ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО
АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

БОЛТАЕВ ХАБИБЖОН ХАМИТОВИЧ

Подфакторы вещественного фактора и их индексы

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени доктора философии
по физико-математическим наукам

Научный руководитель: профессор А.А.Рахимов

Введение.

В классической теории групп индекс $[G : H]$ подгруппы H группы G – это число смежных (левых или правых) классов G относительно подгруппы H. К примеру, $[\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}] = n$. В 1983 году новозеландский математик Воган Джонс (Vaughan Jones) обобщил понятие индекса для конечных W*-алгебр [1] Он указал множества возможных значений индекса и, в частности, он доказал, что если M – W*-алгебра, G – счетная дискретная группа автоморфизмов M и H – подгруппа G, для которых скрещенные произведения $M \ltimes G$ и $M \ltimes H$ являются конечными факторами, тогда

$$[M \ltimes G : M \ltimes H] = [G : H].$$

Это показывает, что понятие индекса подфактора является обобщением понятия индекса подгруппы. За все эти работы В.Джонс в 1990 году в Киото, на всемирном XXI-математическом Конгрессе, был награжден медалью Филдса.

[1] V. F. R. Jones. Index for Subfactors. Inventiones Math. (1983), 1–25.

Введение

Как известно, задача изучения йордановых банаховых алгебр (в частности, JW-алгебр), во многих случаях, редуцируется к изучению вещественных алгебр фон Неймана (т.е. вещественных W*-алгебр). Поэтому параллельно с теорией JW и (комплексной) теорией W*-алгебр бурно продолжается исследование теории вещественных W*-алгебр. Основные достижения в изучении вещественных W*-алгебр принадлежат в первую очередь Ш. Аюпову, Э. Штермеру, П. Стаси, Ш. Усманову и А. Рахимову. К настоящему времени в основном благодаря этим ученым получена полная классификация вещественных инъективных факторов.

Диссертация посвящена вещественным подфакторам W*-алгебр и их индексам.

Пусть H - комплексное гильбертово пространство, B(H)– алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H. Слабо замкнутая *-подалгебра $M \subset B(H)$ с единицей $\mathbf{1}$ называется *W*-алгеброй*. Множество

$$M' = \{x \in B(H) : \; xy = yx, \; \forall y \in M\}$$

называется *коммутантом* *-алгебры M. Множество $Z = M \cap M'$ называется *центром* алгебры M. W*-алгебра M называется *фактором*, если ее центр тривиален, т.е. Z совпадает с $\{\lambda\mathbf{1}, \, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Вещественная *-подалгебра $R \subset B(H)$ называется *вещественной W*–алгеброй*, если она слабо замкнута и $R \cap iR = \{0\}$.

Линейное отображение α алгебры M в себя с $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ называется **-автоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$; **-антиавтоморфизмом*, если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$ и *инволютивным* отображением, если $\alpha^2(x) = x$. Если α – инволютивный *-антиавтоморфизм W*-алгебры M, то через (M, α) мы обозначим вещественную W*-алгебру $\{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$, порожденную антиавтоморфизмом α. Наоборот, всякая вещественная W*-алгебра R имеет вид (M, α), где $M = R + iR$ – обертывающая W*-алгебра и α – инволютивный *-антиавтоморфизм M, определенный как $\alpha(x + iy) = x^* + iy^*$ [2]. Вещественная W*-алгебра R называется *вещественным фактором*, если ее центр совпадает с $\{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbb{R}\}$; R имеет тип I_n, I_∞, II_1, II_∞ или III_λ, $(0 \le \lambda \le 1)$, если ее обертывающая W*-алгебра имеет соответствующий тип в смысле обычной классификации W*-алгебры.

[2] Sh. A. Ayupov, A. A. Rakhimov, Sh. M. Usmanov. Jordan, Real and Lie Structures in Operator Algebras. Kluw.Acad.Pub.,MAIA. Vol. 418, (1997), 235p.

Пусть $R \subset B(H)$ – конечный вещественный фактор с конечным коммутантом R' и пусть τ и τ' – единственные точные нормальные следы на R и R', соответственно. Для любого вектора $\xi (\neq 0) \in H$ рассмотрим проекции $e_\xi : H \to \overline{R'\xi}$ и $e'_\xi : H \to \overline{R\xi}$. Непосредственно показывается, что $e_\xi \in R$ и $e'_\xi \in R'$. Кроме того, показано, что число $c_R = \dfrac{\tau(e_\xi)}{\tau'(e'_\xi)}$ не зависит от выбора вектора ξ. Аналогично комплексному случае, число c_R назовем *парной константой Неймана-Мюррея* и обозначим как $c_R = dim_R(H)$.

Известно, что существует вещественное гильбертово пространство H_r, такое что

$$H = H_r + iH_r, \qquad R \subset B(H_r) \subset B(H_r) + iB(H_r) = B(H).$$

Доказана следующая теорема.

Теорема 1.3.4.

Верно равенства

$$dim_M(H) = dim_{(M,\alpha)}(H_r) = \frac{1}{2} dim_{(M,\alpha)}(H)$$

Определение.

Пусть R – конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ – подфактор. *Индексом* Q в R называется число $\dim_Q(L^2(R))$, которое обозначается как $[R : Q]$.

Здесь $L^2(R)$ – пополнение R относительно нормы $\|a\|_2 = \tau(a^* a)^{\frac{1}{2}}$.

Так как $L^2(R) + iL^2(R) = L^2(R + iR)$, то из теоремы 1.3.4 следует:

Теорема 1.4.2.

Индекс вещественного подфактора совпадает с индексом обертывающего подфактора

$$\dim_Q(L^2(R)) = \dim_{Q+iQ}(L^2(R + iR)), \text{ т.е. } [R : Q] = [R + iR : Q + iQ].$$

Используя результат В.Джонса, получим один из основных результатов главы

Теорема 1.4.5.

Пусть R – конечный вещественный фактор и Q – подфактор R. Тогда

$$[R : Q] \in \{4\cos^2 \tfrac{\pi}{q} \ : \ q \geq 3\} \cup [4, +\infty].$$

Далее, последний результат доказывается также другим методом, в котором следующее предложение является ключевым.

Предложение 1.5.6.

Пусть R – конечный вещественный фактор и Q – подфактор R с конечным индексом: $\beta = [R : Q] < \infty$. Тогда существуют возрастающая последовательность конечных вещественных факторов

$$R_0 \subset R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \ldots$$

и последовательность проекторов $\{e_n\} \subset B(H_r)$ такие, что

1. $R_0 = Q$, $R_1 = R$ и $R_{n+1} = \langle R_n, \{e_k\}_{k=1}^n \rangle$, т.е. R_{n+1} порождается R_n и проекторами $\{e_k\}_{k=1}^n$;
2. $[R_{n+1} : R_n] = [R : Q], \ \forall n$;
3. $\beta \tau_{n+1}(x e_n) = \tau_n(x), \ \forall x \in R_n, \forall n$, где τ_n – единственный точный нормальный конечный след на R_n;
4. $e_n e_{n+1} e_n = \beta^{-1} e_n, \ e_{n+1} e_n e_{n+1} = \beta^{-1} e_{n+1} \ (\forall n)$ и

$$e_i e_j = e_j e_i, \text{ для } |i - j| \geq 2.$$

Приведем один вспомогательный результат[3]

Теорема 1.5.7. [Jones, 1983]

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B(H)$ -– последовательность ненулевых проекторов такая, что для некоторого число β имеет место

$$\beta e_i e_j e_i = e_i, \text{ если } |i-j| = 1, \text{ и } e_i e_j = e_j e_i, \text{ если } |i-j| \geq 2.$$

Тогда, либо $\beta = 4\cos^2(\pi/q)$ $(q \geq 3)$, либо $\beta \geq 4$.

Отсюда из предложению 1.5.6 получим один из основных результатов главы

Теорема 1.5.8.

Пусть R – конечный вещественный фактор и Q – подфактор R. Тогда

$$[R:Q] \in \{4\cos^2\frac{\pi}{q} \ : \ q \geq 3\} \cup [4, +\infty].$$

Заметим, что в теореме 1.4.5 этот же результат доказан другим методом, именно, методом перехода обертывающую W*-алгебру.

[3] Jones V.F.R., Index for Subfactors, Inventiones Math. 72 (1983) 1-25.

В работе У.Хаагерупа [4] дано расширение положительной части W*-алгебры. А в работе Ш.Усманова [5] это понятие обобщается для вещественных W*-алгебр. В настоящем параграфе диссертации приведены эти определения. Вкратце напомним это понятие для вещественных W*-алгебр.

Пусть R_*^+ – множество всех нормальных положительных линейных функционалов на R, которые равны нулю на кососимметричных элементах R. Тогда каждый такой функционал f единственным образом продолжается на $M = R + iR$ как $\overline{f}(a+ib) := f(a)$, поскольку $a+ib \geq 0$, $b = -b^*$ и $f(b) = 0$. Причем $\overline{f}$ также нормален. Рассмотрим на R_*^+ множество $\hat{R}^+$ всех положительно-однородных аддитивных полунепрерывных снизу функций $m : R_*^+ \to [0, +\infty]$. Вложим $\hat{R}^+$ в конус R^+, отождествляя произвольный элемент $a \in R^+$ с функцией m_a, где $m_a(f) = f(a)$, $\forall f \in R_*^+$. Если a – неограниченный самосопряженный положительный оператор с носителем e, присоединенный к R, то определим функцию m_a следующим образом:

[4] Haagerup U., Operator valued weights in von Neumann algebras I, II, J.Funct. Anal. 32 (1979); 33 (1979)

[5] Ш.Усманов. Условные ожидания на вещественных W*-алгебрах и JW-алгебрах. Известия высших учебных заведений. Математика. (2001), Vol 470, N7, 43–47.

$$m_a(f) = \sum f(\bar{e}_n a) + (+\infty) f(\mathbb{1} - e),$$

где f – произвольный функционал из R_*^+ и $\bar{e}_n = e_{[n-1,n]}$ – спектральные проекторы элемента a, соответствующий множеству $[n-1, n]$, $n \in \overline{1, \infty}$.

Определение 2.1.1

Множество $\hat{R}^+$ называется расширенной положительной частью алгебры R.

В работе Ш.Усманова показано, что $\hat{R}^+ \subset \hat{M}^+$ и доказана следующая теорема

Теорема 2.1.2. [Ш.Усманов, 2001]

Для любого $m \in \hat{R}^+$ существуют проектор $e \in R$ и положительный самосопряженный (но не необходимо ограниченный) оператор a на eH, присоединенный к R, такой, что $m = m_a$.

Пусть R – вещественная W*-алгебра, $Q \subset R$ – вещественная W*-подалгебра. *Операторно-значным весом* на алгебре R со значением в $\hat{Q}^+$ (или, вкратце, *Q-значным весом*) называется линейное отображение $T : R^+ \to \hat{Q}^+$ такое, что $T(yxy^*) = yT(x)y^*$, для всех $x \in R^+$ и $y \in Q$. В работе Ш.Усманова показано, что T продолжается единственным образом до отображения $T : \hat{R}^+ \to \hat{Q}^+$. Нормальность, точность и полуконечность для T определяются так же, как и для линейных функционалов. Именно, T называется

- *нормальным*, если $a_\gamma \nearrow a$ влечет за собой $T(a_\gamma) \nearrow T(a)$, для $(a_\gamma) \subset R^+$;
- *точным*, если $T(a^*a) = 0$ влечет за собой $a = 0$;
- *полуконечным*, если множество $\{a \in R : \|T(a^*a)\| < \infty\}$ ультраслабо плотно в R.

Множество точных полуконечных весов на R обозначим как $P(R)$, а множество нормальных точных полуконечных операторно-значных весов – как $P(R, Q)$.

В работе У.Хаагерупа для W*-алгебр $N \subset M$ доказан следующий результат

$$P(M,N) \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad P(N',M') \neq \emptyset,$$

Используя результаты У.Хаагерупа и Ш.Усманова получены следующие результаты

Следствие 2.2.8.

$$P(R+iR, Q+iQ) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(R,Q) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; P(Q',R') \neq \emptyset$$

Пусть R – σ-конечный (т.е. число попарно ортогональных эквивалентных проекторов не более чем счетно) вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ – подфактор. Положительное линейное отображение $E : R \to Q$ называется *условным ожиданием*, если выполняются следующие условия:

- $E(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$;
- $E(E(x)y) = E(x)E(y) = E(xE(y))$;
- $E(x)^*E(x) \leq E(x^*x), \quad \forall x, y \in R$.

Пусть $E : R \to Q$ – нормальное условное ожидание. Так как отображение E является операторно-значным весом, то по следствию 2.2.8 ему соответствует некоторое отображение $E^{-1} \in P(Q', R')$. По определению E имеем $E(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. Однако в общем случае, имеем $E^{-1}(\mathbb{1}) \neq \mathbb{1}$. Используя метод перехода к обертывающей W*-алгебры доказывается, что $E^{-1}(\mathbb{1}) \in R \cap R'$, т.е. $E^{-1}(\mathbb{1})$ – центральный элемент. Так как R – вещественный фактор (т.е. центр алгебры тривиален), то элемент $E^{-1}(\mathbb{1})$ скалярно кратен $\mathbb{1}$, т.е.

$$E^{-1}(\mathbb{1}) = \lambda\mathbb{1} \quad (\text{возможно, и } \lambda = +\infty).$$

Аналогично работы Х.Косаки[6], мы дадим следующее определение.

Определение 2.3.2.

Скалярное число $\lambda \in \mathbb{R}$ называется **индексом** вещественного подфактора Q на вещественном факторе R и обозначается как $[R : Q]$.

В параграфе доказан следующий результат, который обобщает теорему 1.4.2.

Теорема 2.3.3.

Пусть R – σ-конечный вещественный фактор и пусть $Q \subset R$ – подфактор. Тогда $[R : Q] = [R + iR : Q + iQ]$.

Отсюда, используя результат Х.Косаки, получим основной результат параграфа, который обобщает теоремы 1.4.5 и 1.5.8.

Теорема 2.3.4.

Пусть R – σ-конечный вещественный фактор и $Q \subset R$ – подфактор. Тогда $[R : Q] = 4\cos^2(\pi/q)$ $(q \geq 3)$ или $[R : Q] \geq 4$.

[6] Kosaki H., Extension of Jones' Theory on index to arbitrary factors, J.Funct. Anal. 66 (1986) 123-140.

Пусть теперь $A \subseteq B$ – конечномерные вещественные C*-алгебры. Тогда

$$A \cong \bigoplus_{i+1}^{k} M_{n_i}(F) \ \text{ и } \ B \cong \bigoplus_{j+1}^{l} M_{m_j}(F),$$

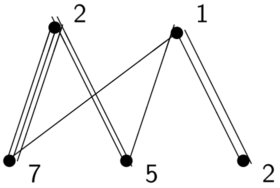
где $F = \mathbb{R}, \ \mathbb{C}, \ \mathbb{H}$. Положим $\overrightarrow{n} = (n_1, ..., n_k)$ и $\overrightarrow{m} = (m_1, ..., m_l)$, и назовем их вектор-размерностями A и B, соответственно. Определим элементы Λ_{ij} $k \times l$-матрицы Λ_A^B следующим образом: Λ_{ij} – число i-го слагаемого в представлении A в j-м слагаемом B. Продемонстрируем это на следующем примере.

Пример 3.1.1. Пусть $B = M_7(\mathbb{R}) \bigoplus M_5(\mathbb{R}) \bigoplus M_2(\mathbb{R})$ и $A = M_2(\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{R}$. Вложение $A \subset B$ задаётся как:

$$(x, y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right)$$

где $x \in M_2(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}$.

Так как слагаемые $M_2(\mathbb{R})$ и $\mathbb{R}$ в представлении A участвуют в первом слагаемом B, три и один раза, соответственно, то $\Lambda_{11} = 3$ и $\Lambda_{21} = 1$; а во втором слагаемом алгебры B они участвуют по два и один разу и поэтому $\Lambda_{12} = 2$ и $\Lambda_{22} = 1$. Аналогично, $\Lambda_{13} = 0$ и $\Lambda_{23} = 2$. Таким образом, это вложение имеет следующую матрицу: $\Lambda_A^B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. С помощью матрицы Λ_A^B построим соответствующий граф следующим образом. Верхние и нижние вершины графа состоят из количества слагаемых в представлениях A и B, соответственно. Они соответственно нумеруются по координатам векторов $\overrightarrow{n}$ и $\overrightarrow{m}$. Число рёбер, соединяющих две вершины, определяется числом Λ_{ij}. Например, так как $\Lambda_{11} = 3$, то число рёбер между верхней вершиной 2 и нижней вершиной 7 равно 3. Таким образом, матрице Λ_A^B соответствует следующий граф



Легко видеть, что указанное вложение не единственно, и следовательно, матрица Λ_A^B и ее граф не единственны. Например, в примере 3.1.1, можно выбрать ещё следующие два вложения:

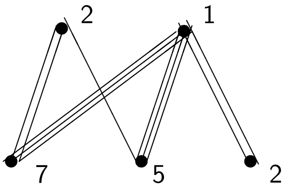
$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right),$$

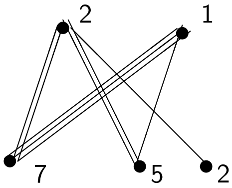
$$(x,y) \mapsto \left(\begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x \end{pmatrix} \right).$$

где $x \in M_2(\mathbb{R}), y \in \mathbb{R}$

Тогда они имеют следующие матрицы и графы, соответственно:

$$\Lambda_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Lambda_A^B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$





Показано, что матрицы Λ_P^R и Λ_{P+iP}^{R+iR} могут не совпадать, т.е. верно следующее

Следствие 3.2.4.

Для пар $P \subset R$ – вещественных W*-алгебр, в общем случае, имеет место неравенство $\Lambda_P^R \neq \Lambda_{P+iP}^{R+iR}$.

Известно, что в комплексном случае верно равенство: $[M : N] = \|\Lambda_N^M\|^2$. Для пары вещественных факторов $P \subset R$ верно равенство $[R : P] = [R+iR : P+iP]$. Следовательно,

$$[R : P] = [R + iR : P + iP] = \|\Lambda_{P+iP}^{R+iR}\|^2 = \|\Lambda_P^R\|^2.$$

Получен следующий результат для вещественных W*-подалгебр.

Следствие 3.2.5.

Для пар $P \subset R$ – вещественных факторов всегда выполняется равенство $[R : P] = \|\Lambda_P^R\|^2$, а в общем случае, т.е. когда по крайне мере один из вещественных W*-алгебр P и R не является фактором, то возможно неравенство $[R : P] \neq \|\Lambda_P^R\|^2$.

Как известно, в теории W*-подалгебр, наиболее интересными являются изучения подфакторов, для которых относительный коммутант совпадает с $\mathbb{1}\mathbb{C}$, называемые **неприводимыми** подфакторами, поскольку они тесно связаны с изучением максимально инъективных W*-подалгебр и существованием максимальных абелевых W*-подалгебр W*-алгебры.

В.Джонс показал, что все подфакторы с индексом < 4 являются неприводимыми. Однако, в случае ≥ 4, во всех его примерах, подфакторы не являются неприводимыми. Поэтому проблема построение примеров неприводимых подфакторов с индексом больше чем 4 оставалась открытым. В 1990-е годы Сорин Попа доказал, что для любого число $r > 4$ существует неприводимый подфактор N II_1-фактора M с $[M : N] = r$. Однако, в его результате, все подфакторы были не гиперфинитными, в связи с чем, возник новый вопрос: *существуют ли неприводимые гиперфинитные подфакторы с индексом* > 4?

Позже появились работы (Goldman F, P. de la. Harpe, Jones V.), в которых, авторы, с помощью графов, построили серия неприводимых гиперфинитных подфакторов фактора II_1-фактора с индексом $3 + \sqrt{3} = 4.73205..$

Глава III. W*-подалгебры и их графы.

Причем авторы указали трудность построения таких примеров с индексами в интервале $(4, r)$, $r \searrow 4$, т.е. достаточно близко к 4 сверху. При этом, к тому времени, число $3 + \sqrt{3} = 4.73205..$ оказался наименьшим индексом. В 1994 году, У.Хаагеруп, с помощью принципиальных, дуальных графов, построил серия неприводимых гиперфинитных подфакторов II_1-фактора с индексом в интервале $(4, 3 + \sqrt{2})$. Кроме того, он показал, что если

$$[M : N] \in (4, \tfrac{5+\sqrt{13}}{2}) = (4, 4.302..),$$

то соответствующий ему принципиальный граф должен быть как

$$A_\infty : \quad \underset{\alpha_0}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_1}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_2}{\circ} \text{———} \underset{\alpha_3}{\circ} \text{———} \circ \quad \cdots$$

Далее, Хаагеруп, Шое и Окнеану построили примеры неприводимых гиперфинитных подфакторов II_1-фактора, с индексом 4,026... К настоящему времени, этот результат ещё не улучшен. Кроме того, имеются интересные примеры Х.Йошида с индексом в интервале (6, 6.25).

В последнем параграфе диссертации доказано, что всякий гиперфинитный фактор всегда обладает инволютивный *-антиавтоморфизм (Предложение 3.3.1). Используя это и все выше перечисленные примеры получен следующий результат

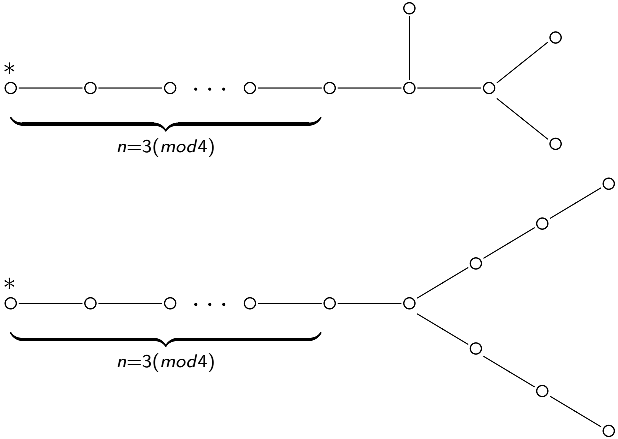
Теорема 3.3.4.

Существует серия неприводимых гиперфинитных вещественных подфакторов вещественного II_1-фактора с индексом больше 4, в частности, с индексом в интервалах $(4, 3+\sqrt{3}]$, $(4, \frac{5+\sqrt{13}}{2}]$ и $(6, 6.25)$.

Теперь рассмотрим ещё две следующие классические графы.

Γ_n :

Γ'_n :



Теперь используя результат Х.Косаки[7] и формулу $[R:Q] = [R+iR : Q+iQ]$, получим следующий результат, который частично уточняет теорему 3.3.4.

Теорема 3.3.5.

Пусть Q – неприводимый вещественный подфактор вещественного II_1-фактора R с индексом в интервале $4 < [R:Q] < 3+\sqrt{2}$. Рассмотрим возрастающую последовательность вещественных конечных факторов: $Q \subset R \subset R_2 \subset R_3 \subset \ldots$, построенные в предложение 1.5.6.

Тогда для пары (Γ, Γ') графов, соответствующие включениям $Q \subset R$ и $R \subset R_2$ (соответственно) имеет место: $\Gamma = \Gamma' = A_\infty$ или $\Gamma = \Gamma_n, \;\; \Gamma' = {\Gamma_n}'$, где число n означает расстояние от звездочки * до точки, после следующего идет первое ветвление. Кроме того, вторую случаю следует понимать как $(\Gamma, \Gamma') = (\Gamma_n, {\Gamma'}_n)$ или $(\Gamma, \Gamma') = ({\Gamma'}_n, \Gamma_n)$ для некоторого $n = 3(mod 4)$.

При $n = 3$ непосредственно можно вычислит норму: $\|\Gamma_3\|^2 = \|\Gamma_{3'}\|^2 = \frac{5+\sqrt{13}}{2}$.

[7] Kosaki H., A remark on the minimal index of subfactors, J.Funct.Anal. 107, 458-470 (1992).

Используя результат У.Хаагерупа, по теореме 3.3.5 получим следующее следствие.

Следствие 3.3.6.

Если Q – неприводимый вещественный подфактор вещественного II_1-фактора R с индексом в интервале $4 < [R : Q] < \frac{5+\sqrt{13}}{2}$, то $\Gamma = \Gamma' = A_\infty$.

Список опубликованных работ.

1. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс вещественных подфакторов W*-алгебр. Дальневосточный математический журнал, (2020), Т20, 2. 234-246. https://doi.org/10.47910/FEMJ202024; Импакт-фактор Math-Net.Ru 0.412
2. Rakhimov A.A., Boltaev Kh.Kh. On irreducible hyperfinite real subfactors with index larger than 4. AIP (American Institute of Physics) Conference Proceedings, (2021), pp.541-545. Импакт-фактор 0.415
3. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Примеры индексов вещественных W*-подалгебр комплексного фактора типа I_n. Узбекский математический журнал. (2011), N4, 168-170.
4. Болтаев Х.Х. Возрастающая последовательность вещественных подфакторов конечного фактора. Узбекский математический журнал. (2012), N4, 19-25.
5. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Индекс подфактора произвольного вещественного фактора. Узбекский математический журнал, (2013), N2, 82-85.
6. Болтаев Х.Х. Вещественные W*-подалгеры и их графы. Доклады академии наук РУз., (2013), 3, 3-5.
7. Болтаев Х.Х. Некоторые свойства индекса вещественных W*-подалгебр. Узбекский математический журнал, (2013), 3, 28-32.
8. Болтаев Х.Х. Индекс подфакторов вещественного фактора типа II_1. Доклады академии наук РУз, (2014), 2, 5-6.
9. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. Вещественные W*-подалгебры, их индексы и графы. Узбекский математический журнал, (2015), 4, 84-89.
10. Boltaev Kh.Kh. Index of real subfactors and graphs of real W*-subalgebras. Uzbek Mathematical Journal. (2020), 3, 47-55.

Тезисы.

1. Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов международной конференции «Проблемы современной топологии и её приложения». Ташкент, (2013), 127-128.
2. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования». Владикавказ, (2013), 77-79.
3. Boltaev Kh.Kh. //The V Congress of Turkic Mathematicians, Kyrgyzstan, 5-7, (2014), 56.
4. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //The second Usa-Uzbekistan conference on Analysis and Mathematical physics, (2017), 15-17.
5. Болтаев Х.Х. //Uzbekistan-Malaysiya International online conference on "Computational models and technologies" 24-25 August, (2020), 133-135.
6. Болтаев Х.Х. //Материалы Республиканской научной конференции «Проблемы современной математики». Карши, (2011), 87-89.
7. Болтаев Х.Х. //Материалы республиканской конференции «Современные проблемы комплексного и функционального анализа». Нукус, (2012), 47-49.
8. Rakhimov A.A., Boltaev Kh.Kh. //Тезисы научно-практического семинара «Некорректные неклассические задачи математической физики и анализа». Самарканд, (2012), 67-68.
9. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Операторные алгебры и смежные проблемы». Ташкент, (2012), 195-197.
10. Болтаев Х.Х. //Материалы Республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы комплексного анализа». Ташкент, (2013), 54-55.

Тезисы.

11. Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием учёных из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнение и их приложение». Ташкент, (2013), 309-311.
12. Болтаев Х.Х. //Тезисы докладов республиканской научно-технической конференции «Прикладная математика и информационная безопасность», (2014), 23-26
13. Болтаев Х.Х. //Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Неклассические уравнения математической физики и их приложения (2015), 127-129.
14. Болтаев Х.Х. О некоторых свойствах индекса вещественных W*-подалгебр. // Республиканская научная конференция «математическая физика и родственные проблемы современного анализа» Бухара, (2015), 72-74.
15. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых "Алгебра, анализ и квантовая вероятность (2015), 63-65.
16. Болтаев Х.Х. //«Ал-Хоразмий-2016» Амалий математиканинг долзарб муаммолари республика илмий амалий конференцияси, Бухара, 78-79.
17. Болтаев Х.Х. //«Кубатурные формулы и их приложения» Ташкент, (2017), 11.
18. Болтаев Х.Х. //Новые теоремы математики и их приложения, Самарканд, 14-15 май, (2018), 132-134.
19. Болтаев Х.Х. //"Modern problems of geometry and topology and their applications" . 21-23 ноябрь, (2019), 103-105.
20. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х. //Actual problem of applied mathematics and information technologies, 14-15 ноябрь, (2019), 140-141.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!!!