Аппроксимации Чебышёва–Паде и полиномы Эрмита–Паде (Stahl's Theory for Tschebyshev–Padé Approximations)

С. П. Суетин

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, г. Москва

Семинар по комплексному анализу (Семинар Гончара),
г. Москва, Россия, 24 мая 2021 г.

Let μ be a positive Borel measure supported on $\Delta := [-1, 1]$ and such that $\mu'(x) := d\mu(x)/dx > 0$ a.e. on Δ. Let $T_n(x; \mu) = \varkappa_n(\mu)x^n + \cdots$, $n = 0, 1, 2, \cdots$, $\varkappa_n(\mu) > 0$, be the polynomials orthonornal on Δ with respect to the measure μ:

$$\int_\Delta T_k(x; \mu)T_n(x; \mu)\, d\mu(x) = \delta_{kn}, \quad k, n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1}$$

where δ_{kn} is the Kronecker symbol.
Let a function f be holomorphic on the compact set Δ, $f \in \mathcal{H}(\Delta)$. Then f is expanded in the polynomial series with respect to the system $\{T_k(x; \mu)\}_{k=0}^\infty$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^\infty c_k T_k(z; \mu), \quad c_k = c_k(f) = \int_\Delta f(x)T_k(x; \mu)\, d\mu(x). \tag{2}$$

which converges to $f(z)$ inside (i.e., on the compact subsets) of the maximal canonical (with rexpect to Δ) ellipse D_ρ, $\rho > 1$.

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z - x}, \quad z \notin \Delta,$$

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \Delta, \quad \left[\hat{\theta}(z) := \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{z-x_j}, \quad N \gg 1,\right]$$

$\theta_1^2 + \cdots + \theta_N^2 = 1,$

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \Delta, \quad \left[\hat{\theta}(z) := \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{z-x_j}, \quad N \gg 1,\right]$$

$\theta_1^2 + \dots + \theta_N^2 = 1,$

$$\widehat{\mu}(z) - \frac{N_{n-1}(z)}{T_n(z;\mu)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \Delta, \quad \left[\hat{\theta}(z) := \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{z-x_j}, \quad N \gg 1,\right]$$

$$\theta_1^2 + \cdots + \theta_N^2 = 1,$$

$$\widehat{\mu}(z) - \frac{N_{n-1}(z)}{T_n(z;\mu)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

Г. Сегё: "Исторически ортогональные многочлены ... впервые рассматривались в теории непрерывных дробей. Эта связь очень важна и является одной из возможных отправных точек при исследовании ортогональных многочленов (см. П. Л. Чебышёв [1855]...).

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \Delta, \quad \left[\hat{\theta}(z) := \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{z-x_j}, \quad N \gg 1,\right]$$

$$\theta_1^2 + \cdots + \theta_N^2 = 1,$$

$$\widehat{\mu}(z) - \frac{N_{n-1}(z)}{T_n(z;\mu)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

Г. Сегё: "Исторически ортогональные многочлены ... впервые рассматривались в теории непрерывных дробей. Эта связь очень важна и является одной из возможных отправных точек при исследовании ортогональных многочленов (см. П. Л. Чебышёв [1855]...).

- П. Л. Чебышёв [1855]: $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x;\mu)$;

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \Delta, \quad \left[\hat{\theta}(z) := \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{z-x_j}, \quad N \gg 1, \right]$$

$\theta_1^2 + \cdots + \theta_N^2 = 1,$

$$\widehat{\mu}(z) - \frac{N_{n-1}(z)}{T_n(z;\mu)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

Г. Сегё: “Исторически ортогональные многочлены ... впервые рассматривались в теории непрерывных дробей. Эта связь очень важна и является одной из возможных отправных точек при исследовании ортогональных многочленов (см. П. Л. Чебышёв [1855]...).

• П. Л. Чебышёв [1855]: $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x;\mu)$;

• П. Л. Чебышёв [1855]: открыл формулу Кристоффеля-Дарбу;

$$\hat{\mu}(z) := \int \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad z \notin \Delta, \quad \left[\hat{\theta}(z) := \sum_{j=1}^{N} \frac{\theta_j^2}{z-x_j}, \quad N \gg 1,\right]$$

$$\theta_1^2 + \dots + \theta_N^2 = 1,$$

$$\widehat{\mu}(z) - \frac{N_{n-1}(z)}{T_n(z;\mu)} = O\left(\frac{1}{z^{2n+1}}\right), \quad z \to \infty.$$

Г. Сегё: “Исторически ортогональные многочлены ... впервые рассматривались в теории непрерывных дробей. Эта связь очень важна и является одной из возможных отправных точек при исследовании ортогональных многочленов (см. П. Л. Чебышёв [1855]...).

• П. Л. Чебышёв [1855]: $f(x) \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(f) T_k(x;\mu)$;

• П. Л. Чебышёв [1855]: открыл формулу Кристоффеля-Дарбу;

• П. Л. Чебышёв: использовал теорию вычетов (хотя, как принято считать, не любил комплексные числа...).

Задача, рассматриваемая Чебышёвым в [1855], состоит в следующем. Пусть некоторая функция f задана на $\mathbb{R}$ в конечном (притом достаточно большом) числе узлов x_j, $j = 1, \dots, N \gg 1$. Требуется по значениям $f_j = f(x_j)$ в этих узлах построить приближенное представление функции f полиномом фиксированной "малой" степени n, $n \ll N$, которое является в определенном смысле оптимальным. Оптимальность представления понимается как минимизация среднеквадратичного уклонения значений полинома в узлах x_j от значений функции f_j, притом с некоторыми весами $\theta_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, N$, в точках x_j. Решение, Чебышёв [1855]: ортонормированная система $\{T_k(x;\theta)\}_{k=0}^{N}$:

$$\sum_{j=1}^{N} T_k(x_j,\theta) T_m(x_j,\theta)\theta_j^2 = \delta_{km},$$

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(z;\mu), \quad c_k = c_k(f) = \sum_{j=1}^{N} f(x_j) T_k(x;\theta)\theta_j^2.$$

- Л. А. Книжнерман, “Эффективность распознавания как способа выбора параметра регуляризации при аналитическом продолжении потенциальных полей разложением в ряды Чебышёва”, Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, 1985, no5, с. 87–90.
- John P. Boyd, Chebyshev and Fourier spectral methods, Second edition, ,Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2001
- Lloyd N. Trefethen, Approximation theory and approximation practice, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2013
- Jared L. Aurentz, Lloyd N. Trefethen, Chopping a Chebyshev series, ,ACM Trans. Math. Software, 43, 2017, 4, Art. 33, 21 pp.
- О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин, "Об оценке погрешности приближенного решения . . . , определенного с помощью рядов Чебышёва Выч. мет. программирование, 21:3 (2020), 241–250.

C. W. Clenshaw and , K. Lord, Rational Approximations from Chebyshev Series, Studies in Num. Analysis, B.K.P. Scaife, Academic Press, 1973, Papers in honour of Cornelius Lanczos on the occasion of his 80th birthday 95–113

Following the idea of [1] we define the nth diagonal Frobenious–Padé approximation to the series (1) as the rational function $\Phi_n(z) = P_n(z)/Q_n(z)$ such that the polynomials $Q_n, P_n \in \mathbb{P}_n$ and the following relation holds true

$$(Q_n f - P_n)(z) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} a_{n,k} T_k(z;\mu). \tag{3}$$

Since $a_{n,k} = c_k(Q_n f - P_n)$ and $P_n \in \mathbb{P}_n$, it is easy to see that the relation (3) is equivalent to the relations

$$c_k(Q_n f) = 0, \quad k = n+1, \dots, 2n. \tag{4}$$

The relations (4) form a system of n linear homogenuos equations for $n+1$ unknowns, the coefficients of the polynomial $Q_n \in \mathbb{P}_n$. Thus a nontrivial solution of (4) always exists. In contrast to the Padé approximants $[n/n]$ of a power series, the rational funcrion $\Phi_n = P_n/Q_n$ maybe not unique. The rational functions Φ_n are ussually referred to as Frobenious–Padé or “linear” Padé approximations to the series (2). The polynomial Q_n is the main object of the problem. If Q_n is known, the corresponding polynonial P_n is determine by representation

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k(Q_n f) T_k(z;\mu). \tag{5}$$

It is easy to see that to find the polynomial Q_n from the system (4), the $3n+1$ coeffitients $c_k(f)$, $k = 0, 1, \dots, 3n$, of the series (2) should be given.

In addition to Frobenious definition for Padé approxmants there is the so-called Baker definition.

- J. T. Holdeman (Jr.), A method for the approximation of functions defined by formal series expansions in orthogonal polynomials, Math. Comp. , 23, 106, 1969, 275–287
- J. Fleischer, Nonlinear Padé approximants for Legendre series, J. Math. Phys., 1973, 14, 2, 246–248
- A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, On the convergence of Padé approximation of orthogonal expansions, Number theory, algebra, analysis and their applications, Trudy Mat. Inst. Steklov., 1991, 200, 136–146
- A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, On the rate of convergence of Padéé approximants of orthogonal expansions, Progress in approximation theory, Tampa, FL, 1990, Springer Ser. Comput. Math., 19, Springer, New York, 1992, 169–190

The extension of that Baker definition for Padé approximants to the polynomial series is the following (see first of all [1], [2] and also [3], [4], [1]). We seek for a rational function F_n of order not greater than n, such that $F_n \in \mathcal{H}(\Delta)$ and the following relation holds true

$$(f - F_n)(x) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} b_{n,k} T_k(x;\mu). \tag{6}$$

Such rational function does not always exist; see [1]. If F_n exists it is called the diagonal nonlinear Padé approximation to the polynomial series (2). In general $F_n \neq \Phi_n$.

$d\mu(x) = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow T_k(x)$; реализованы в MAPLE

С. П. Суетин, О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций, ,Матем. заметки, 2009, 86, 2, 290–303

$$d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow T_k(x);$$ реализованы в MAPLE

С. П. Суетин, О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций, ,Матем. заметки, 2009, 86, 2, 290–303

Приводятся примеры двух аналитических на отрезке $[-1,1]$ функций таких, что ни при каком $n = 2, 3, \dots$ для первой из них не существует нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва типа $(n, 2)$, а для второй – типа (n, n) (т.е. диагональных аппроксимаций). Благодаря полученному в работе критерию существования нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера, оба примера вытекают из широко известных контрпримеров В. И. Буслаева соответственно к гипотезе Бейкера–Грейвс-Морриса и к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса для АП. Обе функции задаются явным аналитическим выражением.

$$d\mu(x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow T_k(x);$$

“Теория Шталя” для нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва:

A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, Padé–Chebyshev approximants of multivalued analytic functions, variation of equilibrium energy, and the S-property of stationary compact sets, Uspekhi Mat. Nauk, 2011, 66, 6(402), 3–36

Let the measures μ and σ be as before and define the functions

$$f_1(z) = \widehat{\mu}(z) := \int_\Delta \frac{d\mu(x)}{z-x}, \quad f_2(z) = \langle \mu, \sigma \rangle(z) := \int_\Delta \frac{\widehat{\sigma}(x)\,d\mu(x)}{z-x}, \tag{7}$$

where $z \in D$, $D := \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta$ and $\widehat{\sigma}(z) : \displaystyle\int_d^c \frac{d\sigma(t)}{z-t}$. For the tuple of three functions $[1, f_1, f_2]$ and multiindex $\mathbf{n} = (n-1, n, n)$, $n \geqslant 1$, we define the corresponding type I Hermite–Padé polynomials $Q_{\mathbf{n},0} \in \mathbb{P}_{n-1}$ and $Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2} \in \mathbb{P}_n$ by the following relation

$$\left(Q_{\mathbf{n},0} + Q_{\mathbf{n},1} f_1 + Q_{\mathbf{n},2} f_2\right)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \to \infty. \tag{8}$$

It is well-known that for arbitrary functions $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\infty)$ and a fixed $\mathbf{n}$ such polynomials $Q_{\mathbf{n},j}$ are not unique (see [?, Chapter 4, § 1, Statements 1.1 and 1.2]). But for the functions given by representations (7) the tuple $[Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2}]$ is uniquelly determined up to a nontrivial constant multiplier. More over the following statement holds true.

It is well-known that for arbitrary functions $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\infty)$ and a fixed $\mathbf{n}$ such polynomials $Q_{\mathbf{n},j}$ are not unique (see [?, Chapter 4, § 1, Statements 1.1 and 1.2]). But for the functions given by representations (7) the tuple $[Q_{\mathbf{n},0}, Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2}]$ is uniquelly determined up to a nontrivial constant multiplier. More over the following statement holds true.

Proposition

Let $f(z) = \widehat{\sigma}$, $T_k(z;\mu)$, $k = 0, 1, \dots,$ be the orthogonal polynomials given by the relations (1), polynomials Q_n and P_n be defined by the relation (3) and the polynomials $Q_{\mathbf{n},1}$ and $Q_{\mathbf{n},2}$ be defined by the relation (8). Then for each $n \in \mathbb{N}$ $\deg Q_n = \deg P_n = \deg Q_{\mathbf{n},1} = \deg Q_{\mathbf{n},2} = n$ and $-Q_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n},2} \equiv P_n/Q_n = \Phi_n$, i.e., the rational function $-Q_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n},2}$ gives the unique Tschebyshev–Padé(–Frobenious) approximation Φ_n to the series (2).

From (8) it directly follows that

$$\int_\gamma R_n(t)q(t)\,dt = 0 \quad \text{for each} \quad q \in \mathbb{P}_{2n}, \tag{9}$$

where γ is a closed curve that separates the set Δ from the infinity point $z = \infty$. Thus we have that

$$\int_\gamma (Q_{\mathbf{n},1} f_1 + Q_{\mathbf{n},2} f_2)(t)q(t)\,dt = 0. \tag{10}$$

Finally taking into account the representation (7) of the functions f_1 and f_2 we obtain from (10) that the following equality holds true

$$\int_\Delta (Q_{\mathbf{n},1} + Q_{\mathbf{n},2}\widehat{\sigma})(x)q(x)\,d\mu(x) = 0, \tag{11}$$

where $q \in \mathbb{P}_{2n}$ is an arbitrary polinomial. From (11) it directly follows that for the function $f(z) = \widehat{\sigma}(z)$ we have

$$(Q_{\mathbf{n},1} + Q_{\mathbf{n},2} f)(z) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} c_{n,k} T_k(z;\mu). \tag{12}$$

Since $Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2} \in \mathbb{P}_n$, the relation (12) is equivalent to the relation (2). By uniquenece property of Frobenious–Padé approxaimation Φ_n to $f(z) = \widehat{\sigma}(z)$, we have that $\Phi_n = -Q_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n},2}$.

Set

$$f_1(z) := \frac{1}{(z^2-1)^{1/2}}, \quad f_2(z) := \frac{1}{\pi}\int_\Delta \frac{f(x)\,dx}{(z-x)\sqrt{1-x^2}}, \quad z \in D = \widehat{\mathbb{C}}\setminus\Delta, \tag{13}$$

where the function $f\colon \Delta \to \mathbb{C}$ is a holomorphic function on Δ. For the tuple of three functions $[1, f_1, f_2]$ and multi-index $\mathbf{n} = (n-1, n, n)$, $n \geqslant 1$, we define the corresponding type I Hermite–Padé polynomials $Q_{\mathbf{n},0} \in \mathbb{P}_{n-1}$ and $Q_{\mathbf{n},1}, Q_{\mathbf{n},2} \in \mathbb{P}_n$ by the following relation

$$R_\mathbf{n} := \bigl(Q_{\mathbf{n},0} + Q_{\mathbf{n},1} f_1 + Q_{\mathbf{n},2} f_2\bigr)(z) = O\left(\frac{1}{z^{2n+2}}\right), \quad z \to \infty. \tag{14}$$

Since $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ and $T_k(x;\mu) = T_k(x)$, then $f(x)$ can be expanded into the Chebyshev series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(z). \tag{15}$$

So, we obtain from (14) and (??) that the ratio $-Q_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n},2}$ gives a "linear" Tschebyshëv–Padé approximation to the series (15).

Since $f \in \mathcal{H}(\Delta)$ and $T_k(x;\mu) = T_k(x)$, then $f(x)$ can be expanded into the Chebyshev series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(z). \tag{15}$$

So, we obtain from (14) and (??) that the ratio $-Q_{\mathbf{n},1}/Q_{\mathbf{n},2}$ gives a "linear" Tschebyshëv–Padé approximation to the series (15).

Definition

For a finite set Σ, $\#\Sigma < \infty$, $\Sigma \subset \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Delta_1$, let denote by $\mathscr{A}^{\circ}(\Delta, \Sigma)$ the set all functions f such that f is given by a "germ" $f|_\Delta \in \mathcal{H}(\Delta)$ and this germ $f|_\Delta$ can be continued analytically along each path avoiding the set Σ but f is not a singlevalued function in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$. We shall call this set of functions by Stahl's class of multivalued analytic function (with respect to Δ and Σ)..

Спасибо за внимание !