# СТЕПЕНИ ПРЕДСТАВИМОСТИ ПОРЯДКОВ

*Р.Н. Дадажанов, С.К. Джавлиев, Н.Х. Касымов*

Национальный Университет Узбекистана им М. Улугбека

Ташкент, 20 мая 2021 г.

# 3 тезиса о приоритетности негативности над позитивностью

## Тезис 1

*Алгоритмически определяемые топологические окрестности, наличие которых позволяет решать ключевую проблему распознавания в алгоритмически заданных сложных системах. Для негативных (и, в более общем случае, для вычислимо отделимых) эквивалентностей топологические пространства, порожденные вычислимыми подмножествами будут $T_4$-пространствами.*

## Тезис 2

*Представимость над эквивалентностями.*

## Тезис 3

*Структурная теория вычислимо отделимо нумерованных систем – нумерованная система вычислимо отделима тогда и только тогда, когда она аппроксимируется негативными.*

Следуя Ю.Л. Ершов [1], Ю.Л. Ершов [2], С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов [3], приведем основные определения.

**Определение 1.1.**

*Алгоритмическим представлением счетной системы* $\mathfrak{M} = \langle M; \Sigma \rangle$ *эффективной сигнатуры* $\Sigma$ *называется всякое такое отображение* $\mu$ *множества натуральных чисел* $\omega$ *на основное множество* $M$ *системы* $\mathfrak{M}$, *для которого существует эффективное семейство* $F_\Sigma$ *вычислимых функций, представляющих* $\Sigma$*-операции системы* $\mathfrak{M}$ *в нумерации* $\mu$, *т.е. всякая операция* $\sigma \in \Sigma$ *представляется соответствующей ей такой вычислимой функцией* $f_\sigma \in F_\Sigma$, *что* $\forall \overline{x}\ (\sigma\mu(\overline{x}) = \mu f_\sigma\ (\overline{x}))$.

[1] Ю.Л. Ершов. Теория нумераций. М., Наука, 1977.

[2] Ю.Л. Ершов. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М., Наука, 1980.

[3] С.С. Гончаров, Ю.Л. Ершов. Конструктивные модели. Новосибирск, Научная книга, 1999.

**Определение 1.2.**

*Если $\mu$ – алгоритмическое представление системы $\mathfrak{M}$, то пара $(\mathfrak{M}, \mu)$ называется нумерованной системой.*

Все рассматриваемые нами гомоморфизмы нумерованных систем являются вычислимыми, т.е. поддерживаются вычислимыми на представлениях функциями в следующем смысле.

**Определение 1.3.**

*Гомоморфизм $\varphi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ называется вычислимым гомоморфизмом нумерованных моделей $(\mathfrak{M}, \mu) \to (\mathfrak{N}, \nu)$, если существует такая вычислимая функция $f$, что $\varphi\mu = \nu f$.*

Далее под гомоморфизмами нумерованных систем мы понимаем их морфизмы, т.е. мы работаем в категории нумерованных систем с морфизмами в качестве эффективных на номерах гомоморфизмов.

# Предварительные сведения

Ядром представления $\mu$ системы $\mathfrak{M}$ будем называть эквивалентность $\{\langle x, y\rangle | \mu x = \mu y\}$. Если $\mu$ – представление, то его ядро будем обозначать через $ker(\mu)$.

Пусть $\eta$ – фиксированная эквивалентность на $\omega$ и $\mathfrak{M}$ – система, обладающая представлением с ядром равным равным $\eta$. Тогда систему $\mathfrak{M}$ будем называть представимой над $\eta$ (или $\eta$-системой).

При фиксированной системе классической является проблема изучения различных ее представлений и соотношений между ними, в частности, проблема существования хороших представлений (например, вычислимых) и соотношений между ними (в т.ч. единственности, с точностью до вычислимого изоморфизма, представления).

С другой стороны, можно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства систем, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории представлений систем в рамках теоретической информатики.

## Определение 1.4.

*Нумерованная система, ядро и все основные отношения которой вычислимы (перечислимы, коперечислимы) называется вычислимой (позитивной, негативной).*

Если $(\mathfrak{M}, \mu), (\mathfrak{N}, \nu)$ – две нумерованные системы, то скажем, что $(\mathfrak{M}, \mu)$ сводится к $(\mathfrak{N}, \nu)$, если существует вычислимый изоморфизм из $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$.

Пусть $\eta_0, \eta_1$ – две эквивалентности на $\omega$. Будем говорить, что $\eta_0$ $m$-сводится к $\eta_1$ (в обозначениях $\eta_0 \leqslant_m \eta_1$), если существует такая вычислимая функция $g$, что $x = y \pmod{\eta_0} \Leftrightarrow g(x) = g(y) \pmod{\eta_1}$ и $\forall y \exists x (g(x) = y \pmod{\eta_1})$. Если $\eta_0 \leqslant_m \eta_1 \wedge \eta_1 \leqslant_m \eta_0$, то полагаем $\eta_0 \equiv_m \eta_1$. Тогда $\equiv_m$ – эквивалентность, на классах которой корректно определен индуцированный $\leqslant_m$ частичный порядок, который мы будем обозначать тем же знаком. Как обычно, $m$-степенью эквивалентности $\eta$ (в обозначениях $d_m(\eta)$) назовем множество $\{\eta' | \eta \equiv_m \eta'\}$.

# Линейные порядки с вычислимыми эндоморфизмами

Известно [4], что существует позитивно представимый линейный порядок, не имеющий вычислимых представлений. С другой стороны [5], всякий негативно представимый линейный порядок имеет вычислимое представление. Поэтому принципиален вопрос о существовании вычислимых представлений для негативно представимых линейных порядков с эндоморфизмами.

**Теорема 2.1.**

*Существует негативно представимый линейный порядок с двумя эндоморфизмами, не имеющий позитивных представлений.*

**Следствие 2.1.**

*Существует негативно представимый линейный порядок с эндоморфизмами, не имеющий разрешимых представлений.*

[4] L. Feiner. Hierarchies of Boolean algebras. Journal of Symbolic Logic, **35** (2), 363–373, 1970.

[5] Н.Х. Касымов, Р.Н. Дадажанов. Негативные плотные линейные порядки. Сиб. матем. журн., **58** (6), 1306–1331, 2017.

# Линейные порядки с вычислимыми эндоморфизмами

Хрестоматийным примером порядка и эндоморфизма на нем является натуральный ряд с естественным порядком и функцией следования. Алгебра $S = \langle \omega; s \rangle$ (без отношения порядка) вычислимо устойчива относительно позитивных представлений, т.е. всякое ее позитивное представление вычислимо изоморфно простейшему. С другой стороны [6], существует невычислимое негативное представление этой алгебры. На этом фоне важность порядка с алгоритмической точки зрения демонстрирует следующее

**Предложение 2.1.**

*Всякое негативное представление естественного порядка $S_{\leq}$ натуральных чисел с функцией следования является разрешимым.*

[6] B. Khoussainov, T. Slaman, P. Semukhin. $\prod_1^0$-Presentasions of Algebras. Archive for Mathematical Logic, **45** (6), 769–781, 2006.

**Предложение 3.1.**

*Если линейный порядок позитивно (негативно) представим над негативной (позитивной) эквивалентностью, то и порядок, и эквивалентность алгоритмически разрешимы.*

Далее, с учетом предложения 3.1, выражение "негативно (позитивно) представим над негативной (позитивной) эквивалентностью" часто будем сокращать до "представим над негативной (позитивной) эквивалентностью", полагая по умолчанию, что подразумевается негативная (позитивная) представимость порядка над негативной (позитивной) эквивалентность.
Нас будет интересовать в первую очередь представимость порядков над негативными эквивалентностями. Краткий обзор результатов о представимости порядков над позитивными эквивалентностями будет приведен далее.

Для негативной эквивалентности $\eta$ обозначим через $L(\eta)$ класс всех линейных порядков, негативно представимых над $\eta$, т.е. типов изоморфизмов таких структур, и на множестве $\Pi$ всех негативных эквивалентностей на $\omega$ введем следующее бинарное отношение $\leqslant_{ln}$:

$$\eta_1 \leqslant_{ln} \eta_2 \Leftrightarrow L(\eta_1) \subseteq L(\eta_2),$$

которое является предпорядком на множестве $\Pi$ и его симметричное замыкание $\equiv_{ln-e}$ – есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на классы $\equiv_{ln}$-эквивалентности. Частичный порядок $\langle \Pi / \equiv_{ln}; \leqslant_{ln} \rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков*, а его элементы – *степенями негативной представимости линейных порядков*. Далее, если будет ясно о чем идет речь, структуру негативной представимости линейных порядков будем называть просто структурой негативной представимости, а ее элементы – степенями.

Для сокращения обозначений через $d_{ln}(\eta)$ будем обозначать степень негативной представимости эквивалентности $\eta$. Будем также говорить, что линейный порядок представим над заданной степенью, если он представим над некоторой (а значит и над любой) эквивалентностью из этой степени.

Содержательно, $\equiv_{ln}$-эквивалентность двух негативных эквивалентностей означает совпадение представимых над ними типов изоморфизмов линейных порядков.

Строение структуры негативной представимости линейных порядков отражает алгоритмическую природу эквивалентностей с точки зрения предоставляемых ими возможностей для реализации над ними важных объектов, к каковым безусловно относятся и линейные порядки. Ясно, что чем выше относительно $\leqslant_{ln}$ расположена $\equiv_{ln}$-степень, тем больше реализационных возможностей она предоставляет. Однако, априори нельзя утверждать, что $\leqslant_{ln}$-верхние $\equiv_{ln}$-степени всегда предпочтительней $\leqslant_{ln}$-нижних.

Так, к примеру, над любой негативной эквивалентностью представим вполне содержательный класс линейных порядков и если ставится задача определения максимально "рафинированного" класса $\tau$-подобных ($\tau$ – тип упорядочения рациональных чисел) порядков, то может оказаться, что реализации целесообразнее выбирать в нижних $\equiv_{ln}$-степенях. Такой подход может быть также полезным в рамках теоретической информатики.

Отметим, что конечные негативные эквивалентности порождают изолированные степени в структуре негативной представимости. С дескриптивной точки зрения разумно рассмотрение порядков над бесконечными эквивалентностями. Именно в предположении отсутствия конечных степеней, мы и будем проводить наши рассмотрения. Отбросив все $\equiv_{ln}$-классы, содержащие конечные эквивалентности, получим ограничения отношений $\leqslant_{ln}, \equiv_{ln}$ на бесконечные негативные эквивалентности. Всюду далее структура негативной представимости рассматривается в контексте отсутствия степеней, содержащих конечные эквивалентности.

Будем говорить, что линейный порядок $\langle L; \preceq, \varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots \rangle$ с эндоморфизмами $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \ldots$ вычислимо (позитивно, негативно) *представим над эквивалентностью* $\eta$ на множестве натуральных чисел $\omega$, если существует такая его нумерация $\nu$ с нумерационной эквивалентностью равной $\eta$, в которой все эндоморфизмы вычислимы, а множества $\nu$-номеров отношений равенства и порядка – разрешимы (позитивны, соответственно негативны).

Для негативной эквивалентности $\eta$ через $L_e(\eta)$ обозначим класс всех линейных порядков с эндоморфизмами, негативно представимых над $\eta$ и на множестве $\Pi$ введем следующее бинарное отношение $\leqslant_{ln-e}$:

$$\eta_1 \leqslant_{ln-e} \eta_2 \Leftrightarrow L_e(\eta_1) \subseteq L_e(\eta_2),$$

которое является предпорядком на множестве $\Pi$ и его симметричное замыкание $\equiv_{ln-e}$ – есть эквивалентность, факторизация по которой разбивает множество всех негативных эквивалентностей на $\equiv_{ln-e}$-классы эквивалентности.

Частично упорядоченное множество $\langle \Pi / \equiv_{ln-e}; \leqslant_{ln-e} \rangle$ будем называть *структурой негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами*, а его элементы – *степенями негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами*.

Пусть $\Sigma$ – множество бесконечных позитивных эквивалентностей и отношение $\eta_1 \leqslant_{lp} \eta_2$ на $\Sigma$ означает, что всякий линейный порядок, позитивно представимый над $\eta_1$, позитивно представим и над $\eta_2$.

Совершенно аналогично негативному случаю, путем симметричного замыкания предпорядка $\leqslant_{lp}$ и факторизации относительно полученного отношения эквивалентности на множестве всех бесконечных позитивных эквивалентностей, получим структуру позитивной представимости линейных порядков $\langle \Sigma / \equiv_{lp}; \leqslant_{lp} \rangle$, которая оказалась совершенно отличной от структуры негативной представимости линейных порядков.

Наконец, введем отношение $\eta_1 \leqslant_{lp-e} \eta_2$ на множестве позитивных эквивалентностей, которое означает, что всякий линейный порядок с эндоморфизмами, позитивно представимый над $\eta_1$, является позитивно представимым и над $\eta_2$.

# Степени линейных порядков с эндоморфизмами

Аналогично определяется структура позитивной представимости линейных порядков с эндоморфизмами $\langle \Sigma / \equiv_{lp-e}; \leqslant_{lp-e} \rangle$.

**Предложение 3.2.**

*Пусть $\eta_e$ – совершенная позитивная эквивалентность со сжатой характеристической трансверсалью. Тогда степень $d_{lp}(\eta_e)$ – наименьший элемент в структуре lp-степеней.*

Таким образом, непустое множество всех тех позитивных эквивалентностей, над которыми вообще не представим никакой линейный порядок образуют одну $lp$-степень позитивной представимости и эта степень есть $d_{lp}(\eta_{ersh})$, которая определяет пустой класс линейных порядков, представимых над ней. Очевидно, что эта степень является наименьшим элементом в структуре позитивной представимости линейных порядков, что отмечалось в [7], хотя, в указанной работе не использовалась эквивалентность $\eta_e$.

[7] E. Fokina, B. Khoussainov, P. Semukhin, D. Turetskiy. Linear Orders Realized by C.E. Equivalence Relations. Journal of Symbolic Logic, **81** (2), 463–482, 2016.

В этой же работе, в частности, показано, что структура $\langle \Sigma / \equiv_{lp}; \leqslant_{lp} \rangle$ не имеет наибольшего элемента, но имеет максимальный (им будет степень $d_{lp}(id\ \omega)$), существует бесконечно убывающая цепь степеней позитивной представимости и имеются несравнимые степени (аналог теоремы Фридберга-Мучника для степеней позитивной представимости линейных порядков).
В рамках идеологии теоретической информатики вместо линейных порядков можно также рассматривать другие объекты, в т.ч. универсальные алгебры (не фиксируя сигнатуру), которые широко используются в абстрактных типах данных и объектно ориентированном программировании. При этом, разумные расширения класса рассматриваемых эквивалентностей также позволяют получать структуры с содержательными свойствами.
Однако, по-видимому, именно низкие степени могут представлять существенный интерес с точки зрения теоретической информатики.

# Степени линейных порядков с эндоморфизмами

## Следствие 3.1.

*Существуют несравнимые степени негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами.*

## Следствие 3.2.

*Частично упорядоченное множество степеней* $\langle \Pi / \equiv_{ln-e}; \leqslant_{ln-e} \rangle$ *не является верхней полурешеткой.*

## Следствие 3.3.

*Существует максимальная степень негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами.*

## Следствие 3.4.

*Структура степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами является бесконечной.*

# Стандартные представления

Покажем, что вложение степеней $\equiv_{In-e} \subset \equiv_{In}$ является собственным. Для этого рассмотрим подробнее связи между понятиями конечной порожденности, порожденности конечным множеством элементов алгебры бесконечной сигнатуры и стандартностью алоритмических представлений алгебр.

**Определение 4.1.**

*Алгебра называется конечно-порожденной (локально конечной), если существует ее конечно-порожденное конечное обеднение (соответственно, всякое ее конечное обеднение локально конечно).*

Для конечных сигнатур это определение совпадает с классическим.

**Определение 4.2.**

*Алгебра называется порожденной конечным множеством элементов, если она порождается конечным множеством элементов и множеством всех своих операций.*

Определение 4.2 существенно шире определения 4.1, т.к. из конечной порожденности следует порожденность конечным числом элементов. Обратное неверно. Например, Пусть $\mathfrak{A} = \langle \omega; f_0, f_1, \ldots \rangle$, где $\forall n, x(f_n(x) = n)$. Тогда алгебра $\mathfrak{A}$ порождается любым своим элементом, но она локально конечна.
С точки зрения вычислимости не так важно, применяем ли мы в процессе порождения алгебры конечное число операций или эффективное бесконечное их множество, но конечность множества порождающих элементов принципиальна.

**Определение 4.3.**

*Алгоритмическое представление* $\gamma$ *универсальной алгебры* $\mathfrak{A}$ *называется стандартным, если оно сводится к любому алгоритмическому представлению этой алгебры, т.е., если* $\nu$ *– любое алгоритмическое представление алгебры* $\mathfrak{A}$*, то для подходящей вычислимой функции* $h$ *справедливо* $\gamma = \nu h$.

Другими словами, стандартными представлениями являются те, которые образуют наименьший элемент относительно сводимости представлений в множестве классов эквивалентных представлений (по модулю отношения "быть взаимно сводимыми друг к другу"). Ясно, что далеко не все алгебры имеют стандартные представления. Например, если $\mathfrak{A}$ – алгебра пустой сигнатуры, то она имеет континуум минимальных (относительно сводимости) классов эквивалентных представлений (см.Ю.Л. Ершов, с.102).

**Предложение 4.1.**

*Всякая универсальная алгебра эффективной сигнатуры, порожденная конечным числом элементов имеет стандартное алгоритмическое представление.*

# Стандартные представления

**Теорема 4.1.**

*Над любой негативной эквивалентностью представим такой негативный линейный порядок с эндоморфизмами, для которого данное представление является стандартным.*

**Следствие 4.1.**

*Всякая неразрешимая негативная эквивалентность является ядром представления линейного порядка с эндоморфизмами, не имеющего позитивного представления.*

Любая эквивалентность является ядром стандартного представления подходящей алгебры. Однако, если речь идет о линейных порядках и, тем более, о порядках с эндоморфизмами, то ситуация кардинально меняется. Более того, выше было отмечено существование позитивных эквивалентностей, над которыми вообще не представимы никакие линейные порядки.

# Стандартные представления

Структура *In*-степеней содержит строго бесконечно убывающую цепь степеней $\cdots \leqslant_{In} (\eta_2) \leqslant_{In} d(\eta_1) \leqslant_{In} d(\eta_0) = d(id\ \omega)$. С учетом существования бесконечной негативной эквивалентности, каждый смежный класс которой невычислим, имеем факт вложимости в упорядоченное множество *In*-степеней порядкового типа $1 + \omega^*$, где $\omega^*$ – порядок двойственный $\omega$.

**Открытый вопрос 1.**

*Существуют ли несравнимые бесконечные In-степени?*

**Следствие 4.2.**

*Всякий вычислимый линейный порядок хотя бы с одним предельным элементом имеет неразрешимое негативное представление.*

**Определение 4.4.**

*ln-степень называется распадающейся, если она содержит более чем одну ln — e-степень.*

**Предложение 4.2.**

*Пусть $\eta_n = \eta(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – попарно непересекающиеся невычислимые и коперечислимые множества. Тогда степень $d_{ln}(\eta_n)$ – распадающаяся.*

Отсюда вытекает важное

**Следствие 4.3.**

$\equiv_{ln-e} \subsetneqq \equiv_{ln}.$

Стадартные представления дают мощный метод сравнения степеней негативной представимости линейных порядков с эндоморфизмами и позволяют установить тесные связи между $m$-степенями и $ln - e$-степенями.

**Предложение 5.1.**

$\equiv_{ln-e} \subseteq \equiv_m$.

**Открытый вопрос 2.**

*Является ли вложение $\equiv_{ln-e} \subseteq \equiv_m$ собственным?*

**Предложение 5.2.**

$\leqslant_{ln-e} \subsetneqq \leqslant_m$.

По предложению 5.2 если эквивалентности $\eta_0, \eta_1$ таковы, что $\eta_0 \not\leqslant_m \eta_1$, то $d_{ln-e}(\eta_0) \not\leqslant_{ln-e} d_{ln-e}(\eta_1)$. Для $\not\leqslant_{ln}$-сводимости это утверждение неверно, как показывает

**Предложение 5.4.**

*Существуют такие негативные эквивалентности $\eta_0, \eta_1$, лежащие в различных $ln$-степенях, что $\eta_0 \not\leqslant_m \eta_1$, но $\eta_0 \leqslant_{ln} \eta_1$.*

Оказалось, что всякие две $ln-e$-степени, сравнимые относительно $\leqslant_{ln-e}$, лежат в одной $ln$-степени.

**Предложение 5.4.**

*Если $d_{ln-e}(\eta_1) \leqslant_{ln-e} d_{ln-e}(\eta_2)$, то $d_{ln}(\eta_1) = d_{ln}(\eta_2)$.*

Имеет место важное

**Предложение 5.5.**

$\equiv_m \subseteq \equiv_{ln}$.

Напомним, что подмножество частичного порядка называется антицепью, если никакая пара различных его элементов не является сравнимой относительно данного порядка.

**Теорема 5.1.**

*Существует последовательность негативных эквивалентностей $\eta_0, \eta_1, \ldots,$ для которой соответствующая последовательность $m$-степеней является строго возрастающей относительно порядка $\leqslant_m$ по типу $\omega$, последовательность $ln$-степеней – строго убывающая относительно $\leqslant_{ln}$ по типу $\omega^*$ (при этом естественное вложение $\{d_m(\eta_n)\} \longmapsto \{d_{ln}(\eta_n)\}$ – антиизоморфизм), а последовательность $ln - e$-степеней относительно $\leqslant_{ln-e}$ образует антицепь.*

**Предложение 5.6.**

*Пусть $\eta_1, \eta_2$ позитивные эквивалентности, являющиеся ядрами стандартных нумераций подходящих линейных порядков с эндоморфизмами. Тогда имеют место следующие соотношения:*
*1) $d(\eta_1) \leqslant_{lp-e} d(\eta_2) \Rightarrow \eta_1 \equiv_{lp} \eta_2$;*
*2) $d_{lp-e}(\eta_1) = d_{lp-e}(\eta_2) \Rightarrow d_m(\eta_1) = d_m(\eta_2)$;*
*3) $\eta_1 \leqslant_{lp-e} \eta_2 \Leftrightarrow \eta_1 \equiv_m \eta_2$.*

Введем еще одно понятие степени негативной представимости линейного порядка "промежуточное" между $ln$-степенями и $ln - e$-степенями. Понятие $ln - e$-степени в некотором смысле является эффективно "предельным", очень мощным инструментом. Более того, заметим, что многоместные операции, согласованные с линейным порядком, можно интерпретировать через одноместные (трансляции). Таким образом возникают упорядоченные группы, кольца и т.д.

Напомним, что трансляцией называется одноместная термальная операция в функциональной сигнатуре системы, быть может с параметрами в качестве фиксированных элементов основного множества системы. Операцию $f$ от двух и более аргументов назовем $\leq$-допустимой (относительно порядка $\leq$), если $\bar{x} \leq \bar{y} \Rightarrow f(\bar{x}) \leq f(\bar{y})$. Для одноместной операции $\leq$-допустимость означает, что она является эндоморфизмом линейного порядка.

**Предложение 5.8.**

*Если все операции алгебраической системы, в которой задан линейный порядок $\leq$, являются $\leq$-допустимыми, то все трансляции – эндоморфизмы. Верно и обратное, т.е. если все трансляции согласованы с $\leq$, то все операции $\leq$-допустимы.*

Таким образом, классическое понятие операции, согласованной с порядком, оказывается включенным в понятие вычислимого семейства эндоморфизмов этого порядка.

С практической точки зрения более обозримы линейные порядки с конечным числом эндоморфизмов.
Пусть $\eta_1, \eta_2$ – негативные эквивалентности.

**Определение 5.1.**

*Будем говорить, что $\eta_1$ $ln-e_k$-сводится к $\eta_2$ (в обозначениях $\eta_1 \leqslant_{ln-e_k} \eta_2$), если всякий линейный порядок с не более чем $k$ ($k \in \omega$) эндоморфизмами, негативно представимый над $\eta_1$, негативно представим и над $\eta_2$.*

Как и выше, $ln-e_k$-степени будем рассматривать в контексте отсутствия степеней конечных негативных эквивалентностей.
Непосредственно из определения вытекает свойство $\equiv_{ln-e_{k+1}} \subseteq \equiv_{ln-e_k}$.
Заметим, что $\equiv_{ln-e_0} = \equiv_{ln}$.

Уже на уровне $k = 2$ возникают фундаментальные различия в структуре $ln$-степеней и $ln - e_2$-степеней, что подтверждает

**Предложение 5.9.**

*Существуют такие негативные эквивалентности $\eta_0, \eta_1$, что $\eta_0 \nleqslant_{ln-e_2} \eta_1$ и $\eta_1 \nleqslant_{ln-e_2} \eta_0$, но $\eta_0 \leqslant_{ln} \eta_1$.*

**Следствие 5.1.**

*В множество $lp - e_k$-степеней при $k \geqslant 2$ имеются несравнимые элементы и существует максимальный элемент.*

Насколько различны структуры $ln$-степеней и $ln - e_1$-степеней – открытый вопрос.
Аналогичным образом можно определить $lp - e_k$-степени.

*СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!*