall u_0 \geq 0 :$

$\forall u_0 \geq 0 \ \exists T_\infty = T_\infty(u_0) < \infty, \quad \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^p(t,x)\,dx \to +\infty,\ t \to T_\infty.$

2. Гиперболическое уравнение:

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + |u|^p \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+ \quad (p > 1), \\ u = u_0(x) \text{ при } t = 0, \\ u_t = u_1(x) \geq 0 \text{ при } t = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Локальный анализ:

$\forall p > 1 \; \exists T = T(u_0, u_1)\colon \; \exists u(t,x)$ при $0 < t < T$, $x \in \mathbb{R}^N$

Глобальный анализ:

? $T = \infty$! $\exists p_{\text{cr}} = \frac{N+1}{N-1}$ (T. Kato '80)

$\forall p\colon 1 < p \leq p_{\text{cr}}$ не существует глобального по t (т.е. при всех $t > 0$) решения (2)

$\exists T_\infty = T_\infty(u_0) < \infty, \; \int\limits_{\mathbb{R}^N} u^p(t,x)\,dx \to +\infty, \; t \to T_\infty.$

МЕТОДЫ

1. Метод сравнения (принцип максимума, положительность фундаментального решения соответствующего линейного оператора).

2. Автомодельные решения.

Этот метод ограничивает класс нелинейных уравнений, по существу, скалярными уравнениями второго порядка, обладающими свойством положительности.

МЕТОД НЕЛИНЕЙНОЙ ЕМКОСТИ (С.П., 1997)

Оказывается, что существование катастрофы (blow-up) решения связано с **нелинейной емкостью,** порожденной (индуцированной) нелинейным оператором.

“Каждый нелинейный оператор имеет свою собственную нелинейную емкость.”

Общая схема: нелинейный оператор $\longrightarrow$ нелинейная емкость $\longrightarrow$ емкостная размерность $\longrightarrow$ условия разрушения.

Преимущества:

- общность метода
- более простой метод
- точность (неулучшаемость) получаемых критериев
- устойчивость критических показателей относительно нелинейных возмущений

Комментарий

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \text{ в } \mathbb{R}^N \times (0, +\infty), \\ u = u_0 > 0 \text{ при } t = 0. \end{cases}$$

? $\quad p_{\text{cr}} = 1 + 2/N.$

H. Fujita '66, $\quad 1 < p < 1 + 2/N$

J. Lions '69, $\quad 1 < p < 1 + 2/N.$

? $\quad p = 1 + 2/N$

K. Hayakawa '73, $N = 2$

D. Aronson, H. Weinberger '78

$\forall N: p_{\text{cr}} = 1 + 2/N.$

$1 < p \leq 1 + 2/N$

1978-1966=12 лет!

Пример

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p \\ u_0(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow u(t,x) = u(t):$$

$$\begin{cases} u_t = u^p \\ u(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow u(t) = [1 - (p-1)t]^{-\frac{1}{p-1}}$$

$$\forall p > 1 \ (p > p_{\text{cr}}) \Rightarrow \text{ blow-up} \qquad T_\infty = \frac{1}{p-1}.$$

Проблема

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + |u|^p + f(t,x) \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

$$? \qquad p_{\text{cr}} = p_{\text{cr}}(N, f, u_0)$$

Пусть $\displaystyle \int\limits_{|x|\le R} \int\limits_0^T f(t,x)\,dt\,dx\Big|_{T=R^2} + \int\limits_{|x|\le R} u_0(x)\,dx \ge c_d(1+R^\gamma)$

с $\gamma \ge 0$, $c_d > 0$ (без $f \ge 0$, $u_0 \ge 0$!).

Тогда $p_{\text{cr}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } \gamma \ge N, \\ 1 + \frac{2}{N-\gamma}, & \text{если } 0 \le \gamma < N. \end{cases}$

Оценка области существования решения

$$T_\infty < T_* = (c_*/c_d)^\theta, \quad \theta = \frac{2(p-1)}{(\gamma - N)p + N + 2 - \gamma} \text{ при } 1 < p < p_{\text{cr}}$$

$$R_\infty < R_* = T_*^{1/2}, \qquad \theta - \text{ точный показатель!}$$

Как “рождается” и “работает” нелинейная емкость?

Лоцман-пример: $A(u) = -\Delta u - u^q$

$$\begin{cases} -\Delta u \geq u^q \text{ в } \mathbb{R}^N, \\ u \geq 0, \quad q > 1. \end{cases}$$

Определение: $u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N), u \geq 0 :\ \int u^q \psi \leq -\int u \Delta \psi \ \forall \psi \in C_0^2(\mathbb{R}^N), \psi \geq 0\}$.
$X_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N) = \{u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N),\ u \geq 0\}$

Пусть $e = e_R = \{x \in \mathbb{R}^N \,|\, |x| \leq R\}$, $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^N)$, $\psi \geq 0$, $\psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| \geq \kappa R \ (\kappa > 1). \end{cases}$

$$\int u^q \psi \leq -\int \Delta u \cdot \psi = -\int u \Delta \psi \leq \left(\int u^q \psi \right)^{1/q} \left(\int \frac{|\Delta \psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}} \right)^{1/q'}$$

$$\int\limits_{|x| \leq R} u^q \leq \int u^q \psi \leq \int \frac{|\Delta \psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}} \to \inf_{\psi} \int \frac{|\Delta \psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}} = \mathrm{Cap}(A, e_R)$$

Таким образом, емкость = оптимальная априорная оценка на соответствующем классе пробных функций.

Как “работает” емкость?

Очевидно, если $\mathrm{Cap}(A, e_R) \to 0$ при $R \to \infty$, то не существует нетривиального глобального (т.е. $\forall R > 0$) решения.

Имеем $\mathrm{Cap}(A, e_R) \le \displaystyle\int \frac{|\Delta\psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}}$, $\psi(x) = \psi_0\left(\frac{r}{R}\right)$, $\quad \psi_0 \ge 0, \quad \psi_0 \in C^2$,

$$\psi_0(\rho) = \begin{cases} 1, & \rho \le 1, \\ 0, & \rho \ge \kappa > 1, \end{cases} \quad \int \frac{|\Delta\psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}} = R^{N-2q'} \int \frac{|\Delta\psi_0|^{q'}}{\psi_0^{q'-1}}$$

Следовательно, если $1 < q < q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} \frac{N}{N-2} & \text{при } N > 2, \\ +\infty & \text{при } N = 1, 2, \end{cases}$

то $\mathrm{Cap}(A, e_R) \to 0$ при $R \to \infty \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^q = 0$, $u \ge 0 \Rightarrow u = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N$.

Предельный случай: $N = 2q'$, $\mathrm{Cap}(A, e_R) \le c_* < \infty \, \forall R > 1 \Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} u^q < \infty$

$$\int_{|x| \le R} u^q \le \int u^q \psi \le -\int u\Delta\psi = -\int_{\mathrm{supp}\Delta\psi} u\Delta\psi \le$$

$$\Big(\int_{\mathrm{supp}\Delta\psi} u^q\psi\Big)^{1/q} \Big(\int \frac{|\Delta\psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}}\Big)^{1/q'} \le c_*^{1/q'} \cdot \Big(\int_{R \le |x| \le \kappa R} u^q\psi\Big)^{1/q} \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Контрпример. $\forall q > q_{\text{cr}} \quad (N > 2)$

$$\exists u(x) = A(1 + |x|^2)^{\lambda} > 0$$

с $\dfrac{2-N}{2} < \lambda < -\dfrac{1}{q-1}$

и $A = 2|\lambda| \cdot (N - 2 + 2\lambda) > 0$:

$$-\Delta u \geq u^q \text{ в } \mathbb{R}^N, \quad N > 2.$$

Устойчивость критического показателя

$$A(u)\colon\ = -\Delta u - u^q, \quad u \geq 0, \quad q > 1.$$

$$q_{\text{cr}} = \begin{cases} \frac{N}{N-2} & \text{при } N > 2, \\ +\infty & \text{при } N \leq 2. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{A}(u) = -\mathrm{div}(a(x,u,Du)\cdot Du) - b(x,u,Du)$, $u \geq 0$

$$\text{с} \begin{cases} 0 < a_0 \leq a(x,u,Du) \leq a_1, \\ b(x,u,Du) \geq b_0|u|^q,\ b_0 > 0. \end{cases} \qquad (H)$$

Тогда $q_{\text{cr}}(\tilde{A}) = q_{\text{cr}}(A)$.

Более того, для оператора $\tilde{A}_1$:

$$\tilde{A}_1(u) = -\mathrm{div}\left(a(x,u,Du)\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) - b(x,u,Du)$$

при условиях (H) имеем

$$q_{\mathrm{cr}}(\tilde{A}_1) = q_{\mathrm{cr}}(\tilde{A}) = q_{\mathrm{cr}}(A).$$

В частности, для

$$A_1(u) = -\mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} - u^q,\ \ u \geq 0$$

имеем

$$q_{\mathrm{cr}}(A_1) = q_{\mathrm{cr}}(A).$$

Концепция нелинейной емкости

(С.П., Доклады РАН, 1997)

$\Omega \subset \mathbb{R}^N, \quad X(\Omega) \subset L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$

$A\colon X(\Omega) \to X'(\Omega).$

$e \subset \Omega$ – компакт

$C_0^\infty(e,\Omega) = \{\psi \in C_0^\infty(\Omega) \,|\, 0 \le \psi \le 1 \text{ в } \Omega \text{ и } \psi = 1 \text{ в } e\}.$

Определение 1. Нелинейной емкостью называется величина

$$\mathrm{Cap}_A(e,\Omega) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \sup_{u \in X(\Omega)} \int_\Omega A(u)\psi \, dx. \qquad (3)$$

Замечание. Для коэрцитивных операторов A вводится дополнительное ограничение

$$\|\psi\|_X \leq \|u\|_X.$$

Для антикоэрцитивных операторов A это ограничение снимается.

Примеры

1. $A(u) = -\Delta u$

$$X(\Omega) = W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$$

$$\mathrm{cap}_A(e,\Omega) = \inf_{\psi\in C_0^\infty(e,\Omega)} \sup_{u\in W^{1,2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \left\{ -\int\limits_\Omega \Delta u\cdot\psi\,dx \,\middle|\, \|u\|_{1,2} \le \|\psi\|_{1,2} \right\}$$

$$= \inf_{\psi\in C_0^\infty(e,\Omega)} \int\limits_\Omega |\nabla\psi|^2\,dx$$

$\mathrm{cap}_\Delta(e,\Omega)$ – классическая (гармоническая) емкость

2. $A(u) = -\Delta_p u := -\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) \quad (p>1)$

$X(\Omega) = W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_A(e,\Omega) &= \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \sup_{u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)} \left\{ -\int_\Omega \Delta_p u \cdot \psi \, dx \,\middle|\, \|u\|_{1,p} \le \|\psi\|_{1,p} \right\} \\ &= \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \int_\Omega |\nabla \psi|^p \, dx\end{aligned}$$

$\mathrm{cap}_{\Delta_p}(e,\Omega)$ – p–гармоническая емкость

Определение 2. Пусть M – мультипликатор, согласованный с оператором A. Определим A_M как

$$A_M = MA,$$

так что $MA\colon X_{\mathrm{loc}}(\Omega) \to D'(\Omega)$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{Cap}_{A_M}(e,\Omega) &:= \mathrm{Cap}_{MA}(e,\Omega) \\ &= \inf_{\psi\in C_0^\infty(e,\Omega)} \sup_{u\in X(\Omega)} \int\limits_\Omega MA(u)\psi\,dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Пример 1. Нелинейная эллиптическая емкость

$$A(u){:}\ = -\Delta_p u - u^q,\ \ p > 1,\ \ q > p-1$$

$$X_{\text{loc}}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}_{\text{loc}}(\Omega) | u \geq 0,\ \int_{\text{loc}} |Du|^p u^\alpha + \int_{\text{loc}} |Du|^p u^{q+\alpha} < \infty.\}$$

Положим $M(u) = u^\alpha$ с $1-p < \alpha < 0$. Тогда

$$\text{Cap}_{A_M}(e,\Omega) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \left\{ \frac{1}{c} \int_\Omega \frac{|D\psi|^\gamma}{\psi^{\gamma-1}} dx \right\}$$

с $c > 0$ и $\gamma = \dfrac{p(q+\alpha)}{q-p+1}$.

Замечание. Если заменить $\psi \to \zeta$: $\psi = \zeta^\gamma$, то

$$\mathrm{Cap}_{A_M}(e,\Omega) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \left\{ \frac{\gamma^\gamma}{c} \int\limits_\Omega |D\zeta|^\gamma dx \right\}.$$

Отсюда следует

$$q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} +\infty & \text{при } p \geq N, \\ \dfrac{N(p-1)}{N-p} & \text{при } N > p. \end{cases}$$

При $p = 2$ имеем $q_{\mathrm{cr}} = \dfrac{N}{N-2}$ $(N > 2)$ – показатель Дж. Серрина.

Пример 2. Нелинейная параболическая емкость

$$A(u)\colon = \frac{\partial u}{\partial t} - D(u^\sigma |Du|^{p-2} Du) - u^q, \ u \geq 0 \ \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+,$$

$$p > 1, \ \frac{p}{N} + \sigma + p - 1 > 1, \ q > \max\{1, \sigma + p - 1\}.$$

$$\mathrm{Cap}_{A_M}(e, \Omega) = \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \left\{ \iint_\Omega \frac{|D\psi|^{\gamma_1}}{\psi^{\gamma_1 - 1}} + \frac{|\psi_t|^{\gamma_2}}{\psi^{\gamma_2 - 1}} \colon \psi = \psi(t,x), \, \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}_+ \right\}$$

$$\text{с } \gamma_1 = \frac{p(q+\alpha)}{q - (\sigma + p - 1)}, \ \gamma_2 = \frac{q + \alpha}{q - 1} \ (-1 < \alpha \leq 0).$$

Отсюда

$$q_{\mathrm{cr}} = \frac{p}{N} + \sigma + p - 1.$$

Показатель Галактионова – ‘82, ‘94.

Устойчивость критических показателей в $X^+_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1}_+)$

Пример.

$$\tilde{A}(u) := \frac{\partial u}{\partial t} - \mathrm{div}(a(\dots)u^{\sigma}|Du|^{p-2}Du) - b(\dots),\ u \geq 0 \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+$$

с $\begin{array}{l} a(\dots) = a(t, x, u, Du, \dots), \\ b(\dots) = b(t, x, u, Du, \dots) \end{array}$

при условиях:

$$\begin{cases} 0 < a_0 \leq & a(\dots) \leq a_1, \\ & b(x, u, Du) \geq b_0|u|^q,\ \ b_0 > 0. \end{cases}$$

Имеем

$$q_{\mathrm{cr}}(\tilde{A}) = q_{\mathrm{cr}}(A) = \frac{p}{N} + \sigma + p - 1$$

при прежних соотношениях на p, q и σ.

Обобщенное уравнение Зельдовича–Компанейца–Баренблатта

$$\tilde{A}_0(u) := u_t + (-1)^k \Delta^k |u|^m - |u|^p \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+$$

с $p > m \geq 1$.

Имеем $\mathrm{Cap}_{A_0}(e,\Omega) = \inf\limits_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \left\{ \iint\limits_\Omega \frac{|D^k \psi|^{q'}}{\psi^{q'-1}} + \frac{|\psi_t|^{p'}}{\psi^{p'-1}} \right\}$

с $q = \frac{p}{m}$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

$$p_{\mathrm{cr}}(A_0) = m + \frac{2k}{N}$$

Если

$$\begin{cases} A(u) \geq f(t,x) & \text{в } \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u = u_0(x) & \text{при } t = 0,\ x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

$$\text{с } \int\limits_0^T \int\limits_{B_R} f(t,x)\,dt\,dx\Big|_{T=R^\theta} + \int\limits_{B_R} u_0(x)\,dx \geq c_d(1 + R^\gamma),$$

$\theta = 2k\dfrac{p-1}{p-m}$ и $c_d > 0$, то

$$p_{\text{cr}}(A) = \begin{cases} m + \frac{2k}{p-\gamma} & \text{при } 0 \leq \gamma < N, \\ +\infty & \text{при } \gamma \geq N. \end{cases}$$

Устойчивость критического показателя.

Рассмотрим $\tilde{A}(u) = u_t + \Delta^k f(t,x,u) - b(t,x,u)$,

$$\begin{aligned} &|f(t,x,u)| \leq c|u|^m, \\ &b(t,x,u) \geq b_0|u|^p \end{aligned}$$

с $p > m > 1$, $b_0 > 0$. Имеем

$$p_{\text{cr}}(\tilde{A}) = p_{\text{cr}}(A_0).$$

Пример 3. Нелинейная гиперболическая емкость

$$A(u) := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{l \le |\alpha| \le L} D^\alpha A_\alpha(t,x,u) - b(t,x,u)|u|^q \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+$$

с $|A_\alpha(t,x,u)| \le c|u|^p, \ p > 0, \ b(t,x,u) \ge b_0 > 0.$

$$\mathrm{Cap}_A(e,\Omega) \le C \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \left\{ \iint_\Omega \frac{|D\psi|^{\gamma_1}}{\psi^{\gamma_1 - 1}} + \frac{|\psi_{tt}|^{\gamma_2}}{\psi^{\gamma_2 - 1}} : \psi = \psi(t,x), \ \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}_+ \right\}$$

$$\text{с } \gamma_1 = \frac{q}{q-p}, \ \ \gamma_2 = \frac{q}{q-1}.$$

Отсюда следует

$$q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} +\infty & \text{при } 2N - l \le 0, \\ \frac{2N+l}{2N-l} & \text{при } 2N - l > 0. \end{cases}$$

Следствие

$$A(u) \colon = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u - |u|^q \text{ в } \mathbb{R}_+^{N+1}$$

$$p = 1, l = L = 2, q > 1$$

$$\mathrm{Cap}_A(e, \Omega) \le C \inf_{\psi \in C_0^\infty(e,\Omega)} \left\{ \iint\limits_\Omega \frac{|\Delta\psi|^\gamma + |\psi_{tt}|^\gamma}{\psi^{\gamma-1}} \colon \psi = \psi(t,x),\ \Omega \subset \mathbb{R}_+^{N+1} \right\}$$

$$\text{с} \quad \gamma = \frac{q}{q-1}$$

Отсюда

$$q_{\mathrm{cr}}\big|_{p=1,l=2} = \frac{2N \cdot 1 + 2}{2N \cdot 1 - 2} = \frac{N+1}{N-1} \ (N > 1),$$

т.е. показатель Като.

Нелокальные нелинейности

Нелинейные интегральные уравнения и неравенства.

Теоремы типа Лиувилля

Пример 1. $u(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-\beta}} |u(y)|^q dy$

При $0 < \beta < N$ имеем $q_{\text{cr}} = \frac{N}{N-\beta}$.

Пусть $1 < q \le q_{\text{cr}}$.

Тогда не существует нетривиальных решений.

Пример 2. Рассмотрим более общий случай

$$L(u) \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-\beta}} |u(y)|^q dy$$

с $\beta < N$, где L – линейный дифференциальный оператор.

Тогда существует $q_{\text{cr}} > 1$ такой, что при

$1 < q \leq q_{\text{cr}}$ не существует нетривиального решения.

Пример 2.1. $u_t - \Delta u \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-\beta}} |u(y)|^q dy$

$$q_{\mathrm{cr}} = \frac{N+2}{N-\beta} \qquad (0 < \beta < N).$$

Пример 2.2. $u_{tt} - \Delta u \geq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{|x-y|^{N-\beta}} |u(y)|^q dy$

$$q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} \dfrac{N+1}{N-1-\beta} & \text{при } 0 < \beta < N-1, \\ +\infty & \text{при } N-1 \leq \beta < N. \end{cases}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k} - \sum\limits_{l \le |\alpha| \le m} D^\alpha a_\alpha(t,x,u) \ge \int\limits_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\beta-N} |u(t,y)|^q \, dy + f(t,x), \\ \dfrac{\partial^i u}{\partial t^i}(0,x) = u_i(x), \quad i = 0, \dots, k-1. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема. *Пусть* $k \ge 1$, $l \ge 1$, $N > \beta > 0$ *и функции* $u_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *и* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$ *таковы, что*

$$\liminf_{R \to \infty} \int\limits_{B_R} u_{k-1}(x)\, dx \ge 0, \quad \liminf_{R,T \to \infty} \int\limits_0^T \int\limits_{B_R} f(t,x)\, dx\, dt \ge 0.$$

Пусть a_0 *удовлетворяет оценке* $|a_0(t,x,u)| \le c_0 |u|^p$ *с некоторыми* $c_0 > 0$, $p > 0$ *и* $q > \max\{1, p\}$. *Тогда задача* (5) *не имеет нетривиальных решений при* $q \le q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } (N-\beta-l)k + l \le 0, \\ \dfrac{(kN-\beta)p + l + \beta}{(N-\beta-l)k + l}, & \text{если } (N-\beta-l)k + l > 0. \end{cases}$

Следствие

Пример (обобщенная задача John-Kato)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u \geq \displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^N} |x-y|^{\beta-N} |u(t,y)|^q \, dy + f(t,x) \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+, \\ u(0,x) = u_0(x) \text{ в } \mathbb{R}^N, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = u_1(x) \text{ в } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{6}$$

где $q > 1$ *и* $N > \beta > 0$. *Пусть функции* $u_0, u_1 \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^N)$,

$$\liminf_{R\to\infty} \int\limits_{B_R} u_1(x)\, dx \geq 0, \quad \liminf_{R,T\to\infty} \int\limits_0^T \int\limits_{B_R} f(t,x)\, dx\, dt \geq 0.$$

Тогда задача (6) *не имеет нетривиальных решений при*

$$q \leq q_{\mathrm{cr}} = \begin{cases} +\infty, & \text{если } N-1 \leq \beta < N, \\ \dfrac{N+1}{N-1-\beta}, & \text{если } 0 < \beta < N-1. \end{cases}$$

Уравнение Курамото–Сивашинского

Пусть Ω_0 – ограниченная область в $\mathbb{R}^N$ с гладкой границей $\partial\Omega_0$ и $0 \in \Omega_0$.

Пусть $\Omega = \mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}_0$. Рассмотрим задачу в Ω:

$$u_t + \Delta^2 u + \Delta u = |Du|^2 \text{ в } Q_T, \tag{7}$$

$$u = \frac{\partial}{\partial n}(u + \Delta u) = 0 \text{ на } \Gamma_T, \tag{8}$$

$$u = u_0(x) \text{ при } t = 0,\ x \in \Omega. \tag{9}$$

Здесь $Q_T = (0, T) \times \Omega$ и $\Gamma_T = (0, T) \times \partial\Omega_0$.

Задача рассматривается в пространстве $W^{1,4}_{2,\mathrm{loc}}(Q_T)$.

Теорема. *Пусть*

$$\varlimsup_{R\to\infty}\frac{I_R(u_0)}{R^{\frac{3N-2}{2}}}=+\infty \quad \text{при } N>2,$$

$$\varlimsup_{R\to\infty}\frac{I_R(u_0)}{R^2\ln R}=+\infty \quad \text{при } N=2,$$

$$\varlimsup_{R\to\infty}\frac{I_R(u_0)}{R}=+\infty \quad \text{при } N=1,$$

где $I_R(u_0) := \int\limits_{\Omega_R} u_0(x)\,dx$. *Тогда задача (7)–(9) не имеет глобального решения при всех* $t>0$. *Более того, не существует решения* $u(t,x)$ *при* $x\in\Omega_R$ *с* $R>R_*$ *и* $t>T_{R_*}$, *где* R_* *и* T_{R_*} *определяются начальными данными задачи.*

Замечание. Отметим, что асимптотический показатель поведения начальных данных u_0, а именно $\dfrac{3N-2}{2}$ для $N > 2$, является точным (неулучшаемым). Этот факт следует из соответствующего контрпримера, который показывает существование глобального решения рассмотренной задачи при

$$|u_0(x)| \le C|x|^{\frac{N-2}{2}} \text{ при } N > 2,\ R > 1,$$

что влечет

$$\left|\int\limits_{\Omega_R} u_0(x)\,dx\right| \le CR^{\frac{3N-2}{2}} \text{ для } N > 2,\ R > 1.$$

Схемы применения нелинейной емкости

I. Явная схема

$A(u) \geq f(u) \geq 0$ в $X_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, $f(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N$

Фиксируем $B_R \subset \mathbb{R}^N$ и $\psi \geq 0$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\psi(x) = 1$ при $x \in B_R$.

$$\int\limits_{B_R} f(u) \leq \int f(u)\psi \leq \int A(u)\psi \leq \mathrm{Cap}_A(B_R, \mathbb{R}^N) \to 0 \Rightarrow u = 0$$

п.в. в $\mathbb{R}^N$.

Оценка “размеров” области возможного существования решения. Схема

$A(u) \geq h \geq 0$ в $X_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$

$\int h\psi \leq \int A(u)\psi \leq \text{Cap}_A(B_R, \mathbb{R}^N)$ при $R \geq 1$

Если $\int\limits_{B_R} h \geq c_1 \cdot R^\kappa$ при $R \geq 1$ и $\text{Cap}_A(B_R, \mathbb{R}^N) \leq c_2 \cdot R^\theta$ при $R \geq 1$, то

$$c_1 R^\kappa \leq c_2 R^\theta, \qquad \kappa > \theta$$
$$R_* = \max\left\{1, (c_2/c_1)^{1/(\kappa-\theta)}\right\}$$

II. Неявная схема

Пусть существует неотрицательный функционал вида

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} E(u)\,dx, \qquad u \in X^+_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N):$$

$$E(u) \geq 0 \text{ и } \int\limits_{\Omega} E(u)\,dx = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ п.в. в } \Omega.$$

Пусть для любого решения $u \in X^+_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ неравенства $A(u) \geq 0$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega} E(u)\psi \leq c_0 \mathrm{Cap}_A(e_R, \mathbb{R}^N).$$

Тогда, если $\mathrm{Cap}_A(e_R, \mathbb{R}^N) \to 0$ при $R \to \infty$, то $u = 0$ п.в. в $\mathbb{R}^N$.

Некоторые обобщения

Энтропия k-го порядка и ее приложения

Пусть для некоторой нестационарной задачи в $\mathbb{R}^{N+1}_+$ мы имеем неравенство вида

$$\frac{\partial H_0}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial H_i}{\partial x_i} \geq W \text{ в } \mathbb{R}^{N+1}_+ \tag{10}$$

на решениях рассматриваемой задачи из соответствующего класса. Здесь $H_0, H_1, \ldots, H_N$ и W – функции, зависящие от t, x, решения u и производных порядка $k \geq 0$ и принадлежащие классу C^1 в области значений соответствующих переменных.

Пусть эти функции удовлетворяют неравенству

$$W \geq c_0(|H_0|^q + \sum_{i=1}^{N} |H_i|^{q_i}) \tag{11}$$

с некоторой постоянной $c_0 > 0$ и некоторыми $q, q_1, \ldots, q_N > 1$ при всех рассматриваемых значениях аргументов.

Определение 1. Пару функций $(H_0, \overline{H})$, где H_0 есть C^1–скалярная функция и $\overline{H} = (H_1, \ldots, H_N)$ есть C^1–вектор-функция, удовлетворяющая неравенствам (10)–(11) на решениях рассматриваемой задачи, назовем энтропией k-го порядка для исходной нестационарной задачи.

Существенной характеристикой введенного понятия является величина

$$\theta = \sum_{i=1}^{N} \frac{q'}{q'_i} + 1 - q' \text{ с } q' = \frac{q}{q-1} \text{ и } q'_i = \frac{q_i}{q_i - 1} \ (i = 1, \ldots, N). \tag{12}$$

Приложение энтропии k-го порядка к проблеме существования глобальных решений нестационарных задач

Отметим, что класс рассматриваемых решений определяется условиями

$$\begin{cases} H_0,\ H_i,\ W \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^{N+1}_+), \\ H_0|_{t=0} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \tag{13}$$

Определение 2. Обобщенное решение нестационарной задачи, удовлетворяющее условиям (13), назовем k-энтропийным, если для этого решения существует энтропия k-го порядка, удовлетворяющая неравенству (10) в смысле распределений $D'_+(\mathbb{R}^{N+1}_+)$.

Теорема. *Пусть для рассматриваемой нестационарной задачи существует энтропия k-го порядка с $\theta \le 0$.*

Тогда эта нестационарная задача не допускает нетривиального глобального k-энтропийного решения во всем $\mathbb{R}^{N+1}_+$, если начальные условия таковы, что

$$H_0|_{u(0,x)} \ge 0. \tag{14}$$

Уравнение Гамильтона–Якоби с неотрицательным гамильтонианом

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = H(u, Du), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{15}$$

Определим для этой задачи энтропию первого порядка, т.е. вектор-функцию (H_0, H_1) с $H_0 = H_0(u,p)$, $H_1 = H_1(u,p)$ $(p \Leftrightarrow Du)$, удовлетворяющую соотношениям (5)–(6) на гладких решениях уравнения (15).

Выполнение неравенства (10) при всех значениях соответствующих аргументов в силу (11) влечет соотношение

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial p}. \tag{16}$$

Выбирая

$$H_0(u,p) = u^a |p|^b, \qquad u \geq 1,\ p \in \mathbb{R},$$

получаем

$$\frac{\partial H_1}{\partial p} = b u^a |p|^{b-2} p \frac{\partial H}{\partial p}.$$

Отсюда для

$$W(u,p) := \frac{\partial H_0}{\partial t} - \frac{\partial H_1}{\partial x} \qquad \text{с} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = H(u,p),\ p = \frac{\partial u}{\partial x}$$

находим

$$W(u,p) = a(1-b)u^{a-1}|p|^b H(u,p) + b(b-1)u^{a-1} p \int^p (aH(u,s) + uH_u(u,s))|s|^{b-2} ds.$$

Применение предыдущей теоремы приводит к следующему результату.

Теорема. *Пусть неотрицательный C^1-гамильтониан такой, что существуют параметры a и $b \in \mathbb{R}$, при которых для функций H_0, H_1 и W, определенных выше, выполнено неравенство*

$$W \geq c_0(|H_0|^q + |H_1|^{q_1})$$

при всех $u \geq 1$ и $p \in \mathbb{R}$ с некоторыми $c_0 > 0$, $q > 1$ и $q_1 > 1$ такими, что

$$\theta = \frac{q'}{q'_1} + 1 - q' \leq 0.$$

Тогда не существует нетривиального энтропийного глобального решения задачи Коши (15) с C^1–начальной функцией $u_0(x) \geq 1$.

Пример. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u^{\mu}|Du|^{\lambda}, & (x,t) \in \mathbb{R}^2_+, \\ \\ u(0,x) = u_0(x) \geq 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{17}$$

с $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$. Ограничимся случаем $\lambda > 1, \quad \lambda + \mu > 1$. Тогда при параметрах a и b таких, что $b > 1, \quad a + b + \lambda + \mu - 1 \leq 0$, выполнены все условия теоремы с

$$q = \frac{b+\lambda}{b}, \; q_1 = \frac{b+\lambda}{b+\lambda-1} \text{ и } \theta = \frac{1-b}{\lambda} < 0.$$

Следовательно, не существует энтропийного нетривиального решения задачи Коши (17) при всех $t > 0$. В частности, не существует нетривиального (т.е. $u \not\equiv$const) C^2_x–решения этой задачи при всех $t > 0$.

Математическая модель разрушения крыши

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = -k|u|^{q-1}u + h(x) \quad \text{в } \mathbb{R}^N, \quad k>0$$

Основное стационарное состояние: $u \leq 0$ (ось u направлена вниз)

$$-\mathrm{div}\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}} = k|u|^q + h(x),\ h(x) \equiv H_0 \text{ в } \mathbb{R}^N.$$

Тогда при $R > R_\infty$ не существует решения в шаре B_R.

Для R_∞ имеем оценку

$$R_\infty \leq R_* = \left(\frac{c_N}{H_0}\right)^{\frac{1}{N}}.$$

В докладе были использованы результаты, полученные совместно с профессором E. Mitidieri.

Дальнейшее развитие:

Критические показатели $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ регулярность решений $\longrightarrow$

$\longrightarrow$ 19-я проблема Гильберта

Давид Гильберт – Математические проблемы, 1900

“. . . существо математической науки таково, что каждый действительный успех в ней идет рука об руку с нахождением более сильных вспомогательных средств и более простых методов, которые облегчают понимание более ранних теорий и устраняют затруднительные старые рассуждения...”