

Локальные формулы Плюккера
для ортогональных групп.

Классические формулы Плюккера.

S -голоморфные кривые

$$f_i: S \rightarrow \mathbb{P}^n$$

рассмотрим локальный подъем f_i
в окрестности $p \in S$ в-р-функцией

$$\psi(z) = (\psi_0(z), \dots, \psi_n(z))$$

и определим k -ую ассоциированную

с f_i кривую в $G_k(k, n+1)$

$$f_k: S \rightarrow G_k(k, n+1) \subset P(\bigwedge^k \mathbb{C}^{n+1})$$

$$f_k(z) = [\psi(z) \wedge \psi'(z) \dots \wedge \psi^{(k)}(z)]$$

на $P(\bigwedge^k \mathbb{C}^{n+1})$ имеется стандартная
метрика FS и соответствующая ей
форма, которая определяется образом

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \partial \bar{\partial} \log \|z\|^2$$

Пусть Θ_k - кривизна, соотв форме φ_k ,
тогда если $\Theta := (\Theta_k)$, $\varphi := (\varphi_k)$, то

$$\Theta = C \varphi, \text{ где } C - \text{матрица Картана серии } A_n$$

Локальные формулы Плюккера по Гивенталю

$f: S \rightarrow F$ - голоморфная кривая на
многообразии флагов $F \cong G/B$

Определим n -мерное распределение $\mathcal{N}$ на F :

$$\mathcal{N}(B) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, [b, b]] \subset \mathfrak{b} \mid b \in T_B F\}$$

$\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$

Пример: $G = SL(n+1, \mathbb{C})$, B - стандартная
борелевская
элемент $\mathfrak{g}$ $\mathcal{N}(B)$:

$$\begin{pmatrix} * & & & & \\ 0 & * & & & \\ 0 & 0 & * & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & & * \end{pmatrix}$$

Потребуем, чтобы кривая $f: S \rightarrow F$ была
интегральной кривой распределения $\mathcal{N}$.

На многообразии F имеется набор векторных
расслоений $\mathcal{L}_i$, $i = \overline{1, n}$, которые соотв.
функ. характеризуют $\mathfrak{g}$ группы B .

Функ. представления V_i группы G
реализуется в пр-ях $H^0(F, \mathcal{L}_i)$

$$\pi: G/B \rightarrow \mathbb{P}(V_i), \quad [g] \mapsto [g \cdot \sigma_i]$$

σ_i - в-р старшего
веса

← K-компактная форма G

на пр-вах V_i имеется K -инвариантная
эрмитова форма $(\cdot, \cdot) : V_i \times V_i \rightarrow \mathbb{C}$, которая
определяет метрику FS на $\varphi(V_i)$.

обозначим через $\varphi_i := f^* \pi_i^* (FS)$ индуциров.
метрику на S , а через θ_i — кривизну.

Th Если голоморфная кривая $f: S \rightarrow F$ является интегральной кривой N , то

$$(\theta_i) = C(\varphi_i), \text{ где}$$

C - матрица Кармана группы G.

Пример: $G = SL(n+1, \mathbb{C})$

$$S \rightarrow G/B \begin{matrix} \nearrow IP(V_i) \\ \searrow G(i, n+1) \rightarrow IP(\Lambda^i \mathbb{C}^{n+1}) \end{matrix}$$

$$V_i = \Lambda^i \mathbb{C}^{n+1} \text{ - функ. представления } SL(n+1, \mathbb{C})$$

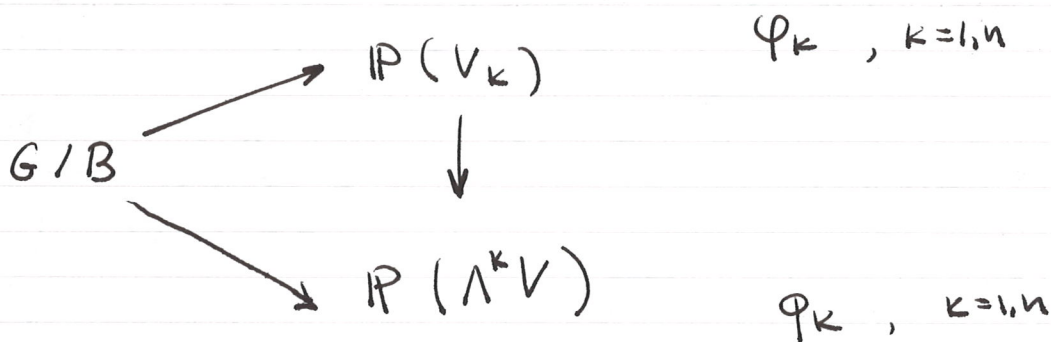
Пример: $G = Sp(2n, \mathbb{C})$, $V = \mathbb{C}^{2n}$, $Q: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 невырожд. кос.
 форма.

фундамент. представление G :

$$\varphi_k: \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^{k-2} V$$

$$\varphi_k(\sigma_1 \wedge \dots \wedge \sigma_k) = \sum_{i < j} Q(v_i, v_j) (-1)^{i+j-1} \sigma_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\sigma_i} \wedge \dots \wedge \widehat{\sigma_j} \wedge \dots \wedge \sigma_k$$

$V_k := \ker \varphi_k$ - функ. предст.



$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \\ \sigma_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\varphi_i = \varphi_i, \quad i=1, n$$

$$\varphi_{n-1} = \varphi_{n+1}$$

Получельский '92

$$G/B \rightarrow G/P_i(B) \rightarrow IP(V_i)$$

$$\pi_i : G/B \rightarrow IP(V_i)$$

$$\textcircled{1} \mathcal{N}(B) = \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{N}_i(B)$$

$$\textcircled{2} d\pi_i(\mathcal{N}_j) = 0, \text{ при } i \neq j, \text{ т.к. } P_j(B) \subset P_i(B)$$

$$\textcircled{3} \varphi_i = f^* \theta(\mathcal{L}_i)$$

$$\textcircled{4} \mathcal{Y}_i = f^* \theta(\mathcal{N}_i)$$

$$\textcircled{5} \mathcal{N}_i = \bigotimes_j \mathcal{L}_j^{\otimes a_{ij}}$$

Локальные формулы Пуоккера для $SO(2n, \mathbb{C})$

$\dim V = 2n$, не-симметр. билинейная форма макс

Многообразие изотропных флагов имеет 2 компоненты связности F_+ и F_-

Пусть B стабилизирует $\langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \subset \langle e_1, e_n \rangle$
из F_+

При $i = 1, \dots, n-2$ функ. представления G реализуются в $\Lambda^i V$

оставшиеся два представления V_{n-1} и V_n реализуются на модулях подалгебры $C(Q)$ even алгебры Клиффорда $C(Q)$.

Данные представления называются полусимметричными. Переобозначим эти представления через S_+ и S_-

Пусть $H_i := E_{i,i}$, $i = \overline{1, n}$ $L_i(H_j) = \delta_{ij}$
 $L_i \in \mathfrak{h}^\vee$

Для определенности будем считать

$$\omega_+ := \frac{1}{2} (L_1 + \dots + L_n) \text{ а. вес } S_+$$

$$\omega_- := \frac{1}{2} (L_1 + \dots + L_{n-2} + L_{n-1} - L_n) \text{ а. вес } S_-$$

Таким образом при $k=1, \dots, n-2$

$$\begin{array}{ccc}
 S & \xrightarrow{f} & G/B \\
 & \nearrow \pi_k & \uparrow \\
 & & P(V_k) \\
 & \searrow p_k & \parallel \\
 & & P(\Lambda^k V)
 \end{array}$$

Для первых $n-3$ компонент в-ра ϑ

$$\vartheta_k = -\varphi_{k-1} + 2\varphi_k - \varphi_{k+1}$$

$$\varphi_k := f^* \circ p_k^* (FS)$$

$$p_k^* (FS) = \pi_k^* (FS)$$

$$\theta_k = -\varphi_{k-1} + 2\varphi_k - \varphi_{k+1}$$

Для $n-2$ компоненты в-ра ϑ :

$$\vartheta_{n-2} = -\varphi_{n-3} + 2\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}$$

однако: $\Lambda^{n-1} V$ уже не явл функ. предст.
 $G = SO(2n, \mathbb{C})$

$\Lambda^{n-1} V$ - непр. предст. G со старшими весами
 $L_1 + \dots + L_{n-1}$

УТВ:

$$\begin{array}{ccc}
 & & P(S_+) \times P(S_-) \\
 & \nearrow (\pi_+, \pi_-) & \\
 S \xrightarrow{f} G/B & & \downarrow \delta \\
 & \searrow p_{n-1} & P(S_+ \otimes S_-) \\
 & & \uparrow e \\
 & & \Lambda^{n-1} V
 \end{array}$$

Док-во:

$$S_+ \otimes S_- = \Lambda^{n-1} V \oplus_{j \geq 0} V \omega_{n-2j-1}, \text{ где}$$

$$\omega_i := L_1 + \dots + L_i$$



из умб, в частности, следует:

$$p_{n-1}^*(FS) = \pi_+^*(FS) + \pi_-^*(FS)$$

вернемся к $n-2$ компоненте в-ра $\mathcal{O}$:

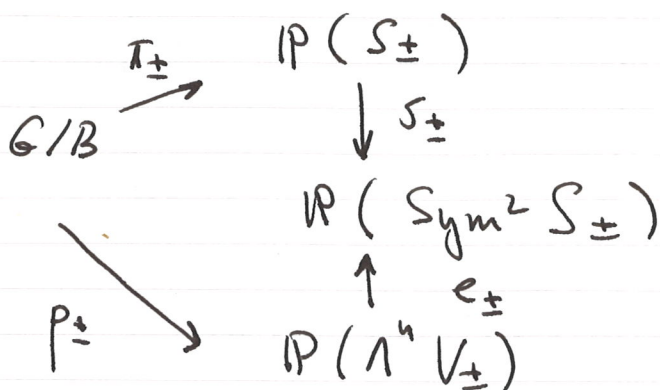
$$\mathcal{O}_{n-2} = -\varphi_{n-3} + 2\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}$$

$$\varphi_{n-1} := f^* \circ p_{n-1}^*(FS) = f^* \circ \pi_+^*(FS) + f^* \circ \pi_-^*(FS)$$

$$\Theta_{n-2} = -\varphi_{n-1} + 2\varphi_{n-2} - \varphi_+ - \varphi_-$$

$$\sigma_{n-1} = -\phi_{n-2} + 2\phi_{n-1} - \phi_n$$

уб:



Док. бс:

$$\text{Sym}^2 S_{\pm} = \wedge^n V_{\pm} \oplus \bigoplus_{j>0} \wedge^{n-j} V$$

из уб, в частности, следует:

$$p_{\pm}^*(FS) = 2\pi_{\pm}^*(FS)$$

$$\text{Пусть } i_{\pm}: G/B \rightarrow \text{Fl}(V)$$

$$i_{\pm}^*(\sigma_{n-1}) = -i_{\pm}^*(\phi_{n-2}) + 2i_{\pm}^*(\phi_{n-1}) - i_{\pm}^*(\phi_n)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \overset{\nwarrow}{\dots} & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$$

$\nwarrow$ $n-1$ строка
 $\leftarrow$ $n-2$ строка

$$\varphi_{n-1} = \varphi_+ + \varphi_-$$

$$\varphi_n = 2 \varphi_{\pm}$$