

K - поле, $\overline{K} = K$, $\text{char } K = 0$

$G_a := (K, +)$ - аддитивная группа поля K

X - неприв. алгебр. многообразие

$G_a \times X \rightarrow X$ - криваяное действие $\leadsto$

будем $G_a \in \text{Aut } X$ наз-ся **G_a -подгруппой** на X

опр. Две G_a -подгр. $H_1, H_2 \subseteq \text{Aut } X$ наз-ся **эквивалентными**,
если $\exists W \subseteq X$ - непустое открыт. подмн-во, т. что $\forall x \in W$

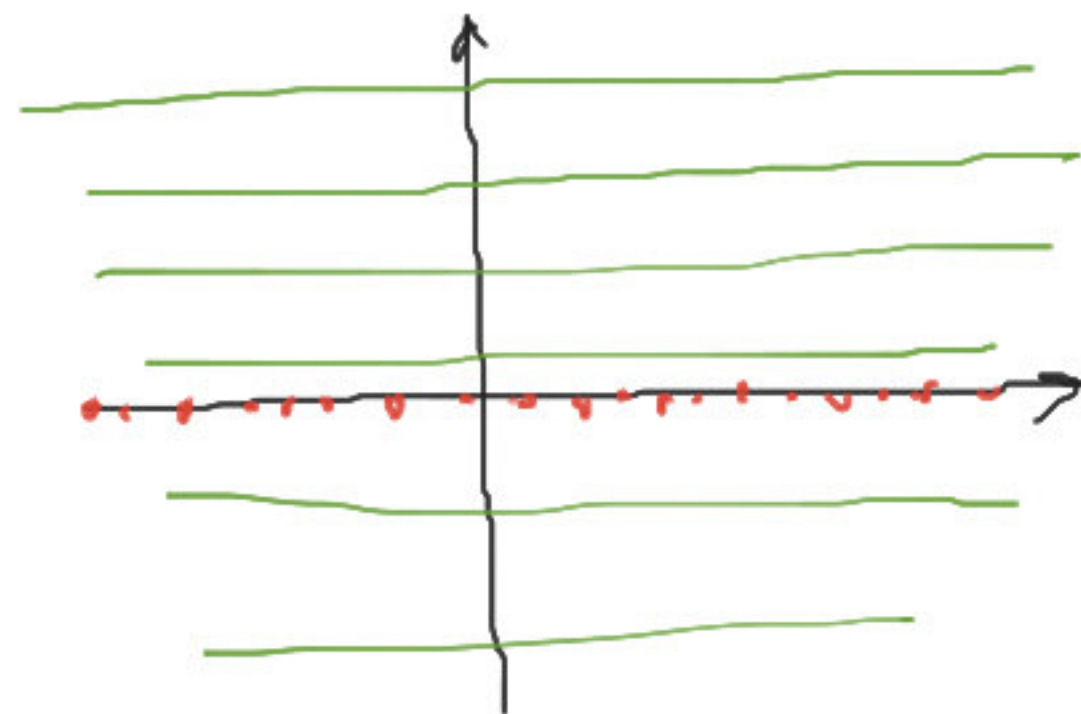
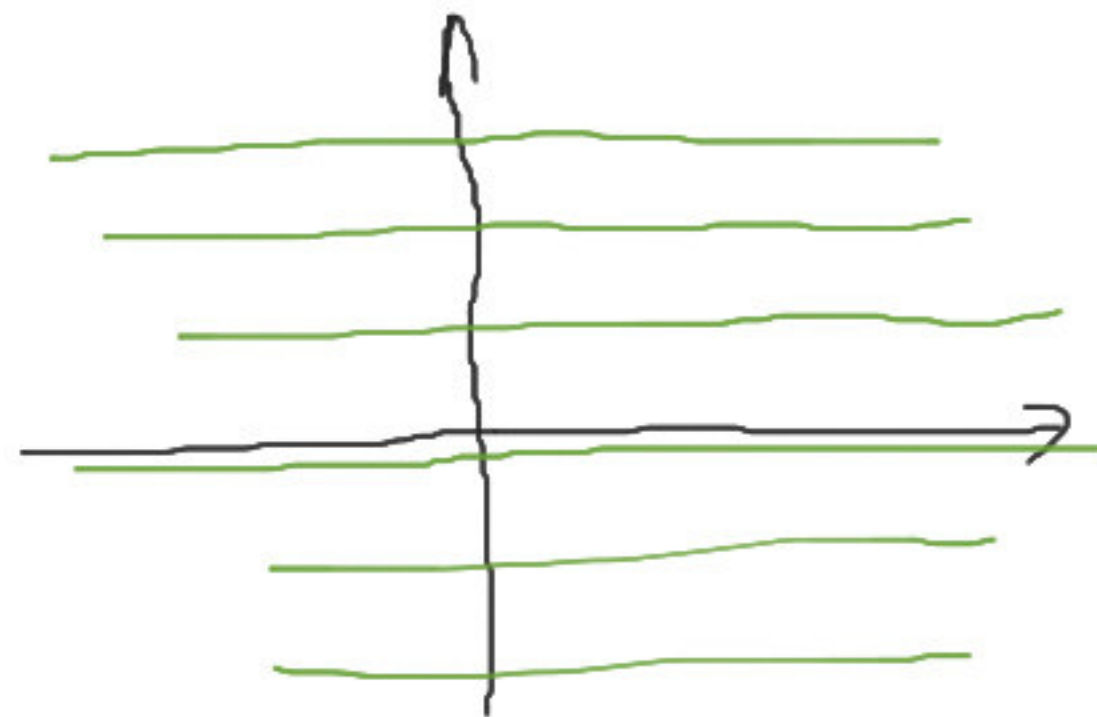
$$H_1 x \cap W = H_2 x \cap W$$

#переп. $X = \mathbb{K}^2$

$$H_1: (s, (x_1, x_2)) \mapsto (x_1 + s, x_2)$$

$$H_2: (s, (x_1, x_2)) \mapsto (x_1 + s x_2, x_2)$$

H_1 и H_2 неabel.



X - непрерв. отобр. нк-эле, $K[X]$ - алгебра форм на X
 $\partial: K[X] \rightarrow K[X]$ - дифференцирование

Опр. ∂ наз.се локально нильпотентным (LND), если
 $\forall f \in K[X] \exists k > 0: \partial^k(f) = 0$.

∂ - LND на $K[X] \leadsto G_a$ -подгруппа $\varphi_\partial: K \rightarrow \text{Aut } X$
 $\varphi_\partial: K \rightarrow \text{Aut}(K[X])$ $s \mapsto \exp(s\partial)$

Факт: отобр. $\partial \mapsto \varphi_\partial$ индуцирует биекцию

$\{\text{ненулевые LND на } K[X]\} / \text{пропорц.-л} \longleftrightarrow \{G_a\text{-подгруппы на } X\}$

~~Thm~~ $H_1, H_2 \subseteq \text{Aut } X$ - две G_a -возм.;

∂_1, ∂_2 - соответ. ЛНД на $K[X] \Rightarrow$ сопр. возм.:

(1) H_1 и H_2 транзитивны.

(2) $\ker \partial_1 = \ker \partial_2$

(3) $\exists a_1, a_2 \in K[X] \setminus \{0\} : a_1 \partial_1 = a_2 \partial_2$

В примере выше: $X = K^2$, $H_1 : (s, (x_1, x_2)) \mapsto (x_1 + s, x_2)$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

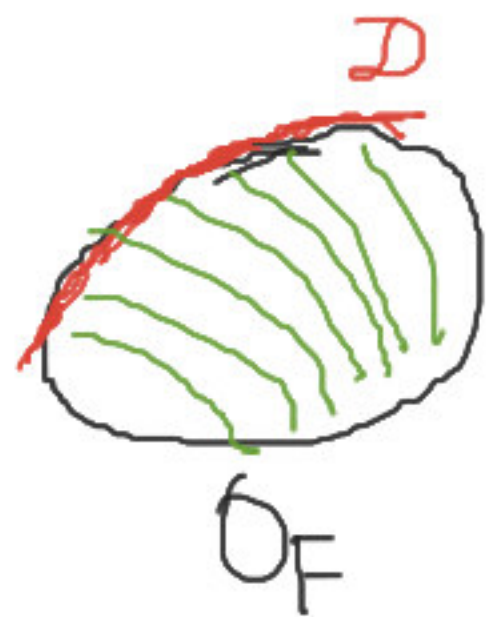
$H_2 : (s, (x_1, x_2)) \mapsto (x_1 + s x_2, x_2)$

$$\partial_2 = x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

X не боз. афорикино, $H \subseteq \text{Aut } X$ - G_a -подгруппа
 $F \subseteq \text{Aut } X$ - алгебраич. подг.

Опр. H называется **F -корневой подгруппой**, если F нормализует H
 Если $H = \text{Im } \varphi$, $\varphi: G_a \rightarrow \text{Aut } X$, то $\forall g \in F, s \in K$ $g\varphi(s)g^{-1} = \varphi(\chi(g)s)$,
 где $\chi \in K(F)$ называется **весом** F -корневой подгруппы H
характеры

Лем. F связна и действует на X с открытым орбитой D_F ; $H D_F \neq D_F$
 $\Rightarrow \exists ! F$ -инвар. открыт. подмногоб. $D \subseteq X$ т.ч. $H D \neq D$ (" H фиксирует D ")



X афф. $H \curvearrowright D$ — $LN D$ на $K[X]$

H нормализуется $F \Leftrightarrow D$ нормализуется F
 $g \cdot \partial(\bar{g}^{-1} \cdot f) = \chi(g) \partial(f)$ (с тем же весом!)

T - тор, $\chi(T)$ - решетка его характеров; χ - T -многообразие
~~Доп~~ χ называется **торическим**, если χ нормально, неприводимо
 и обладает открытой T -орбитой

Факт: $\{ \text{афф. тор } T\text{-мн-знач.} \} / T\text{-экв.} \xleftrightarrow{1:1} (M, G), \text{ где}$

$M \subseteq \chi(T)$ - ^{узлы} узрешетка, G - кон. пор. конус плотной разм-ти
 в $M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

$\Gamma := M \cap G$ - узломонета в M , кон. пор., насыщенный
 $(\Leftrightarrow \Gamma = \mathbb{Z}\Gamma \cap \mathbb{Q}_{\geq 0}\Gamma)$

$(M, G) \Leftrightarrow \Gamma \quad (M = \mathbb{Z}\Gamma, G = \mathbb{Q}_{\geq 0}\Gamma)$

Κοινοποίηση

$$(M, G) \rightsquigarrow X = X(M, G) = \text{Spec } K[\Gamma];$$

απορρ. top.
T-mn-yme

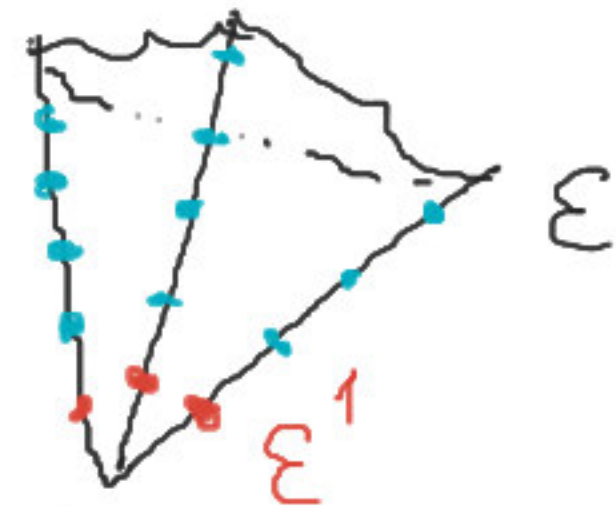
$K[\Gamma]$

$$\bigoplus_{\lambda \in \Gamma} K f_{\lambda}, \quad f_{\lambda} \cdot f_{\mu} = f_{\lambda + \mu} \quad \forall \lambda, \mu \in \Gamma$$

$$N := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}), \quad N_{\mathbb{Q}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

$$\mathcal{E} := G^{\vee} \subseteq N_{\mathbb{Q}} - \text{glob. σελ. κορυφ. κ. } G$$

$$\mathcal{E}' := \{ \rho \in N : \rho \text{ αντιστοιχεί σε } N, \mathbb{Q}, 0 \} - \text{κεντ. (= ρεδρ.) κορυφ. } \mathcal{E} \}$$



$$\mathcal{E}' \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{κεντ. σε } \mathcal{E} \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{κεντ. σε } G \} \xleftrightarrow{1:1} \{ \text{κεντ. σε T-mn. συνολ. } \} \}$$

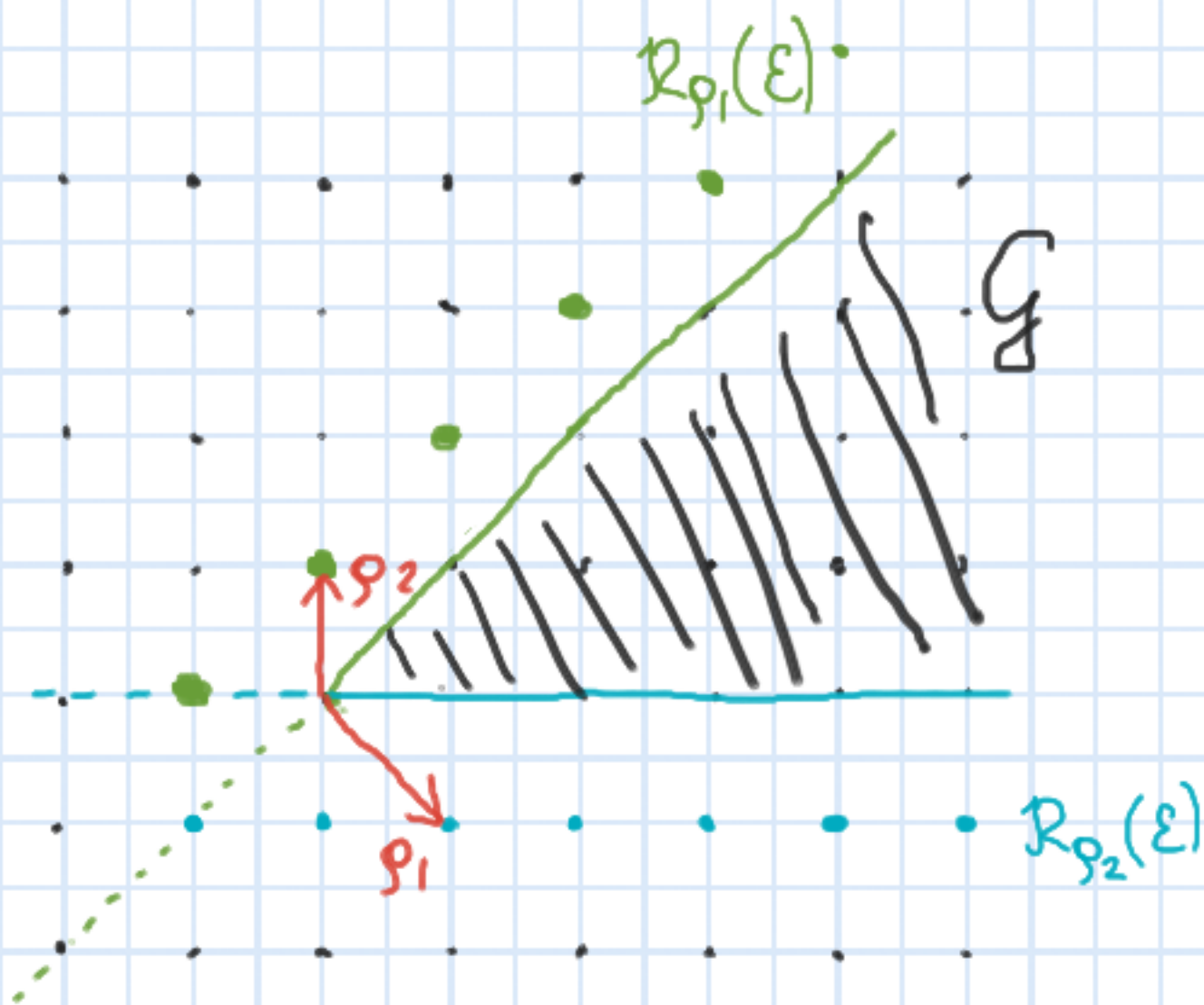
κωδ. - τι 1

$\mathcal{D}_g$

$$\varrho \in \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{R}_\varrho(\mathcal{E}) := \{e \in M \mid \langle \varrho, e \rangle = -1, \langle \varrho', e \rangle \geq 0 \ \forall \varrho' \in \mathcal{E}^1 \setminus \{\varrho\}\}$$

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcup_{\varrho \in \mathcal{E}^1} \mathcal{R}_\varrho(\mathcal{E})$$

Опр. $\mathcal{R}$ - $\mathcal{P}$ на M -ва $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ наз-ся **корнями Дензгофа** конуса $\mathcal{E}$



$$e \in \mathcal{R}_\varrho(\mathcal{E}) \rightsquigarrow \partial_e: K[x] \rightarrow K[x]:$$

$$\partial_e(fx) := \langle \varrho, x \rangle \cdot fx + e \quad - \text{т.о.}$$

T -корнеизыяе LND

$\rightsquigarrow H_e$ — T -корневая подгруппа на X

- Теор. 1) Всякая T -корневая подгр. на X однозначно определяется своим весом
- 2) Мн-во весов всех T -корневых подгр. на X есть $R(E)$
- 3) Классы эквив.-те T -корневых подгр. на X суть $\{R_\rho(E) \mid \rho \in E^1\}$
- 4) $\forall \rho \in E^1 \forall e \in R_\rho(E)$ H_e является гильбертом D_ρ
 (и не является другими T -инв. простыми гильбертами на X)

Οδοδυσχερεια

G - συνεκική περ. απλ. γρφη

$B \subseteq G$ - δορεα υπογρ.

$T \subseteq B$ - μακρ. δρ

$u := \text{Rad}_u B \quad (B = T \cup u)$

$\Lambda^+ \subseteq \mathcal{X}(B)$ - δομικ. βεσα

$B^- \subseteq G$ - υποδορεα κ B
δορεα υπογρ., $B \cap B^- = T$

$u^- := \text{Rad}_u B^-$

Отр. G -мн-зие X наз-ся **сферическим**, если X корн, неприв.
и обладает открытой B -орбитой

$G = B = T \leadsto$ получаем тривиальное T -мн-зие

T -корневые подгр.
на ториз. T -мн-зиех

обобщения


G -корневые подгр. на сфер.
 G -мн-зиех
Лангуйа-Перелешко' 2014 (проект)
таких нет, если G полупрост

B -корневые подгруппы на
сфер. G -мн-зиех **(А-А.)**

Теор. (Винберг - Куммеровский 1978) X -неприв. норм. квадрант, G -мн-эле
 $\Rightarrow$ след. условия эквив.:

(1) X сферично

(2) G -модуль $K[X]$ имеет простой спектр

X -афф. сфер G -мн-эле

Решётка весов $M := \{ \text{веса } B\text{-получив. ф-ий } f \in K(X) \mid f \in \mathcal{X}(T) \}$
 Группы старших весов $\Gamma := \{ \text{---} // \text{---} \mid f \in K[X] \} \subseteq \mathcal{X}(T)$
 $\left. \begin{array}{l} X \text{ афф.} \\ \Downarrow \\ M = \mathbb{Z}\Gamma \end{array} \right\}$

 $K[X] = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} K[X]_{\lambda}$
 $\swarrow$ $\text{простой } G\text{-модуль со ст. весом } \lambda$

$\lambda \in M \rightsquigarrow f_{\lambda} \in K(X)_{\lambda}^{(B)}$, н.ст. $f_{\lambda} \cdot f_{\mu} = f_{\lambda + \mu} \quad \forall \lambda, \mu \in M$

$K[x]^u = \bigoplus_{\lambda \in \Gamma} K f_\lambda \xrightarrow{\sim} Z := \text{Spec } K[x]^u$ - тор. Т-мод-ые
 с теми же M и Γ

$M_{\mathbb{Q}} := M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, $N = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$, $N_{\mathbb{Q}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ | Т-мод-ые, морфизм
 $\pi_u: X \rightarrow Z$

$G = \mathbb{Q}_{>0}^\Gamma$; X нормальна $\Rightarrow \Gamma = M \cap G$

$E = G^V$, E^1

H - В-к.п. $\leadsto \chi(H)$ - к-во вес, ∂ - морф. LND на $K[x]$

Предп. 1) $\chi(H) \in \mathbb{N}^+$

2) ∂ однозначно опре-ся своим действием на $K[x]^u$

H — В-к.п. на $X \Rightarrow H$ комм. с $\mathcal{U} \Rightarrow H$ сохраняет $k[x]^4$

Опр. H **вертикальна** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} H$ действует тривиально на $k[x]^4 = k[z]$

H **горизонтальна** иначе

$\pi_H: X \rightarrow Z$; H верт. $\Leftrightarrow$ сохраняет свои

Утв. 1) H верт. $\Leftrightarrow H$ сохраняет открытую В-орбиту в X

2) H гориз. $\Leftrightarrow H$ не сохр. — // —,

при этом H движется ровно один В-инвар.
простой дивизор в X

Простейшие конструкции В-к.п.



[K1] $u_+ \in Z(u)$ - центральная корневая подгр. в $u \leadsto$ В-к.п.

[K2] (реплики) ∂ - В-корн. LND на $K[x]$ веса χ , $\chi \in \Gamma$, $f_\chi \in \ker \partial$
 $\Rightarrow f_\chi \partial$ - В-корн. LND веса $\chi + \lambda$, ∂ и $f_\chi \partial$ аксиомы

K1 & K2 используются в работе Begeta & van Santen '2021

[K3] $G \subset \tilde{G}$, $B \subset \tilde{B}$, $u \in \hat{u}$, $\tilde{u}_+ \in Z(\tilde{u}) \leadsto$ В-к.п. (может быть горизонтальной!)

[K4] V - свободный модуль, $f \in V^*$ - модульный вектор $\Rightarrow \partial = \frac{\partial}{\partial f}$ - В-корн. LND

(может быть гориз. или вертик.)

Примеры показывают, что могут существовать > 1 В-к.п. одного веса
необх. условия на мин-во весов В-к.п.:

- Проп. 1) λ -вес вертик. В-к.п. $\Rightarrow \forall \chi \in \lambda + \Gamma$ - тоже вес верт. В-к.п.
2) λ -вес торц. В-к.п. $\Rightarrow \lambda \in R(E)$ (в лев. $\lambda \in M$)

Зам. $\exists$ примеры, когда вес $\lambda \in R(E) \cap \Lambda^+$ не реализуется как вес
торц. В-к.п.

Сл-вие. $\Gamma = M \cap \Lambda^+ \Rightarrow$ ка χ не т торц. В-к.п.

Сл-вие. $G = SL_2 \Rightarrow$ —//—



$D^B(X) := \{ B\text{-инвар. простые дивизоры } \mathcal{O}_X \}$

$D^G(X) := \{ G\text{-инвар. } \text{---//---} \}$

$D(X) = D^B(X) \setminus D^G(X) = \text{"краски"}$

Вообще говоря, могут $\exists$ краски, к-рые нельзя сдвинуть при помощи B -к.п.
(напр., краски типа $\neq \sigma$)

$O \subseteq X$ - откр. G -орбита

$\forall v$. $\Gamma(O) = M \cap K^+ \Rightarrow$ ни одну краску нельзя сдвинуть при том B -к.п.

Лемма (A-A) $\forall D \in D^G(X) \exists B\text{-к.п. } H \text{ на } X, \text{ к-рая движет } D$

Επιπλέον ορίστηκαν υπερ-τ. αμορ. σφαιρ. G-μν. για χ :

$$\mathcal{I} := \mathbb{Q}_{\geq 0} \{ \lambda + \mu - \nu \mid \lambda, \mu, \nu \in \Gamma, \langle K[x]_{\lambda} \cdot K[x]_{\mu} \rangle \supseteq K[x]_{\nu} \} - \text{κ.π. ιδιότητα } \in M_Q$$

"κομμωσ χ βοσποβ"

Βεβαιώθηκε T-μν. διαφορ-με με τη βοήθεια, συνεπώς:

$$\mu \in R_Q(\mathcal{E}) \rightsquigarrow \partial_{\mu}: f_{\lambda} \mapsto \langle \vartheta, \lambda \rangle \cdot f_{\lambda + \mu}$$

παρατηρούμε: $\partial_{\mu}(f_{\lambda}) = \langle \vartheta, \lambda \rangle \cdot f_{\mu} \cdot f_{\lambda}$

$$\mu \in R(\mathcal{E}) \Rightarrow \mu \notin \Gamma, \text{ t.e. } f_{\mu} \in K(Z) \setminus K[Z]$$

Общая конструкция тригоном. В-корневых подгрупп на X

O -откр. G -орбита, $\Gamma(O) \geq \Gamma(X)$

$$\mu \in K(E) \cap \Gamma(O); \rho \in E^1: \mu \in K_\rho(E)$$

определен лев. отобр. $\partial_\mu: K[X] \rightarrow K[O]$ с лев. действием:
 $\lambda \in \Gamma, g \in K[X], \partial_\mu(g) := \langle \rho, \lambda \rangle \cdot \mu \cdot g$

Теор. 1) ∂_μ -корр. отпр. лев. отобр. $K[X] \rightarrow K[X]$

2) ∂_μ -гипер-ле $\Leftrightarrow \rho \in \mathcal{Z}^\perp$. При этом $\partial_\mu - LND$

$$\mathcal{Z}^\perp = \{ \xi \in N \mid \langle \xi, x \rangle = 0 \forall x \in \mathcal{Z} \}$$

Мы называем ∂_μ **стандартным** LND на X для μ

Приложения к описанию G -корневых подгрупп

Проп. H - G -к.п. на $X \Rightarrow H$ порожд. как B -к.п. и однок. сфер-ва
своим весом. Более того, $\chi(H) \in R(E) \cap X(G)$

Сл-ве. G -простота $\Rightarrow$ на X нет G -корн. подгрупп

Проп. ∂ - G -норм. $LN\mathcal{P}$ на $K[X]$ веса μ ; $\mu \in R_{\mathcal{P}}(E)$ для нек-рого
 $\Rightarrow \exists c \in K^{\times} : \forall \lambda \in \Gamma \quad \partial$ действует на $K[X]_{\lambda}$ след. обр.; $\mathcal{P} \in E^1$

$$\bullet \langle \mathcal{P}, \lambda \rangle = 0 \Rightarrow \partial(K[X]_{\lambda}) = 0$$

$$\bullet \langle \mathcal{P}, \lambda \rangle > 0 \Rightarrow \partial : K[X]_{\lambda} \xrightarrow[(G, G)]{\sim} K[X]_{\lambda + \mu}; \partial(f_{\lambda}) = c \cdot \langle \mathcal{P}, \lambda \rangle f_{\lambda + \mu}$$

$\tilde{M} := X(G) \cap \Gamma(0) \leftarrow$ решетка весов G -полуинв. ф-ий в $k(x)$

Теор. $\mu \in \tilde{M} \Rightarrow$ след. усл эквив.:

(1) μ - вес нек-рой G -к.п. на X

(2) $\mu \in R_{\rho}(E)$ для нек-рой $\rho \in E^1 \cap \tau^{\perp}$

В этом случае G -к.п. веса μ автоматически стандартна

Сл-ствие: $\Gamma(0) = M \cap \Lambda^+ \Rightarrow$ теорема даёт описание всех G -к.п. на X

Откр. проблема. Получить полное описание всех G -к.п. без
этого ограничения

Ориентированный случай

χ - орир. сред. G -мн-зие

Опр. χ наз-ся ориентированным, если $\forall \lambda, \mu \in \Gamma \quad K[\chi]_\lambda \cdot K[\chi]_\mu \subseteq K[\chi]_{\lambda+\mu}$

Факт. $\forall \Gamma \exists!$ орир. G -мн-зие $\chi \subset \Gamma(x) = \Gamma \quad (\Leftrightarrow \tau = 0)$

χ -ориер. $\Rightarrow \Gamma(0) = M \cap \Lambda^+$

Теор. χ -ориер. $\Rightarrow$

(1) мн-во весов G -к.п. на χ есть $R(E) \cap \mathcal{E}(G)$ + все сдвиги

(2) мн-во весов корн. B -к.п. на χ есть $R(E) \cap \Lambda^+$ + $\forall$ вес $\in R(E) \cap \Lambda^+$ есть сдвиг.

Теор. χ -ориер. $\Rightarrow \forall D \in D^G(\chi) \exists B$ к.п. на χ , гл. корень D B -к.п.

Частный случай $G = SL_2 \times \underbrace{T_0}_{T_0}$, X - афф. спектр, G - мин-эле

T имеет откр. орбиту $\hookrightarrow X$ $\Rightarrow X$ - описываем.

X - тор. T -мин-эле

Теор. 1) $\forall$ В.-к.п. на X одн. опр.ся своим весом
2) мин-во весов тор. В.-к.п. есть $K(\epsilon) \cap \Lambda^+$
3) мин-во весов верт. В.-к.п. - (описание)