

• Без $k=2$: представление в $V_\ell(Z_1(N))$.

λ -компонование:

• $k > 2$ $E_{X_1(N)}$ $V_{f,\lambda} = V_\ell(Z_1(N)) \otimes_{T_2(\Gamma_1(N))} \mathbb{Q}(\phi)_\lambda$ *нормально*

$$\begin{array}{ccc} & & \downarrow \pi \\ & & Y_1(N) \hookrightarrow X_1(N), \quad \tilde{H}^*(Y, F): \text{Im}(H_\ell^*(Y, F) \rightarrow H^*(Y, F)) \\ & & \downarrow \\ & & U := R^1\pi_* \mathbb{Z}, \quad 0 \rightarrow \omega \rightarrow U \otimes \mathcal{O}_Y \rightarrow \omega' \rightarrow 0 \end{array}$$

• Представление (Мумфорд): $X = X_1(N)$ *неизменяема*

$$H^0(X, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1) \oplus H^0(X, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1) \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^1(Y, \text{Sym}^{k-2} U) \otimes \mathbb{C}$$

$$0 \rightarrow \text{Sym}^{k-2} U \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{Sym}^{k-2} U \otimes \mathcal{O}_Y \xrightarrow{d} \text{Sym}^{k-2} U \otimes \Omega^1_Y \rightarrow 0$$

$$\delta: H^0(Y, \text{Sym}^{k-2} U \otimes \Omega^1_Y) \rightarrow H^1(Y, \text{Sym}^{k-2} U) \otimes \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{ccc} & \uparrow & \nearrow \uparrow \\ & H^0(Y, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1_Y) \oplus H^0(Y, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1_Y) & \end{array}$$

$$H^0(E, \Omega^1) \rightarrow H^1(E, \mathbb{C})$$

$$H^0(X, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1_X) \oplus \dots \xrightarrow{\sim} \tilde{H}^1(Y, \text{Sym}^{k-2} U) \otimes \mathbb{C}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ H^0(Y, \omega^{k-2} \otimes \Omega^1_Y) \oplus \dots & \rightarrow & H^1(Y, \text{Sym}^{k-2} U) \otimes \mathbb{C} \end{array}$$

Вместо $V_\ell(Z_1(N))$ берём $V_{f,\lambda} :=$

$$= (H_{\ell,t}^1(X_1(N))_{\mathbb{Q}}, j_* S^{k-2} R^1\pi_* \mathbb{Q}_\ell) \otimes_{T_\ell(\Gamma_1(N))} \mathbb{Q}(\phi)_\lambda^*$$

$$\det(1 - \varphi_p t \cap V_{f,\lambda}) = 1 - \alpha_p(f) t + E_f(p) p^{k-1-2} t^2.$$

• Scholl: *modular, abelian* $E_{X_1(N)/X_2(N)}^{k-2}$
1990 *Encry, Motives for modular forms.*

Зам. $T_p, \langle d \rangle \triangleleft \tilde{H}^1(Y, W)(\mathbb{Q})^{\text{an}}, \text{Sym}^{k-2} U$ - р-адическая
 $\Rightarrow T_p = \mathbb{Z}[T_p, \langle d \rangle] \subset \text{End}(S_k(N)_{\mathbb{C}})$ - конечная
 локальная $\mathbb{Z}$ -алгебра ($\Rightarrow$ её собственные значения
 целые алгебраические). (целостная $\mathbb{Z}[\frac{1}{N}]$,
 следовала в модуль)

$$E_4 = 1 + \frac{-8}{B_4} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$

Примечание: Построенные при χ числа. Если $k-1$,
 $A = E_{\chi_1}^{k-2} \hookrightarrow E_{\chi_1}^{k-2} \leftarrow A^*$ м.л. собственные
 значения $\varphi_p \forall p \nmid N$
 $\downarrow$
 $Y_1(N)$
 равны по модулю $p^{\frac{k-1}{2}}$ для
 любого χ

$U \otimes U \rightarrow R^2 \pi_* \mathbb{Z}$ - гл.м. туннели
 $\tilde{H}^1(Y, \text{Sym}^{k-2} U)$ самодвойственен
 $\tilde{H}^1(Y, \text{Sym}^{k-2} R^1 \pi_* \mathbb{Q}_\ell)$ - прямое слагаемое в
 $H^{k-1}(A, \mathbb{Q}_\ell)$ - фактор $H^{k-1}(A^*, \mathbb{Q}_\ell)$

Функция Рамануджана
 $\Delta = q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24}$ - лежит в $S_{12}(1) \subset S_{12}(N)$

$\sum' \tau(n) q^n \Rightarrow \frac{|\tau(p)| \leq 2p^{\frac{11}{2}}}{\tau(p)}$
 • $p \equiv 1 \pmod{24}$, тогда $\text{Im } \rho \in \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \pmod{24}$
 $F_p \equiv \begin{pmatrix} p' & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{24} \Rightarrow \tau(p) \equiv p' + 1 \pmod{24}$

- Вес = 1, пр.-я Артина.

Теорема (Делиль-Серр): Пусть $f \in S_1(N)$ -норм.

Тенке-собственная, $\varepsilon_f(-1) = -1$, тогда

$\exists \rho_f: G_{\mathbb{Q}} \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$, неприводимое, н.р.

$$\chi(\rho_f(\varphi_p)) = 1 - a_p t + \varepsilon_f(p) t^2 \quad (\forall p \nmid N)$$

Теор. 1) Построить систему модульных

представлений $\{G_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\rho_{f, \ell}} GL_2(\mathbb{F}_{\ell})\}$,

где $\ell \in L \leftarrow$ бесконечное мн-во простых

2) Доказать оценку $|\text{Im } \rho_{f, \ell}| \leq C \quad \forall \ell \in L$.

3) Показать $\ell \in L$.

Ряды Эйзенштейна.

$$\text{Опр. } E_k = \frac{1}{2S(k)} \sum_{\substack{(m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(m\tau+n)^k} \quad \left(= \frac{1}{2} \sum_{(m,n)=1} \frac{1}{(m\tau+n)^k} \right)$$

$$\text{Теор. } E_k = 1 + \frac{-2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n, \quad \sigma_i(n) = \sum_{d|n} d^i.$$

Теорема von Staudt-Clausen: $B_k + \sum_{p-1|k, p \text{ простое}} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ если $\ell-1|k$, то $E_k \equiv 1 \pmod{\ell}$, возмем такое ℓ .

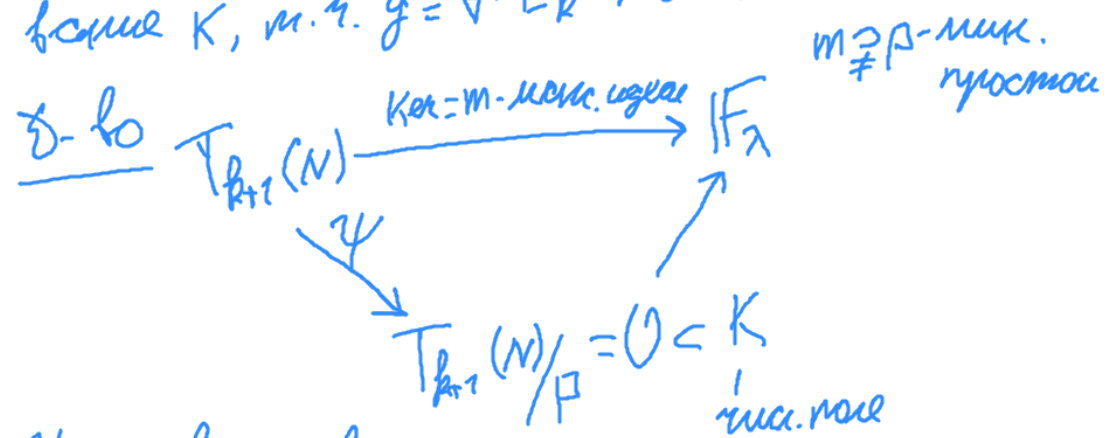
$$f \cdot E_k \in S_{k+1}(N), \quad f \cdot E_k \equiv f \pmod{\ell}, \quad f \cdot E_k = \sum b_n q^n,$$

$$f = \sum a_n q^n; \quad T_p(f \cdot E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{pn} q^n + \varepsilon(p) p^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

$$T_p(f) \pmod{\ell} \equiv a_p \cdot f.$$

выберем $\lambda | l$, $f \cdot E_k$ - Тензорное произведение mod λ .

Лемма $\exists g \in S_{k+1}(N)$, нормализованная Тензорно-симметричная, и $K = Q(f) \cdot Q(g)$, и $\lambda' | \lambda$ - нормализованная K , т.е. $g \equiv f \cdot E_k \pmod{\lambda}$.



ψ соответствует формуле g , которая искома.

$\exists \rho_{g, \lambda'} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(K(g)_{\lambda'})$ - соотв ℓ -адическое.
 $\chi(\psi_p) = 1 - a_p(g)t + \varepsilon(p)p^k t^2$.

$\Rightarrow \bar{\rho} = (\rho_{g, \lambda'} \pmod{\lambda'})^{ss}$, однократное св-во:
 $\chi(\psi_p, \bar{\rho}) = 1 - a_p(f)t + \varepsilon(p)t^2 \in \mathbb{F}_{\lambda'}[t]$.
 Зам. они неразветвлены вне Nl .
 $a_p \pmod{\lambda'} \in \mathcal{O}_{Q(f)} \pmod{\lambda'}$, т.е. $\in \mathbb{F}_\lambda$.
 Поэтому, $\mathcal{L} = \{\ell, \text{ т.е. } \ell \text{ не делит } Nl\}$, мы получаем
 $\rho_{f, \ell} : G_{\mathbb{Q}} \longrightarrow GL_2(\mathbb{F}_\ell) \quad \forall \ell \in \mathcal{L}$.

Теор. $\exists A > 0 : \forall \ell \in \mathcal{L}, |\text{Im } \rho_{f, \ell}| < A$.

(Используется оценка Римана)

$$\sum_{p \nmid N} |a_p|^2 p^{-s} = \log\left(\frac{1}{s-1}\right) + O(1).$$

$s \rightarrow 1^+$