ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В НЕКОММУТАТИВНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НА АТОМИЧЕСКИХ АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

Азизов Азизхон Нодирович

Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека

Научный руководитель: д.ф.-м.н., профессор Чилин В.И.

17 июня 2021 года

Содержание

Введение

Начало в исследованиях, относящихся к некоммутативным индивидуальным эргодическим теоремам для действия положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий в некоммутативных L_1 пространствах $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, ассоциированных с полуконечной алгеброй фон Неймана $\mathcal{M}$, снабженной точным полуконечным нормальным следом τ, принадлежит F.J. Yeadon. Доказав максимальное эргодическое неравенство, он получил следующий некоммутативный вариант индивидуальной эргодической теоремы.

Теорема 0.0.1

Если $T : L_1(\mathcal{M}, \tau) \to L_1(\mathcal{M}, \tau)$ положительное линейное $L_1 - L_\infty$-сжатие, то для каждого $x \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, существует оператор $\widehat{x} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ такой, что для любого $\varepsilon > 0$ существует проектор $e \in \mathcal{M}$ такой, что $\tau(\mathbf{1} - e) < \varepsilon$ и $\left\| e \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} T^k(x) - \widehat{x} \right) \cdot e \right\|_\infty \to 0$ при $n \to \infty$, где $\mathbf{1}$ - единица алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$.

Исследование справедливости индивидуальных эргодических теорем вне $L_1(\mathcal{M},\tau)$ началось намного позже с фундаментальной статьи M. Junge and Q. Xu, где некоммутативная индивидуальная эргодическая теорема была расширена на случай положительных операторов Данфорда-Шварца, действующих в некоммутативных пространствах $L_p(\mathcal{M},\tau),\ 1 < p < \infty$. В работах Чилина В.И. и Литвинова С.Н. некоммутативная индивидуальная эргодическая теорема была доказана для положительных операторов Данфорда-Шварца в некоммутативных пространствах Лоренца и Орлича.

Естественно возникает вопрос изучения эргодических теорем для случая произвольных некоммутативных симметричных пространств. Данная диссертационная работа посвящена нахождению вариантов эргодических теорем в классе симметричных идеалов компактных операторов, являющихся важными примерами атомических некоммутативных симметричных пространств. В диссертации устанавливаются критерии справедливости некоммутативных индивидуальной и статистической эргодических теорем для операторов Данфорда-Шварца, действующих в симметричных идеалах компактных операторов. Кроме того, отдельно исследуется вопрос о справедливости эргодических теорем в классе симметричных пространств последовательностей.

Симметричные пространства функций

Симметричные пространства измеримых функций являются важным подклассом в классе банаховых функциональных пространств. Свойства симметричных пространств активно используются в теории интерполяции линейных операторов, эргодической теории и теории интегрирования (см., например, [1], [2], [3]). Изначально симметричные пространства строились в классе банаховых пространств измеримых функций, определенных на полуоси $(0, \infty)$ (или на отрезке $[0, 1]$) с мерой Лебега ν (см., например, [2]), и отдельна для банаховых пространств последовательностей, т.е. для измеримых функций, заданных на пространстве с мерой $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \lambda)$, где λ считающая мера на σ-алгебре $2^{\mathbb{N}}$ всех подмножеств из множества $\mathbb{N}$ натуральных чисел [4].

[1] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. 1988.

[2] Krein S.G., Petunin Ju.I. and Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. 1982.

[3] Lord S., Sukochev F., Zanin D. Singular Traces. Theory and Applications. 2013.

[4] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. 1996.

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ измеримое пространство с полной σ-конечной мерой. Через $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0(\Omega)$ обозначим алгебру всех классов равных почти всюду конечных действительных измеримых функций на $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, а через $\mathcal{L}_0(\mu)$ подалгебру в $\mathcal{L}_0$ всех таких $f \in \mathcal{L}_0$, для которых $\mu(\{|f| > \lambda\}) < \infty$ при некотором $\lambda > 0$. Как обычно, через $\mathcal{L}_p \subset \mathcal{L}_0(\mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, обозначается классическое банахово функциональное L_p-пространство, снабженное стандартной нормой $\|\cdot\|_p$.

Если $f \in \mathcal{L}_0(\mu)$, то *невозрастающая перестановка* функции f определяется равенством $\mu_t(f) = \inf\{\lambda > 0 : \ \mu\{|f| > \lambda\} \leq t\}, \quad t \geq 0$ (см. [5]).

[5] Krein S.G., Petunin Ju.I. and Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. 1982.

Ненулевое линейное подпространство $E \subset \mathcal{L}_0(\mu)$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *симметричным*, если из условий $f \in E$, $g \in \mathcal{L}_0(\mu)$, $\mu_t(g) \le \mu_t(f) \ \ \forall\, t > 0$, следует, что $g \in E$ и $\|g\|_E \le \|f\|_E$.

Примерами симметричных пространств служат пространства $(\mathcal{L}_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \le p \le \infty$, пространство $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_\infty$ с нормой $\|f\|_{\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_\infty} = \max\{\|f\|_1, \|f\|_\infty\}$ и пространство $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_\infty$ с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{L}_1+\mathcal{L}_\infty} = \inf\{\|g\|_1 + \|h\|_\infty : \ f = g + h, \ g \in \mathcal{L}_1, \ h \in \mathcal{L}_\infty\}$$

(см. [6]).

[6] Krein S.G., Petunin Ju.I. and Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. 1982.

Говорят, что норма $\|\cdot\|_E$ в симметричном пространстве E имеет свойство порядковой непрерывности (соответственно, свойство Фату) если из условий $0 \leq f_n \in E,\ f_n \downarrow 0$ вытекает $\|f_n\|_E \downarrow 0$ (соответсвенно, если из условий $0 \leq f_n \leq f_{n+1}, \quad f_n \in E,\ n = 1, 2, \ldots, \sup\limits_{n \geq 1} \|f_n\|_E < \infty$, вытекает, что существует такая функция $f \in E$, что $f_n \uparrow f$ и $\sup\limits_{n \geq 1} \|f_n\|_E = \|f\|_E$).

Пусть $\mathcal{A}_\nu$ есть σ-алгебра всех измеримых по Лебегу множеств из $(0,\infty)$ и ν мера Лебега на $\mathcal{A}_\nu$. Для любого симметричного пространства $E = E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu) \subset \mathcal{L}_1(0,\infty) + \mathcal{L}_\infty(0,\infty)$ положим

$$E(\Omega) = E(\Omega,\mathcal{A},\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \mu_t(f) \in E\};$$

$$\|f\|_{E(\Omega)} = \|\mu_t(f)\|_E; \quad f \in E(\Omega,\mathcal{A},\mu).$$

Известно, что $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ есть симметричное пространство измеримых функций на $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ (см., например, [7]), в этом случае, говорят, что симметричное пространство $(E(\Omega), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$ порождено симметричным пространством E.

[7] Lord S., Sukochev F., Zanin D. Singular Traces. Theory and Applications. 2013.

Пусть $s(\mathbb{K})$ линейное пространство всех последовательностей комплексных ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) или действительных ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) чисел, E бесконечномерное идеальное линейное подпространство в $s(\mathbb{K})$ (свойство идеальности для E означает, что из условий $x \in E$, $y \in s(\mathbb{K})$ и $|y| \le |x|$ следует включение $y \in E$).

Пусть $\|\cdot\|_E$ — банахова монотонная норма на E. Последнее означает, что из условий $x, y \in E$ и $|x| \le |y|$ следует, что $\|x\|_E \le \|y\|_E$. В этом случае пару $(E, \|\cdot\|_E)$ называют банаховым идеальным пространством (БИП) в $s(\mathbb{K})$ [8].

[8] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. 1984.

Банахова решетка $(E, \|\cdot\|_E)$ называется p-выпуклой ($1 \leq p < \infty$), если существует такая константа $M > 0$, что для любого конечного набора элементов $\{x_i\}_{i=1}^n \subset E$ верно следующее неравенство

$$\Big\|\Big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_E \leq M\Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Наименьшая среди таких констант M называется константой p-выпуклости пространства E и обозначается через $M^{(p)}(E)$.

Симметричные пространства последовательностей

Важным подклассом банаховых идеальных пространств служит класс симметричных пространств последовательностей.

Пусть $l_\infty = l_\infty(\mathbb{R})$ (соответственно, $c_0 = c_0(\mathbb{R})$) банахова решетка всех ограниченных (соответственно, сходящихся к нулю) последовательностей $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ чисел из $\mathbb{R}$ относительно нормы $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|$.

Если $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_\infty$, то невозрастающая перестановка $x^* = \{\xi_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ определяется равенствами $\xi_n^* = \inf\limits_{card(F)<n} \sup\limits_{n\notin F} |\xi_n|$, F конечное подмножество в $\mathbb{N}$. В случае, когда $x = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0$, имеем, что $\xi_n^* \downarrow 0$, и существует биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такая, что $\xi_n^* = |\xi_{\pi(n)}|$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Ненулевое линейное подпространство $E \subset l_\infty$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_E$ называется *симметричным пространством последовательностей*, если из условий $y \in E$, $x \in l_\infty$, $x^* \leq y^*$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Для любого симметричного пространства последовательностей E верно $E \subseteq c_0$ или $E = l_\infty$.

Для симметричного пространства последовательностей справедливы следующие непрерывные вложения [9]:

$$(l_1, \|\cdot\|_1) \subset (E, \|\cdot\|_E) \subset (l_\infty, \|\cdot\|_\infty),$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_E \;\text{ если }\; x \in E, \;\text{ и }\; \|x\|_E \leq \|x\|_1 \;\text{ для всех }\; x \in l_1.$$

Порядок Харди-Литтлвуд-Пойя $x \prec\prec y$ в пространстве l_∞ опеределяется следующим образом:

$$(x = \{\xi_n\}_{n=1}^\infty \prec\prec y = \{\eta_n\}_{n=1}^\infty) \;\Leftrightarrow\; (\sum_{k=1}^n \xi_k^* \leq \sum_{k=1}^n \eta_k^* \;\text{ for all }\; n \in \mathbb{N}).$$

[9] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. 1988.

Симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ называется *вполне симметричным пространством последовательностей*, если условия $x \prec\prec y,\ x \in l_\infty,\ y \in E$, влекут

$$x \in E \quad \text{и} \quad \|x\|_E \leq \|y\|_E.$$

Примерами вполне симметричных пространств являются пространства $c_0,\ l_p,\ 1 \leq p \leq \infty$, а также пространства последовательностей Орлича, Лоренца и Марцинкевича.

Идеалы компактных операторов

Пусть $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$ бесконечномерное гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, и пусть $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ есть $C^\star$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Через $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ (соответственно, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$) обозначим двусторонний идеал компактных (соответственно, конечномерных) линейных операторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Известно, что для всякого собственного двустороннего идеала $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, верно $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \subset \mathcal{I}$, и если $\mathcal{H}$ сепарабельное гильбертово пространство, то $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ (см., например, [10]).

В то же время, если $\mathcal{H}$ несепарабельное гильбертово пространство, то существует собственный двусторонний идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ такой, что $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \subsetneqq \mathcal{I}$.

[10] Simon B. Trace ideals and their applications. 2005.

Положим
$\mathcal{B}_h(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : x = x^*\}$, $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}) = \{x \in \mathcal{B}_h(\mathcal{H}) : x \geq 0\}$,
и пусть $\tau : \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \to [0, \infty]$ есть *канонический след* на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, т.е.

$$\tau(x) = \sum_{j \in J} (x\varphi_j, \varphi_j), \quad x \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}),$$

где $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ есть ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ (см., например, [11]).

Пусть $\mathcal{P}(\mathcal{H}) = \{e \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : e = e^2 = e^*\}$ решетка всех проекторов в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Если $\mathbf{1}$ есть единица $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $e \in \mathcal{P}(\mathcal{H})$, то положим $e^\perp = \mathbf{1} - e$.

[11] Stratila S., Zsido L. Lectures on von Neumann algebras. 1975.

Пусть $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, и пусть $\{e_\lambda(|x|)\}_{\lambda \geq 0}$ спектральное семейство проекторов для модуля $|x| = (x^*x)^{1/2}$ оператора x, т.е. $e_\lambda(|x|) = \{|x| \leq \lambda\}$. Если $t > 0$, то *обощенным t-м собственным значением* оператора x, или *невозрастающей перестановкой* оператора x, называется функция $\mu_t(x) = \inf\{\lambda > 0 : \ \tau(e_\lambda(|x|)^\perp) \leq t\}$ (см. [12]).

Ненулевое линейное подпространство $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ с банаховой нормой $\|\cdot\|_X$ называется *некоммутативным симметричным пространством* (соответственно, *некоммутативным вполне симметричным пространством*), если из условий $x \in X$, $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mu_t(y) \leq \mu_t(x)$ для всех $t > 0$ (соответственно, $x \in X$, $y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\int\limits_0^s \mu_t(y)dt \leq \int\limits_0^s \mu_t(x)dt$ для всех $s > 0$ (запись $y \prec\prec x$)) следует, что $y \in X$ и $\|y\|_X \leq \|x\|_X$.

[12] Fack T., Kosaki H. Generalized s-numbers of τ-measurable operators. 1986.

Пространства $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$, $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$, и хорошо известные двусторонние банаховы идеалы Шаттена

$$\mathcal{C}_p = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \ \|x\|_p = \tau(|x|^p)^{1/p} < \infty\}, \ 1 \le p < \infty,$$

являются примерами вполне симметричных пространств.

Отметим, что для любого симметричного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и для всех $x \in X$, $a, b \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, верно

$$\|x\|_X = \|\,|x|\,\|_X = \|x^*\|_X, \quad axb \in X, \ \|axb\|_X \le \|a\|_\infty \|b\|_\infty \|x\|_X.$$

Дуальность между симметричными пространствами последовательностей и некоммутативными симметричными пространствами

Пусть $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ симметричное пространство. Зафиксируем ортонормированный базис $\{\varphi_j\}_{j\in J}$ в $\mathcal{H}$ и выберем счетное подмножество $\{\varphi_{j_n}\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть p_n одномерный проектор на подпространство $\mathbb{C}\cdot\varphi_{j_n} \subset \mathcal{H}$. Ясно, что множество

$$E(X) = \left\{ \xi = \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_0 : \ x_\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n p_n \in X \right\}$$

(ряд сходится равномерно), есть симметричное пространство с нормой $\|\xi\|_{E(X)} = \|x_\xi\|_X$. Следовательно, каждое симметричное подпространство $(X, \|\cdot\|_X) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ однозначно порождает симметричное пространство последовательностей $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)}) \subset c_0$.

Обратное тоже верно: каждое симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E) \subset c_0$ однозначно порождает симметричное пространство $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ по следующему правилу (см., например, [13]): $\mathcal{C}_E = \{x \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \{s_n(x)\} \in E\}, \quad \|x\|_{\mathcal{C}_E} = \|\{s_n(x)\}\|_E.$

При этом, $E(\mathcal{C}_E) = E$, $\|\cdot\|_{E(\mathcal{C}_E)} = \|\cdot\|_E$, $\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)} = \mathcal{C}_E$, $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_{E(\mathcal{C}_E)}} = \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E}$.

Пару $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ будем называть *банаховым идеалом компактных операторов* (ср. [14]). Известно, что $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p) = (\mathcal{C}_{l_p}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{l_p}})$ для всех $1 \leq p < \infty$ и $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty) = (\mathcal{C}_{c_0}, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_{c_0}})$.

Порядок Харди-Литтлвуд-Пойя в банаховом идеале $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ определяется следующим образом: $x \prec\prec y, \; x, y \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \iff \{s_n(x)\} \prec\prec \{s_n(y)\}$.

---

[13] Lord S., Sukochev F., Zanin D. Singular Traces. Theory and Applications. 2013.

[14] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. 1965.

Говорят, что банахов идеал $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ является *вполне симметричным*, если из условий $y \in \mathcal{C}_E$, $x \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $x \prec\prec y$ следует, что $x \in \mathcal{C}_E$ и $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$. Ясно, что $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ вполне симметричный идеал тогда и только тогда, когда $(E, \|\cdot\|_E)$ является вполне симметричным пространством последовательностей.

Примерами вполне симметричных идеалов являются $(\mathcal{K}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ и банаховы идеалы Шаттена $(\mathcal{C}_p, \|\cdot\|_p)$ для всех $1 \leq p < \infty$. Отметим, что $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_E \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$ для каждого симметричного пространства $E \subset c_0$, при этом, $\|x\|_{\mathcal{C}_E} \leq \|x\|_1$ и $\|y\|_\infty \leq \|y\|_{\mathcal{C}_E}$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$ и $y \in \mathcal{C}_E$.

Вложения симметричных функциональных пространств

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$—измеримое пространство с полной σ-конечной мерой и пусть $\nabla = \nabla_\mu$—полная булева алгебра классов эквивалентности $e = [E]$ равных почти всюду множеств из $\mathcal{A}$. Известно, что $\widehat{\mu}(e) = \mu(E)$ есть строго положительная σ-конечная счетно-аддитивная мера на ∇. В дальнейшем мера $\widehat{\mu}$ обозначается через μ и алгебра $\mathcal{L}_0(\Omega)$ (соответственно, пространства $\mathcal{L}^p(\Omega),\ 1 \leq p \leq \infty$) через $\mathcal{L}_0(\nabla)$ (соответственно, $\mathcal{L}^p(\nabla)$).

Если $f \in \mathcal{L}_0(\nabla)$, то носитель функции f определяется равенством $\mathrm{supp}(f) = \{f \neq 0\}$.

Если $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ есть неатомическое измеримое пространство с полной σ-конечной мерой, то верна следующая теорема об изометрическом вложении симметричного пространства $E((0,\infty),\nu)$ в симметричное пространство $E(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Теорема 2.1.3

Пусть $E((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu)$ — симметричное пространство измеримых функций на $((0,\infty),\nu)$, и пусть $0 \leq f \in \mathcal{R}_\mu$, $\mu(\mathrm{supp}(f)) = +\infty$. Тогда существует инъективный вполне аддитивный гомоморфизм $\Psi : \mathcal{L}_0((0,\infty),\mathcal{A}_\nu,\nu) \to \mathcal{L}_0(\nabla)$, такой, что сужение $\Psi|_{E(0,\infty)}$ есть изометрия из $(E(0,\infty), \|\cdot\|_{E(0,\infty)})$ в $(E(\Omega,\mathcal{A},\mu), \|\cdot\|_{E(\Omega)})$, и верно равенство $\Psi(\mu_t(f)) = f$.

Построение симметричных пространств функций с помощью симметричных пространств последовательностей

Для каждого симметричного пространства последовательностей $(X, \|\cdot\|_X)$ мы определяем симметричное пространство $(E(X), \|\cdot\|_{E(X)})$ измеримых функций на $(0, \infty)$, для которого $X = \{x \in l_\infty : x^* \in E(X)\}$ и $\|x\|_X = \|x^*\|_{E(X)}$, $x \in X$. Как было отмечено ранее, для симметричного пространства функций $E(0, \infty)$ симметричное пространство $(E(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})})$ на $(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu)$, порожденное симметричным пространством $E(0, \infty)$, является симметричным пространством последовательностей. В связи с этим, возникает следующий вопрос:

(Q)

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ произвольное симметричное пространство последовательностей. Существует ли симметричное пространство $E = E(0, \infty)$ на $((0, \infty), \nu)$, для которого $X = E(\mathbb{N})$ и $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{E(\mathbb{N})}$?

Если $(X, \|\cdot\|_X) = (l_p, \|\cdot\|_p),\ 1 \leq p \leq \infty$, то в силу равенства $(X, \|\cdot\|_X) = (\mathcal{L}_p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_p)$, ответ на вопрос (Q), очевидно, положительный. Следующая теорема даёт положительный ответ на вопрос (Q).

Теорема 2.3.3

Для каждого симметричного пространства последовательностей $(X, \|\cdot\|_X) \subseteq c_0$ существует такое симметричное пространство $E(X)$ на $(0, \infty)$, что $X = E(X)(\mathbb{N})$ и $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{E(X)(\mathbb{N})}$.

Следующее утверждение устанавливает взаимную связь свойства порядковой непрерывности и свойства Фату для симметричного пространства последовательностей $(X, \|\cdot\|_X)$ и построенного по нему симметричного пространства функций $E(X)$ на $(0, \infty)$

Утверждение 2.3.4

Симметричное пространство $E(X)$ на $(0, \infty)$ имеет свойство Фату (соответственно, свойство порядковой непрерывности) тогда и только тогда, когда симметричное пространство последовательностей $(X, \|\cdot\|_X) \subseteq c_0$ имеет свойство Фату (соответственно, свойство порядковой непрерывности).

Эргодичекая теорема Блума-Хансона для банаховых идеальных пространств

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ измеримое пространство с полной конечной мерой μ, и пусть $\tau : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ сохраняющее меру перемешивающее преобразование. Эргодическая теорема Блума-Хансона [15] утверждает, что для любого $f \in \mathcal{L}_p$, $1 < p < \infty$, верна следующая сходимость $\|\frac{1}{n+1}\sum\limits_{j=0}^{n}(T^{k_j}f)(\omega) - \int\limits_{\Omega} fd\mu\|_p \to 0$ для всех строго возрастающих последовательностей $k_0 < k_1 < \ldots$ натуральных чисел. Отсюда, в частности, следует, что последовательность $\{T^n(f)\}_{n=0}^{\infty}$ сходится слабо в $\mathcal{L}_p$ для всех $f \in \mathcal{L}_p$ [16].

[15] Blum J.R., Hanson D.L. On the mean ergodic theorem for subsequences. Bull. Amer. Math. Soc. 1960.

[16] Krengel U. Ergodic theorems. 1985.

В связи с этим, естественно, возникает задача о выделение класса банаховых пространств X, в которых слабая сходимость последовательности $\{T^n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ при действии линейного сжатия T в X, влечет сильную сходимость средних Чезаро $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}$ для каждой подпоследовательности $\{T^{k_j}\}_{j=0}^{\infty}$.

Наличие свойства Блума-Хансона в пространствах $\mathcal{L}_p$, $1 \leq p < \infty$, в случае произвольных пространств с мерой, до сих пор не установлено. Известен только следующий результат В. Мюллера и Ю. Тамилова [17].

Теорема 3.1.1

Пусть T линейное сжатие на банаховом пространстве последовательностей l_p, $1 \leq p < \infty$. Тогда для любого элемента $x \in l_p$ последовательность $\{T^n(x)\}$ слабо сходится к $x_0 \in l_p$ в том и только в том случае, когда $\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\|_p \to 0$ для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

[17] Muller V., Tomilov Y. Quasisimilarity of power bounded operators and Blum-Hanson property. J. Funct. Anal. 2007.

Следующая теорема устанавливает свойство Блума-Хансона для каждого сепарабельного p-выпуклого $(p > 1)$ БИП $E \subset s(\mathbb{K})$.

Теорема 3.1.2

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ бесконечномерное p-выпуклое сепарабельное банахово идеальное подпространство в $s(\mathbb{K})$ с константой p-выпуклости $M^{(p)}(E) = 1$, $p > 1$. Тогда для любого линейного сжатия $T : E \to E$ из слабой сходимости в $(E, \|\cdot\|_E)$ последовательности $\{T^n(x)\}$ к элементу $x_0 \in E$ следует сходимость

$$\left\|\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} T^{k_j}(x) - x_0\right\|_E \to 0$$

для всех $\{k_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathfrak{N}$.

Индивидуальная эргодическая теорема в симметричных пространствах последовательностей

Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ измеримое пространство с σ-конечной мерой, $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$. Рассмотрим оператор Данфорда-Шварца $T : \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_\infty \to \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_\infty$ (запись $T \in DS$), т.е. такой линейный оператор T, что $\|T(f)\|_1 \leq \|f\|_1$ для всех $f \in \mathcal{L}_1$ и $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ для всех $f \in \mathcal{L}_\infty$. Из интерполяционной теоремы Рисса следует, что каждый оператор $T \in DS$ действует как линейное сжатие в $\mathcal{L}_p$ для любого $1 < p < \infty$.

Из индивидуальной эргодической теоремы Данфорда-Шварца [18] следует, что для любого $T \in DS$ и $f \in \mathcal{L}_p$ существует такая функция $\widehat{f} \in \mathcal{L}_p$, что средние Чезаро $A_n(T)(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k(f)$ сходятся почти всюду (п.в.) к $\widehat{f}$.

[18] Dunford N. and Schwartz J.T. Linear operators. Part I: General theory. 1988.

Известно, что вполне симметричное пространство последовательностей $(E, \|\cdot\|_E)$ является точным интерполяционным пространством в банаховой паре (l_1, l_∞). Поэтому $T(E) \subset E$ и $\|T\|_{E\to E} \leq 1$ для всех $T \in DS$ (см., например, [19], [20]).

Доказана следующая версия индивидуальной эргодической теоремы для вполне симметричное пространство последовательностей.

Теорема 3.2.2

Если $E \subseteq c_0$ *вполне симметричное пространство последовательностей,* $T \in DS$, $x \in E$, *то существует такой элемент,* $\widehat{x} \in E$, *что* $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ *при* $n \to \infty$.

[19] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. 1988.

[20] Krein S.G., Petunin Ju.I. and Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. 1982.

Отметим, что для $x \in (l_\infty \setminus c_0)$ теорема 3.2.1, вообще говоря, неверна.

Теорема 3.2.3

Если $x \in (l_\infty \setminus c_0)$, то существует такой оператор $T \in DS$, что средние $A_n(T)(x)$ не сходятся покоординатно, и следовательно, не сходятся равномерно.

Статистическая эргодическая теорема в симметричных пространствах последовательностей

Статистическая эргодическая теорема Данфорда-Шварца утверждает, что для любого $T \in DS$ средние $A_n(T) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$ сходятся сильно в $\mathcal{L}_p$, $1 < p < \infty$, т.е. для любой функции $f \in \mathcal{L}_p$ существует такая функция $\widehat{f} \in \mathcal{L}_p$, что

$$\|A_n(T)(f) - \widehat{f}\|_p \to 0.$$

В случае $p = 1$, $\mu(\Omega) = \infty$, статистическая эргодическая теорема, вообще говоря, неверна.

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ вполне симметричное пространство последовательностей. Будем говорить, что E удовлетворяет *статистической эргодической теореме* (запись $E \in (MET)$), если для каждого $T \in DS$ и $x \in E$ найдется такой элемент $\widehat{x} \in E$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_E \to 0$.

Следующая теорема устанавливает необходимые и достаточные условия для выполнения статистической эргодической теоремы в вполне симметричных пространствах последовательностей.

Теорема 3.3.7

Пусть $(E, \|\cdot\|_E) \subset l_\infty$ *вполне симметричное пространство последовательностей. Следующие условия эквивалентны:*
(i). Для любого $T \in DS$ *средние* $A_n(T)$ *сходятся сильно в* $(E, \|\cdot\|_E)$*;*
(ii). $(E, \|\cdot\|_E)$ *сепарабельно и* $E \neq l_1$ *как множества.*

Индивидуальная эргодическая теорема для банаховых идеалов компактных операторов

Пусть $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ — $C^{\star}$-алгебра всех ограниченных линейных операторов в комплексном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, снабженная равномерной нормой $\|\cdot\|_{\infty}$.

Линейный оператор $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *оператором Данфорда-Шварца* (запись $T \in DS$), если $\|T(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$ и $\|T(x)\|_{\infty} \leq \|x\|_{\infty}$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Известно, что всякий вполне симметричный идеал $\mathcal{C}_E$ является точным интерполяционным пространством в банаховой паре $(\mathcal{C}_1, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ (см. [21]), в частности, $T(\mathcal{C}_E) \subset \mathcal{C}_E$ и $\|T\|_{\mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E} \leq 1$ для всех $T \in DS$. Следовательно, $T(\mathcal{K}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{K}(\mathcal{H})$, и сужение оператора T на $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ является линейным сжатием (также обозначается через T).

[21] Dodds P.G., Dodds T.K. and Pagter B. Fully symmetric operator spaces. J. Integr. Equat. Oper. Theory. 1992.

Следующая теорема является вариантом индивидуальной эргодической теоремы для действия операторов Данфорда-Шварца в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

Теорема 4.1.2

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ *– вполне симметричное пространство,* $E \subset c_0$*. Тогда*
(i). *Для любых оператора Данфорда-Шварца* $T : \mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E$ *и* $x \in \mathcal{C}_E$*, существует такой* $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$*, что* $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_\infty \to 0$ *при* $n \to \infty$*;*
(ii). *Если* $0 \leq x \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{K}(\mathcal{H})$*, то существует оператор Данфорда-Шварца* $T : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *такой, что средние* $A_n(T)(x)$ *не сходятся равномерно.*

Статистическая эргодическая теорема для банаховых идеалов компактных операторов

Статистическая эргодическая для некоммутативых L^p-пространств формулируется следующим образом: если T линейное $L^1 - L^\infty$-сжатие в $L^p(\mathcal{M}, \tau)$ и $1 < p < \infty$, то средние $A_n(T)$ сходятся сильно в $L^p(\mathcal{M}, \tau)$, т.е. для любого $x \in L^p(\mathcal{M}, \tau)$ найдется такой элемент $\widehat{x} \in L^p(\mathcal{M}, \tau)$, что $\|A_n(T)(x) - \widehat{x}\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Если $p = 1$ и $\tau(\mathbf{1}) = \infty$, статистическая эргодическая теорема, вообще говоря, неверна.

Следующая теорема устанавливает критерий для справедливости статистической эргодической теоремы в вполне симметричных идеалах компактных операторов.

Теорема 4.2.6

Следующие условия эквивалентны:
(i). Для любого оператора Данфорда-Шварца $T : \mathcal{C}_E \to \mathcal{C}_E$ средние $A_n(T)$ сходятся сильно в $\mathcal{C}_E$;
(ii). $(E, \|\cdot\|_E)$ сепарабельно и $E \neq l_1$ как множества.

Эргодические теоремы для действия групп d-мерных потоков в банаховых идеалах компактных операторов

Расширяя индивидуальную эргодичесую теоремы Lance для действий группы целых чисел на алгебрах фон Неймана, Conze, Dang-Ngoc [22] и Watanabe [23] изучали действия непрерывных полугрупп операторов на алгебрах фон Неймана. В частности, были установлены некоммутативные индивидуальные эргодические теоремы для действий полугрупп $\mathbb{R}_+^d$. Соответствующая эргодическая теорема для действий $\mathbb{R}_+^d$ и относительно двусторонней почти равномерной сходимости была первоначально рассмотрена Junge и Xu [24]. В частности, они доказали, что эти средние сходятся двусторонне почти равномерно в любом некоммутативном L_p-пространстве для $1 \leq p < \infty$ и почти равномерно, если $2 < p < \infty$.

[22] Conze J.P., Dang-Ngoc N. Ergodic theorems for noncommutative dynamical systems. Invent. Math. 1978.

[23] Watanabe S. Ergodic theorems for dynamical semi-groups on operator algebras. Hokkaido Math. J. 1979.

[24] Junge M., Xu Q. Noncommutative maximal ergodic theorems. J. Amer. Math. Soc. 2007.

Зафиксируем $d \in \mathbb{N}$ и обозначим $\mathbb{R}^d_+ = \{\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d) : 0 \leq u_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, d\}$. Пусть $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^d_+}$ полугруппа положительных операторов Данфрда-Шварца такая, что $T_\mathbf{0}(x) = x$ для всех $x \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Полугруппа $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^d_+}$ называется *сильно непрерывной* на $\mathcal{C}_1$, если $\lim\limits_{\mathbf{u}\to\mathbf{v}} \|T_\mathbf{u}(x) - T_\mathbf{v}(x)\|_{\mathcal{C}_1} = 0$ для каждого $x \in \mathcal{C}_1$ (сходимость $\mathbf{u} \to \mathbf{v}$ для $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^d_+$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_d)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_d)$ означает, что $u_i \to v_i$ для каждого $i = 1, \ldots, d$).

Если $\{T_\mathbf{u}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^d_+} \subset DS^+$ сильно непрерывная полугруппа в $\mathcal{C}_1$, то используя известную теорему Петтиса [25], для любых $x \in \mathcal{C}_1$ и $t > 0$ устанавливается существование интеграла Бохнера $A_t(x) = \frac{1}{t^d}\int_{[0,t]^d} T_\mathbf{u}(x)d\mathbf{u} \in \mathcal{C}_1$. При этом, что $\|A_t(x)\|_1 \leq \|x\|_1$ и $\|A_t(x)\|_\infty \leq \|x\|_\infty$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$. Следовательно, существует оператор $\widetilde{A_t} \in DS^+$ такой, что $\widetilde{A_t}(x) = A_t(x)$ для всех $x \in \mathcal{C}_1$. Ниже оператор $\widetilde{A_t}$ обозначается как A_t.

[25] Yosida K. Functional Analysis. 1978.

Следующая теорема устанавливает вариант индивидуальной эргодической теоремы для действия группы $\mathbb{R}_+^d$ в вполне симметричных банаховых идеалах.

Теорема 4.3.3

Пусть $(\mathcal{C}_E, \|\cdot\|_{\mathcal{C}_E})$ *вполне симметричный банахов идеал и пусть* $\{T_{\mathbf{u}}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} \subset DS^+$ *сильно непрерывная полугруппа на* $\mathcal{C}_1$. *Тогда для любого* $x \in \mathcal{C}_E$ *существует такой элемент* $\widehat{x} \in \mathcal{C}_E$, *что средние* $A_t(x)$ *сходятся к* $\widehat{x}$ *относительно равномерной нормы* $\|\cdot\|_\infty$ *при* $t \to \infty$.

Следующая теорема есть статистическая эргодическая теорема для действия группы $\mathbb{R}_+^d$ в вполне симметричных банаховых идеалах.

Теорема 4.3.4

Пусть $(E, \|\cdot\|_E)$ *сепарабельное симметричное пространство последовательностей и* $E \neq l_1$ *как множества. Тогда для любой сильно непрерывной полугруппы* $\{T_{\mathbf{u}}\}_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} \subset DS^+$ *на* $\mathcal{C}_1$ *средние* A_t *сходятся сильно в* $\mathcal{C}_E$.

Статьи

1. Азизов А.Н., Чилин В.И. Эргодическая Теорема Блума-Хансона в банаховых решетках последовательностей // Владикавказский математический журнал, 2017, Т.19, Вып. 3, С. 3-10. (IF=0.29).
2. Азизов А.Н., Чилин В.И. Вложения симметричных функциональных пространств // Вестник НУУз, 2017, № 2/1, С. 54-60.
3. Азизов А.Н., Чилин В.И. Мультипликативные вложения симметричных пространств // Вестник НУУз, 2017, № 2/2, С. 67-73.
4. Chilin V., Azizov A. Ergodic theorems in symmetric sequence spaces // Colloquium Mathematicum, 2019, Vol. 156, №1, P. 57-68. DOI: 10.4064/cm7384-2-2018 (IF=0.67).
5. Azizov A., Chilin V. Symmetric function spaces from symmetric sequence spaces // Uzbek Mathematical Journal, 2019, № 4, P. 37-46. DOI: 10.29229/uzmj.2019-4-4

6. Azizov A. Ergodic theorems for d-dimensional flows in ideals of compact operators // Bulletin of NUUz. 2021. Vol. 4. Issue 1. P. 44-53.
7. Azizov A., Chilin V. Ergodic theorems in Banach ideals of compact operators // Sib. Elect. Math. Rep. 2021. Vol. 18. Issue 1. P. 534-547. DOI: 10.33048/semi.2021.18.039 (IF=0.59).

Тезисы в материалах конференций

1. Azizov A.N. Individual ergodic theorem in symmetric sequence spaces // Abstracts of the republican scientific conference with participation of foreign scientists "Modern problems of dynamical systems and their applications". Tashkent, May 1-3, 2017. P. 184-185.
2. Азизов А.Н., Чилин В.И. Теорема Блума-Хансона в p-выпуклых банаховых решетках последовательностей // Тезисы докладов Республиканской конференции с участием зарубежных ученых "Проблемы современной топологии и ее приложения". Ташкент, 11-12 мая 2017 года. С. 145.

3. Azizov A.N. Almost uniform convergence in the individual ergodic theorem // Abstracts of the Uzbek-Israel International Scientific conference "Contemporary problems in mathematics and physics". Tashkent, October 6-10, 2017. P. 39-41.
4. Azizov A. Chilin V. Individual ergodic theorem in Banach ideals of compact operators // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2018. Симферополь, 17-29 сентября 2018 года. С. 40-43.
5. Azizov A.N., Chilin V.I. The validity of the individual ergodic theorem in Banach ideals of compact operators // Abstracts of the republican conference "Problems of modern topology and its applications". Tashkent, September 11-12, 2019. P. 26-28.
6. Azizov A.N. Mean ergodic theorem in noncommutative atomic symmetric spaces // Abstracts of Uzbek-Israel joint international conference "Science-Technology-Education-Mathematics-Medicine". Bukhara-Samarkand-Tashkent, May 13-17, 2019. P. 28-29.

7. Azizov A.N., Chilin V.I. Individual ergodic theorem in non commutative atomic symmetric spaces // Тезисы докладов XV Международной научной конференции "Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования". Владикавказ, 2019. С. 56-57.
8. Azizov A., Chilin V. Dominated ergodic theorem for atomic measure space // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2019. Симферополь, 2019. С. 35-38.
9. Azizov A.N. Symmetric spaces of measurable functions, associated with symmetric sequence spaces // Abstracts of the international conference "Modern problems of geometry and topology and its applications". Tashkent, November 21-23, 2019. P. 26-27.

10. Azizov A.N., Chilin V.I. Ergodic theorems in noncommutative atomic symmetric spaces // Proceedings of International conference "P. Chebyshev mathematical ideas and their applications to natural sciences". Kaluga, Russia, 2021. P. 290-291. (participated online)
11. Azizov A.N., Chilin V.I. Ergodic theorems for flows in Banach ideals of compact operators // Proceedings of scientific conference "Actual problems of stochastic analysis". Tashkent, February 20-21, 2021. Path 1. P. 363-367.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!