

Семинар по истории математики ПОМИ РАН

«История механического резонанса – от первоначальных исследований до авторезонанса»

А. С. Смирнов, Б. А. Смольников

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт проблем машиноведения
Российской академии наук



ФИЗМЕХ

02.09.2021



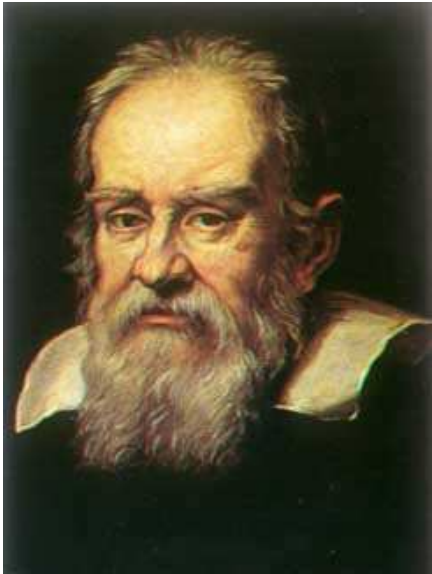
Введение

- Мы все живем в *колебательном*, а точнее – в *непрерывно колеблющемся мире*. Естественно, что множество профессий направлено на *управление колебаниями* путем построения их математических моделей.
- *Эпоха машин и механизмов* требует от инженера-исследователя *настройки колебательной системы* на тот или иной *режим функционирования* в зависимости от ее *собственных параметров* и от *условий окружающей среды*.
- Для инженера-механика одним из ключевых параметров является *собственная частота* (или *спектр частот*) рассматриваемого механизма, ибо именно в ее окрестности может произойти *неожиданный рост амплитуд колебаний* при действии гармонической вынуждающей силы *той же самой частоты*.
- Это явление традиционно и принято называть **резонансом**, и оно характеризуется *резким возрастанием амплитуд* угловых или пространственных перемещений.

Введение

- Резонанс представляет *огромное теоретическое и практическое значение* и может выступать как в качестве *полезного*, так и в качестве *вредного явления*.
- В силу своей высочайшей избирательности и эффективности явление резонанса приобретает поистине *вселенское и всемасштабное влияние на динамические процессы* во всех областях знаний физического мира.
- Тем не менее, вплоть до настоящего времени для него *нет даже достаточно строгого и всеобъемлющего определения*, хотя термин **«резонанс»** имеет довольно длинную историю.
- В этой связи значительный интерес представляет *исторический анализ различных подходов к понятию резонанса* — от основополагающих к современным, что и является основной целью настоящего доклада.

Первоначальные исследования резонанса



Галилео Галилей
(1564-1642)

- Наименование **«резонанс»** происходит от латинского слова *«resono»*, означающего *«отклик»*, *«эхо»*, т. е. в самом названии подчеркивается *реакция системы на какое-либо воздействие*.
- Предыстория резонанса корнями уходит в Древнюю Грецию, когда пифагорейцы, перебирая струны своих лир на берегах Средиземного моря, нередко замечали их *дрожание в ответ на громкое звучание другой струны того же тона*. Это явление называется **акустическим резонансом**.
- Первый заметный вклад в теорию резонанса внес в первой половине XVII века выдающийся учёный *Г. Галилей*. Впервые это явление было описано Галилеем в 1602 г. в работах, посвященных *исследованиям динамики маятников и музыкальных струн*.

Исследования Галилея по теории резонанса

- В своем фундаментальном труде *«Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению»*, опубликованном в 1638 г., Галилей писал:

«... маятник, находящийся в покое, хотя бы и очень тяжелый, мы можем привести в движение, и притом очень заметное простым дуновением, если мы будем приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент».

- Таким образом, в своем описании резонанса Галилей обратил внимание на крайне важный момент – на способность маятника накапливать механическую энергию, подводимую от внешнего источника, имеющего конкретную частоту, хотя самого понятия «энергия» в то время еще не было.

Гюйгенс – последователь Галилея



Христиан Гюйгенс
(1629-1695)

- Большое внимание к явлению резонанса проявляли и *многие последователи Галилея*, среди которых особую роль сыграл *Х. Гюйгенс*.
- Во время своих *исследований с маятниковыми часами* в 1665 г. он впервые обнаружил, что когда он поместил двое часов на стене рядом друг с другом и качнул маятники с разной скоростью, то они спустя некоторое время стали *качаться с одинаковым ритмом*.
- Это явление получило название ***симпатического резонанса***, и оно может быть определено как *синхронизация* организмов с внешним ритмом, т. е. тенденция двух колеблющихся тел *стремиться к вибрации в гармонии*.

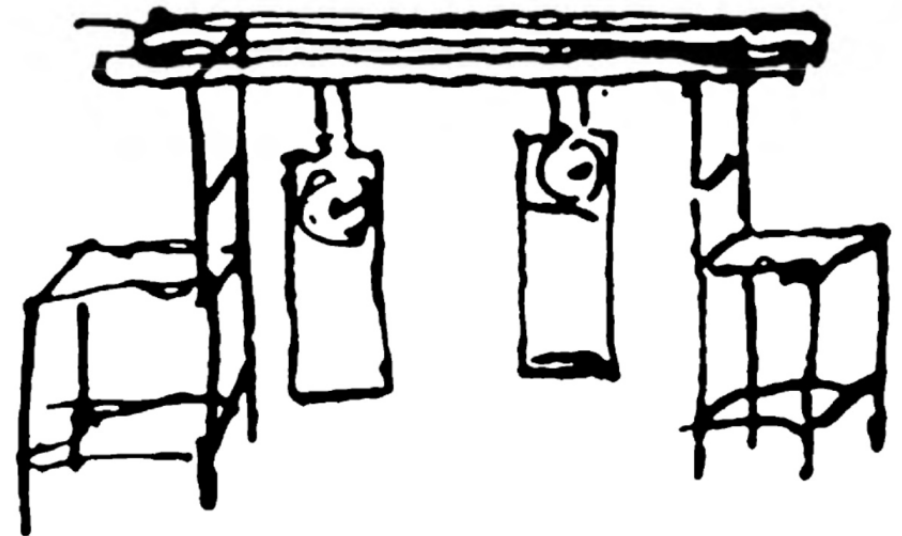
Эксперименты Гюйгенса с маятниковыми часами

- Синхронизацию колебаний маятников можно объяснить *их влиянием друг на друга через невидимую на глаз вибрацию стены*, на которой они висят.
- В *письме своему отцу*, от 26 февраля 1665 года Х. Гюйгенс детально описывает свои наблюдения:

«... я заметил удивительный эффект, о котором ранее никто даже и не думал. Двое часов, висящих на стене друг рядом с другом на расстоянии одного или двух футов, поддерживали согласованность хода с такой высокой точностью, что их маятники всегда качались вместе, без отклонений. Наблюдая это с восхищением в течение некоторого времени, я, наконец, пришел к выводу, что это происходит вследствие некоторой симпатии: когда я придавал маятникам разный ход, то я обнаружил, что через полчаса они всегда возвращаются к синхронизму и сохраняют его до тех пор, пока я не нарушу их ход...»

Эксперименты Гюйгенса с маятниковыми часами

- Описанное наблюдение Гюйгенс осуществил, будучи больным и потому вынужденным оставаться несколько дней в постели, как раз наблюдая *двое маятниковых часов, висящих на стене*.
- Гюйгенс продолжил наблюдения за часами, подвешивая их *на общей балочной опоре, размещенной на двух стульях*, и всякий раз *маятники часов синхронизовались и начинали ходить в унисон друг к другу*.
- Представляет большой интерес процитировать еще раз самого Гюйгенса, предоставляя его собственное *исключительно точное описание наблюдения синхронизации*.



Эксперименты Гюйгенса с маятниковыми часами

«... Очень важно отметить, что когда мы подвесили двое таким способом сконструированных часов к одной и той же деревянной балке, оба маятника двигались всегда в противоположные стороны, и колебания так точно совпадали, что никогда ни на сколько не расходились. Тиканье обоих часов было слышно в одно и то же мгновение. Если это совпадение искусственно нарушалось, то оно само восстанавливалось в короткое время. Сначала я был поражен этим странным явлением, но, наконец, после внимательного исследования нашел, что причина лежит в незаметном движении самой балки. Колебания маятника сообщают некоторое движение и самим часам, как бы тяжелы они ни были. А это движение передается балке, и, если маятники сами не двигались в противоположных направлениях, то теперь это произойдет с необходимостью, и только тогда движение балки прекратится. Но эта причина не была бы достаточно эффективна, если бы ход обоих часов не был с самого начала очень однороден и согласован между собой.»

Эксперименты Гюйгенса: выводы

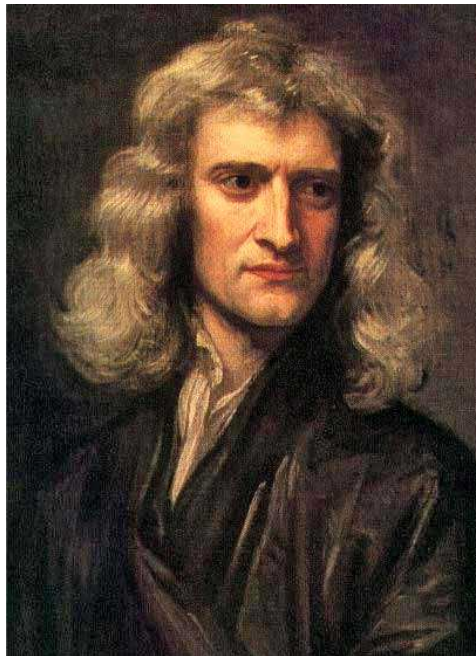
- Таким образом, Гюйгенс не только привел *точное описание явления*, но и дал *отличное качественное объяснение эффекта взаимной синхронизации*.
- Он совершенно правильно понял, что согласованность ритмов двух часов была вызвана *недоступными восприятию движениями балки*.
- Гюйгенс писал о «*симпатии часов*», в современной терминологии это означает, что часы *синхронизировались в противофазе за счет слабой связи* через балку.
- Подчеркнем, что несмотря на то, что это явление называют *самосинхронизацией*, в его основе лежит тот же **принцип резонанса**, т. к. происходит *отклик одного маятника на движение другого*.

Резонансы в небесномеханических проблемах

- Открытие эффекта синхронизации в механических системах оказалось провидческим для *небесной механики*, но несколько замедлило развитие динамики машин и механизмов.



Роберт Гук
(1635-1703)



Исаак Ньютон
(1642-1727)

- Изобретение телескопа (связанное с именем *Г. Галилея*) и открытие закона всемирного тяготения (связанное с именами *Р. Гука* и *И. Ньютона*) резко увеличило интерес к астрономии вообще и к механике движения планет Солнечной системы в частности.
- Оказалось, что Солнечная система буквально до краев заполнена *внутренними резонансами*.

Внутренние резонансы в небесной механике

- Под *внутренним резонансом* здесь понимается целочисленное соотношение между периодами обращения T_1 и T_2 некоторых двух небесных тел, т. е. когда $T_1/T_2 = n_1/n_2$, где n_1 и n_2 – некоторые целые числа.



Пьер-Симон де Лаплас
(1749-1827)

- Начало этим исследованиям положил *П.-С. де Лаплас*. На примере анализа орбитальных средних движений Юпитера и Сатурна им было установлено следующее соотношение: $5T_1 \approx 2T_2$, т. е. продолжительность 5 оборотов Юпитера *почти полностью совпадает* с продолжительностью 2 оборотов Сатурна, из-за чего возникает *резонансное взаимодействие* их движений.
- Так возникла «*проблема малых знаменателей*» в уравнениях орбитальных движений планет Солнечной системы, которая уже более двух столетий интересует астрономов.

Внутренние резонансы в небесной механике

- В настоящее время установлено 46 пар планет и их спутников, обладающих подобными *орбитальными* (или *астрономическими*) *резонансами*, для которых отношение периодов обращения (или, что то же самое, отношение средних движений) не превосходит 7.
- Поэтому подобные соизмеримости встречаются *значительно чаще, чем это можно было бы ожидать, считая их случайными совпадениями*.
- Возникающее при этом *регулярное гравитационное взаимодействие* небесных тел *может стабилизировать их орбиты*, так что можно утверждать, что резонансная структура *стабилизирует Солнечную систему* на очень большие периоды времени. В некоторых случаях резонансные явления вызывают *неустойчивость отдельных орбит*.
- Таким образом, *резонансы являются крайне важными особенностями Солнечной системы*, что свидетельствует об ее «эволюционной зрелости».

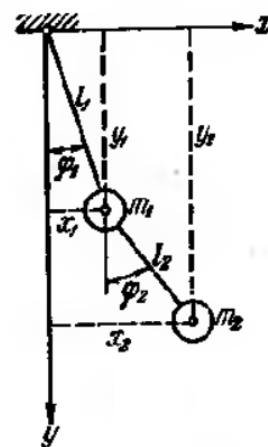
Внутренний резонанс в двойном маятнике

- Внутренние резонансы получили распространение не только в небесной, но и в земной механике. Например, в трудах Д. Бернулли по *колебаниям двойного математического маятника* имеются рассуждения о том, при каких параметрах частоты его колебаний будут *соотноситься как целые числа*.



Даниил Бернулли
(1700-1782)

- Было показано, что если при равных длинах обоих маятников массы верхнего и нижнего грузов соотносятся как $16:9$, то будет иметь место резонанс $1:2$, а если эти массы соотносятся как $9:16$, то будет резонанс $1:3$.



COMMENTATIO PHYSICO-MECHANICA
SPECIALIOR
DE
**MOTIBUS RECIPROCIS
COMPOSITIS.**

MULTIFARIIS NONDUM EXPLORATIS QVI IN PENDULIS
BIMEMBRIBUS FACILIS OBSERVARI POSSINT IN CON-
FIRMATIONEM PRINCIPII SUI DE COEXISTENTIA VIBRA-
TIONUM SIMPLICIORUM.

Auctore
DANIELE BÉRNOULLI.

§. 4. Descendamus ad exempla particularia, retinendo hypothesin aequalitatis inter ambo fila, utrumque aequale l .

(a) Ponatur corpus superius $m = 16$ et inferius $\mu = 9$; fiet $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{1}{2}$; hinc longitudo penduli simplicis isochroni cum oscillationibus simplicibus tardioribus $= l + l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{3}{2}l$ ac pro oscillationibus celerioribus $= l - l\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{1}{2}l$; hinc prius alterius quadruplum est, unde $T = 2t$ et $n = 2$.

(b) Invertantur corpora atque nunc supponatur $m = 9$ et $\mu = 16$; habebitur $\sqrt{\frac{\mu}{m+\mu}} = \frac{4}{5}$; hinc longitudo penduli isochroni tardioris $= \frac{9}{5}l$ et celerioris $= \frac{1}{5}l$; unde $T = 3t$ et $n = 3$.

Внутренний резонанс в сферическом маятнике



Виктор
Александр
Пюизе
(1820-1883)

- Наиболее простым примером внутреннего резонанса в земной механике служит *сферический маятник*, имеющий *две одинаковые частоты* в рамках линейной модели.
- В этом случае даже при малых колебаниях *недостаточно рассмотрения лишь линейной модели*, в которой уравнения движения оказываются *не связанными друг с другом*.
- Это объясняется тем, что вследствие внутреннего резонанса *1:1* имеет место интенсивный обмен энергией между двумя степенями свободы, и этот эффект можно адекватно описать лишь в рамках *слабо-нелинейной модели* при удержании кубической нелинейности, связывающей оба уравнения.
- *В. Пюизе* в 1842 г. показал, что эллиптическая траектория сферического маятника *не является неподвижной*, а *постепенно прецессирует*, т. е. поворачивается.

Внутренний резонанс в сферическом маятнике

- Наглядно это явление было зафиксировано в 1905 г., когда в Опытном бассейне морского ведомства (Санкт-Петербург) под руководством *А. Н. Крылова* был проведен *эксперимент со сферическим маятником*.

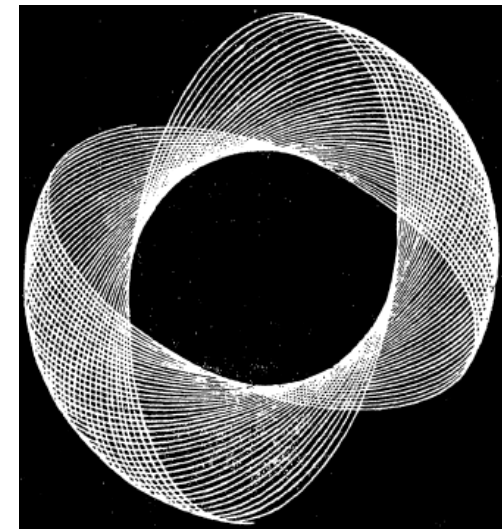
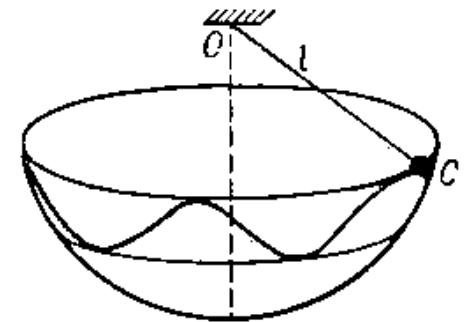


Алексей
Николаевич
Крылов
(1863-1945)



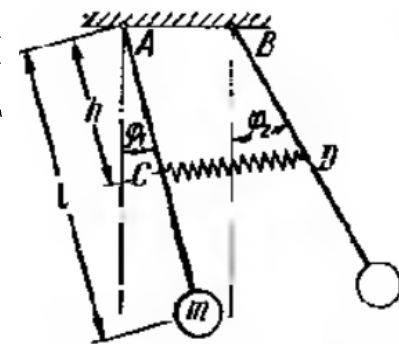
Сергей
Владимирович
Вяхирев
(1875-1946)

- Его результатом стала известная *фотография траектории* сферического маятника в проекции на горизонтальную плоскость.
- Она была получена *С. В. Вяхиревым* (заведующим Опытным бассейном) и подтвердила высказанные выводы.



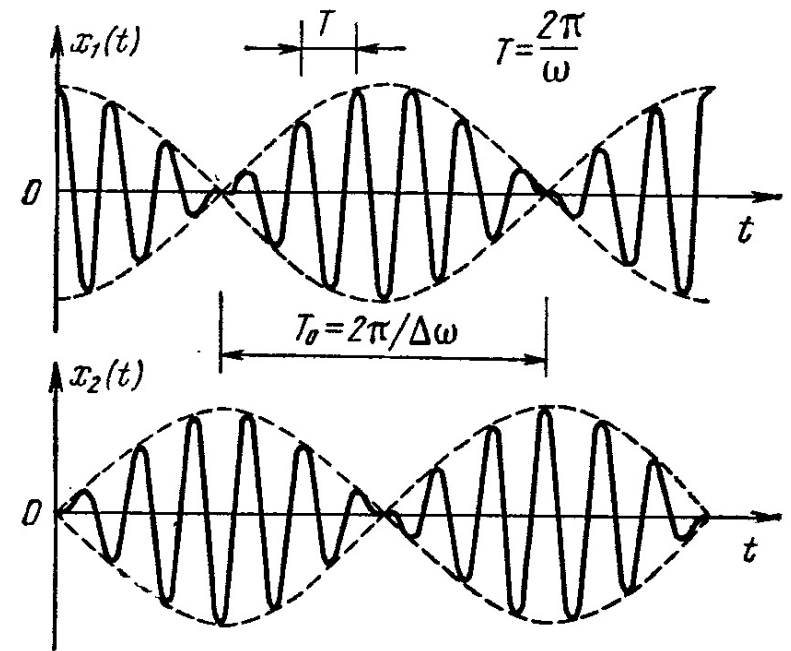
Биения в системе двух связанных маятников

- Подобный обмен энергией между двумя степенями свободы можно наблюдать и в системах, имеющих *не равные, но близкие частоты* в линейной модели.
- Например, если два одинаковых маятника связаны пружиной малой жесткости, то частоты колебаний этой системы будут мало отличаться от друга, и в этом случае мы будем иметь т. н. *систему со слабой связью*.
- Эта связь оказывает важную роль, осуществляя *взаимодействие двух маятников*, которые начинают «чувствовать» друг друга.
- Отклоняя один маятник при неподвижном другом, можно наблюдать *явление биений*, когда колебания одного маятника убывают, а колебания другого нарастают, после чего они меняются ролями.
- Биения могут иметь место и в других системах. Например, они проявляются и в случае *двойного математического маятника*, когда длины его звеньев равны, а масса нижнего груза много меньше массы верхнего груза.



Внутренний резонанс: выводы

- Таким образом, внутренний резонанс представляет определенный интерес, т. к. при этом имеет место *особое взаимодействие движений*, вследствие чего происходит *перекачка энергии* с одной степени свободы на другую. Подобная перекачка может привести и к *неблагоприятным последствиям*.
- Внутренний резонанс *не удается устранить так легко*, как внешний, от которого можно избавиться, изменив частоту внешнего воздействия, то на этапе проектирования конструкции этому фактору необходимо уделять *самое серьезное внимание*.
- Вследствие этого внутренний резонанс можно назвать **конструкционным резонансом**, понимая под этим непосредственную роль самой конструкции в возникновении подобного резонанса.



Классическое понятие резонанса

- Возвращаясь в XVIII век, заметим, что большое внимание к механическим колебаниям проявляли и другие ученые, в частности, *Л. Эйлер* и *Ж. Лагранж*.
- Их исследования по теории малых колебаний механических систем легли в основу *классического понятия резонанса*, которое рассматривается и поныне



Леонард Эйлер
(1707-1783)



Жозеф Луи Лагранж
(1736-1813)

подавляющем большинстве книг.

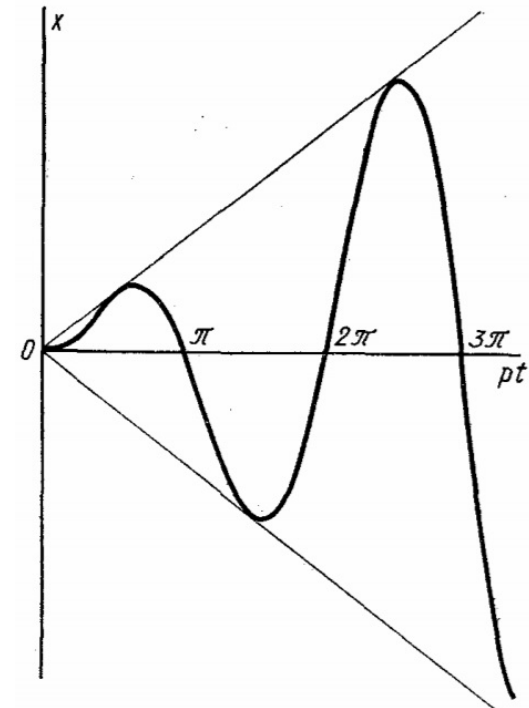
- Оно касается резонанса в линейных системах с одной или несколькими степенями свободы, когда возбуждение предполагается *гармоническим* с *заданной частотой и амплитудой*, вследствие чего подобный резонанс может быть назван *гармоническим резонансом*.

Классическое понятие резонанса

- Под *резонансом* в линейной системе обычно понимается явление *резкого увеличения амплитуды* вынужденных колебаний *при приближении частоты внешнего гармонического воздействия к собственной частоте*.
- Именно вынуждающая сила в виде гармонической функции времени (т. е. *программное управление*) зачастую используется для *целенаправленного поиска резонансных режимов*, что вполне естественно для линейных систем.
- Внешняя сила при этом действует *в унисон* с собственными колебаниями системы, также являющимися гармоническими, тем самым *усиливая их*. Поэтому возникновение *интенсивных колебаний* в этой ситуации вполне естественно.
- Тем не менее, данный способ возбуждения резонансных колебаний *вряд ли будет пригоден при увеличении амплитуд*, когда линейная модель превращается в нелинейную.

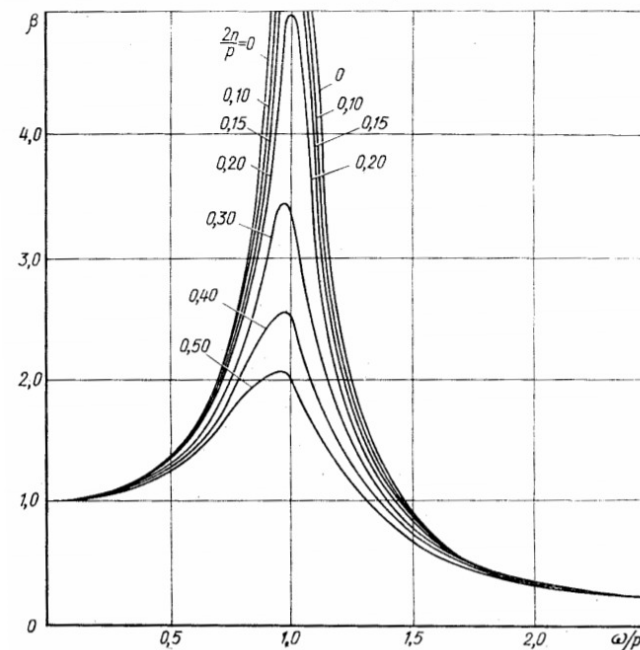
Классическое понятие резонанса

- Хорошо известно, что при нулевых начальных условиях и совпадении собственной частоты линейного осциллятора с внешней происходит *нарастание колебаний во времени по линейному закону*.
- Интересно отметить, что *резонансное движение является устойчивым процессом*, что может показаться поначалу неожиданным. Однако здесь следует иметь в виду, что *устойчив процесс неограниченного нарастания амплитуд вынужденных колебаний*, иначе говоря, небольшие возмущения не могут изменить *общий характер движения*.
- Однако на практике *физически невозможно обеспечить точное совпадение указанных частот*, а именно это и приводит к получению нарастающих колебаний. Более реальным является случай *малой расстройки частот*, где уже *отсутствует резонансный эффект*, вместо которого будут иметь место биения.



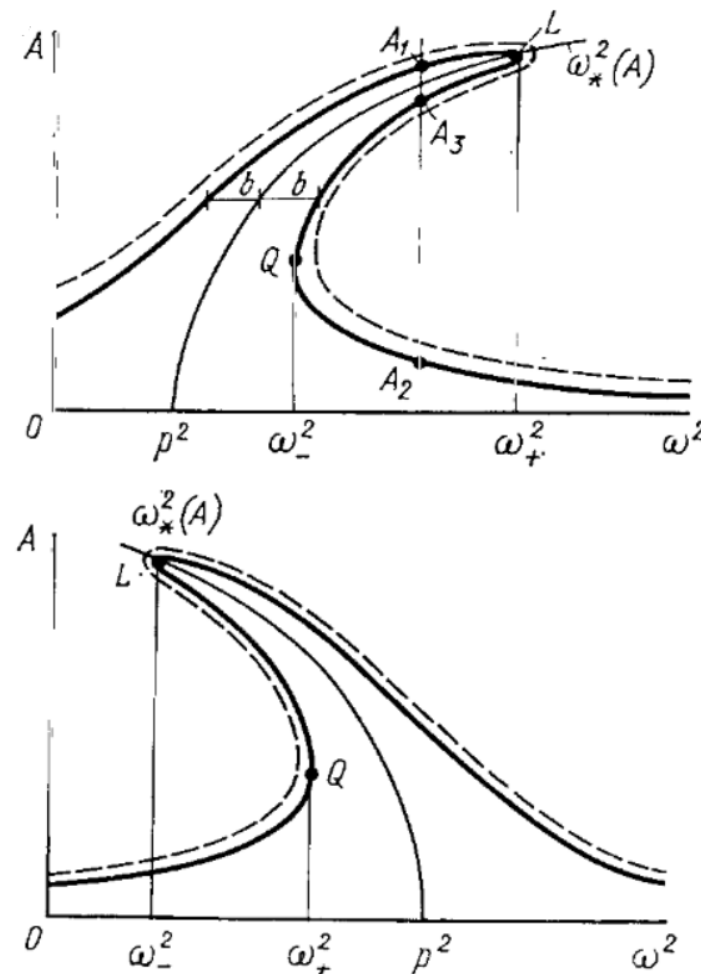
Амплитудно-частотная характеристика

- Кроме того, *учет демпфирования* также не позволяет неограниченно наращивать колебания, вследствие чего происходит *ограничение амплитуд колебаний*.
- В этих условиях основной оценкой подобного резонанса служит его *амплитудно-частотная характеристика*, традиционная иллюстрация которой при наличии вязкого трения с различными коэффициентами демпфирования хорошо известна.
- Под **резонансом** в данном случае следует понимать *пик данной характеристики*, который при достаточно небольшом трении достигается *вблизи собственной частоты*.



Амплитудно-частотная характеристика

- Подобную амплитудно-частотную характеристику можно построить и для *слабо-нелинейной системы*, и она будет отличаться лишь тем, что резонансные кривые при малом демпфировании будут «*нанизаны*» на *скелетную кривую*, описывающую зависимость частоты свободных колебаний от амплитуды.
- Вследствие этого возможны *несколько различных режимов* при изменении частоты в определенных пределах, причем *реализация того или иного режима* зависит от *начальных условий режима*, т. е. от того, происходит ли квазистатическое увеличение или уменьшение частоты.

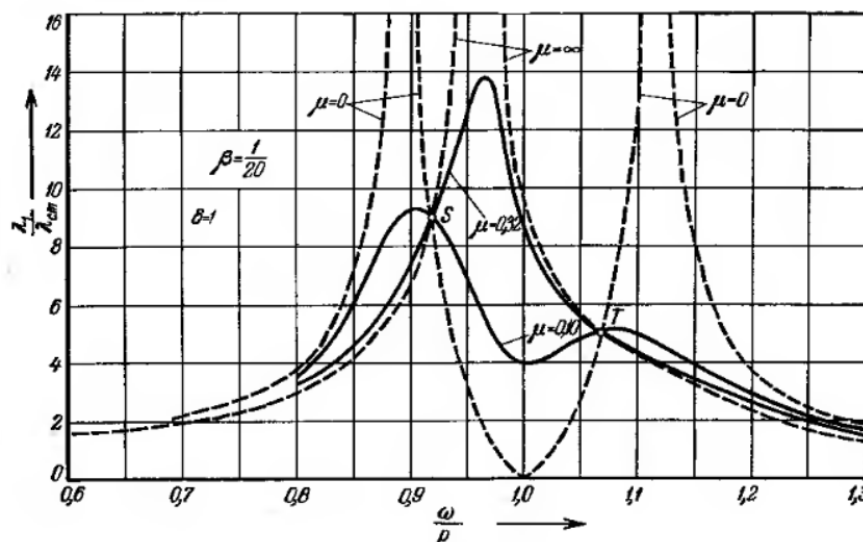


Технические резонансы

- Приведенные заключения оказались особенно полезными на закате *века Просвещения (XVIII в.)*, который ознаменовался приходом другой эпохи – *эпохи машин и механизмов*. Эта эпоха уже нуждалась в технических специалистах, изобретателях и конструкторах.
- Наступившая *эпоха машиностроения (XIX-XX вв.)* поставила множество новых задач – сначала чисто кинематических, а затем и динамических. Трудность решения последних зачастую объяснялась ***наличием резонансов***.
- Как правило, современные машины (а многие *высотные здания, вышки, мосты* и т. д. также можно отнести к машиностроительным сооружениям) работали в широком диапазоне частот, ***характеризуемых резонансами***.
- Построенная теория резонанса для линейных систем позволила адекватно описать ***многочисленные резонансные явления*** в *машинах, механизмах и различных сооружениях*. В этой связи подобные резонансы могут быть названы ***техническими резонансами***.

Антирезонанс

- Уместно упомянуть и про такое весьма интересное динамическое явление, как **антирезонанс**. Это явление широко используется для *динамического гашения* колебаний механических систем.
- Его суть заключается в том, что для системы, которая имеет по крайней мере две степени свободы, при надлежащем подборе параметров *тело, к которому прикладывается возбуждающая гармоническая сила, остается все время неподвижным*.
- В более общем случае, когда в системе *имеет место демпфирование*, под **антирезонансом** по аналогии с резонансом следует понимать *ярко выраженный минимум* амплитудно-частотной характеристики.



Антирезонанс

- *Явление антирезонанса* также встречается и при исследовании *систем с распределенными параметрами*.
- Если приложить гармоническую силу к правому концу стержня, закрепленного на левом конце, то *при надлежащем выборе частоты* этой силы можно добиться того, что *правый конец стержня*, т. е. точка приложения силы, в процессе продольных колебаний *останется неподвижным*, тогда как все остальные точки оси стержня, за исключением конечного числа узлов, будут совершать колебательные движения.
- Аналогичный эффект можно наблюдать и при исследовании *изгибных колебаний консольной балки*.



Прочие технические резонансы

- Кроме наиболее часто встречающегося *обычного (главного) резонанса* (когда собственная частота колебаний равна частоте вынуждающего воздействия), существуют также и *более сложные резонансы* при наличии *гармонического возбуждения*, которые можно уловить при рассмотрении *слабо-нелинейных систем*. К ним относятся:
 - *супергармонический* (или *ультрагармонический*) *резонанс* (когда имеется ярко выраженная супергармоника, частота которой кратна частоте вынуждающего воздействия);
 - *субгармонический резонанс* (когда частота колебаний в целое число раз меньше частоты вынуждающего воздействия);
 - *комбинационный* (или *субультрагармонический*) *резонанс* (когда отношение частоты колебаний к частоте вынуждающего воздействия является рациональным числом).

Действие периодической, но не гармонической силы

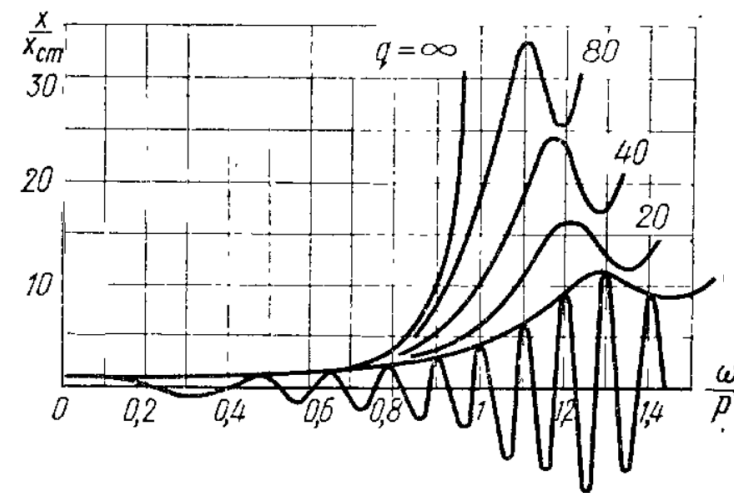
- *Резонансные эффекты* в линейной системе могут возникать *не только при чисто гармоническом возбуждении*. Например, если внешняя сила является *периодической, но не гармонической*, то ее следует разложить в *ряд Фурье* на сумму гармонических составляющих. Каждая из них будет возбуждать решение, *аналогичное описанному ранее*, а в силу линейности задачи общее решение будет представлять собой *суперпозицию этих решений*.
- В ряде Фурье гармонические составляющие имеют частоты, кратные частоте вынуждающей силы, так что если одна из этих гармоник *вступит в резонанс* со свободными колебаниями, то можно будет наблюдать *интенсивные колебания системы*.
- Поэтому здесь *резонанс* наступает, если частота внешнего воздействия равна долям от собственной частоты.



Жан-Батист
Жозеф Фурье
(1768-1830)

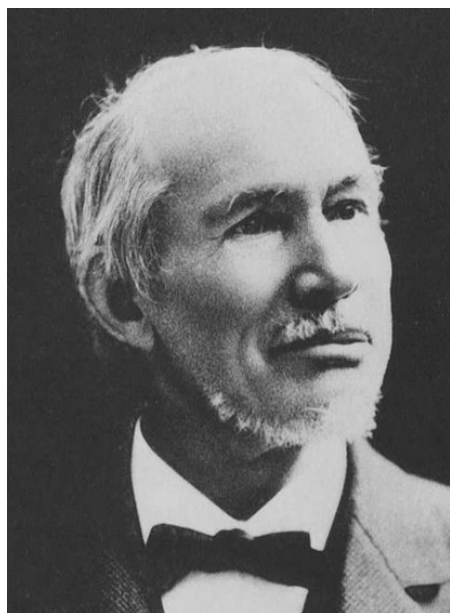
Прохождение через резонанс

- Явление *прохождения через резонанс* возникает при разгоне машины, например, под действием внешней *синусоидальной нагрузки с линейно изменяющейся частотой*.
- При этом *максимальные амплитуды колебаний* при проходе через резонанс будут *меньшими*, чем в случае установившихся резонансных колебаний, причем *различие будет тем большим, чем быстрее осуществляется прохождение через резонанс*.
- Кроме того, *особенностью этого явления* является и то, что *максимальные амплитуды достигаются не в момент совпадения частоты внешней силы с собственной*, а *несколько позже*: в процессе разгона максимум амплитуды смещается в *сторону больших частот*, в процессе остановки – в *сторону меньших частот*.



Параметрический резонанс

- Выше были представлены резонансные эффекты, возникающие вследствие *периодического внешнего воздействия* на систему. Однако *явление резонанса* может также возникать и в случае *периодического изменения параметров самой системы*. В этом случае резонанс называется *параметрическим*.

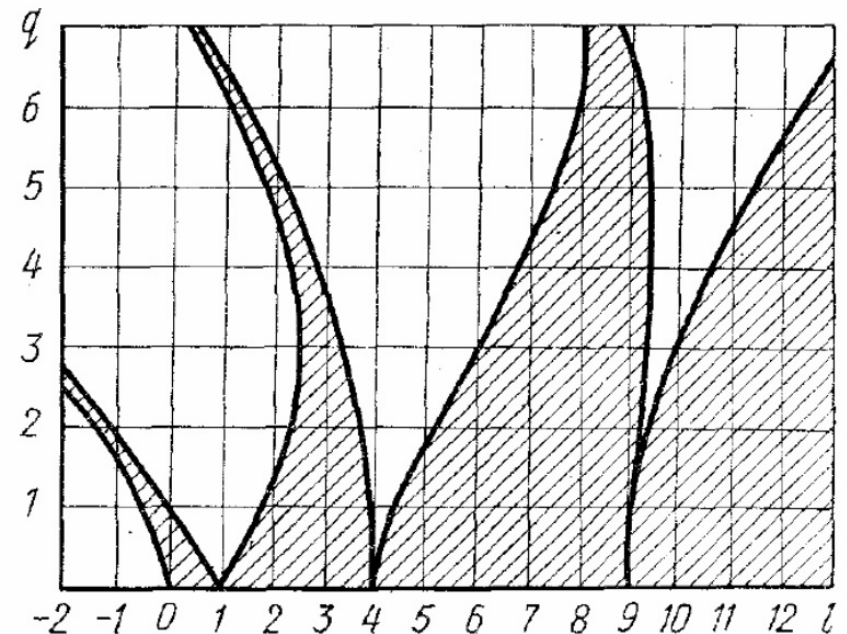


Джордж Уильям Хилл
(1838-1914)

- Впервые с резонансом такого типа столкнулся *Дж. У. Хилл* в 1877 г. при исследовании движения Луны. Он вывел *уравнение осциллятора с переменным коэффициентом жесткости*, которое и называется *уравнением Хилла*.
- Наиболее простым и в то же время интересным случаем является *изменение жесткости по гармоническому закону* вблизи некоторого постоянного значения. Движение такой системы описывается *уравнением Матьё*, которое является частным случаем уравнения Хилла и названо по имени его исследователя *Э. Л. Матьё* (1835 – 1890).

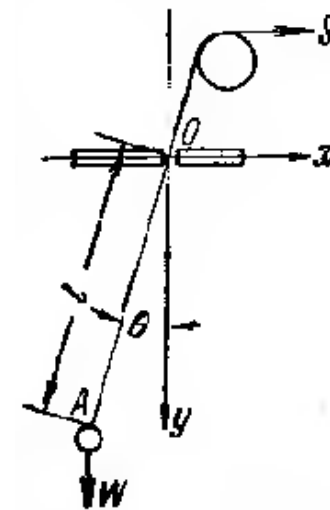
Параметрический резонанс

- Уравнение Матъё содержит два безразмерных коэффициента, зависящих от физических параметров задачи. Эти коэффициенты полностью определяют характер решений уравнения, и на плоскости этих коэффициентов можно выделить *области устойчивости*.
- Такая диаграмма называется *диаграммой Айнса-Стретта* по именам Э. Л. Айнса (1891–1941) и М. Ю. О. Стретта (1903 – 1992), опубликовавших свои работы на эту тему в 1927 г. и 1928 г. соответственно.
- Незаштрихованные области отвечают *неустойчивым движениям*, т. е. случаю *параметрического резонанса*.



Параметрический резонанс

- В частности, резонанс имеет место при *малой амплитуде гармонического изменения жесткости* тогда, когда отношение собственной частоты осциллятора без учета гармонического изменения жесткости к частоте ее изменения равно $1:2$, $1, 3:2$, $2, 5:2$ и т. д.
- Наиболее серьезной является *первая зона неустойчивости*.
- Еще одним интересным примером параметрического резонанса служит *маятник с периодически изменяющейся длиной* по гармоническому закону.
- Движение такой системы описывается более сложным уравнением, чем уравнение Матьё, однако оно также *имеет переменные коэффициенты*.
- Поэтому и здесь можно возбудить *параметрический резонанс*, принимая, например, что *частота изменения длины вдвое больше частоты собственных колебаний маятника*, вычисленной при неизменной длине.



Резонанс как неблагоприятный фактор

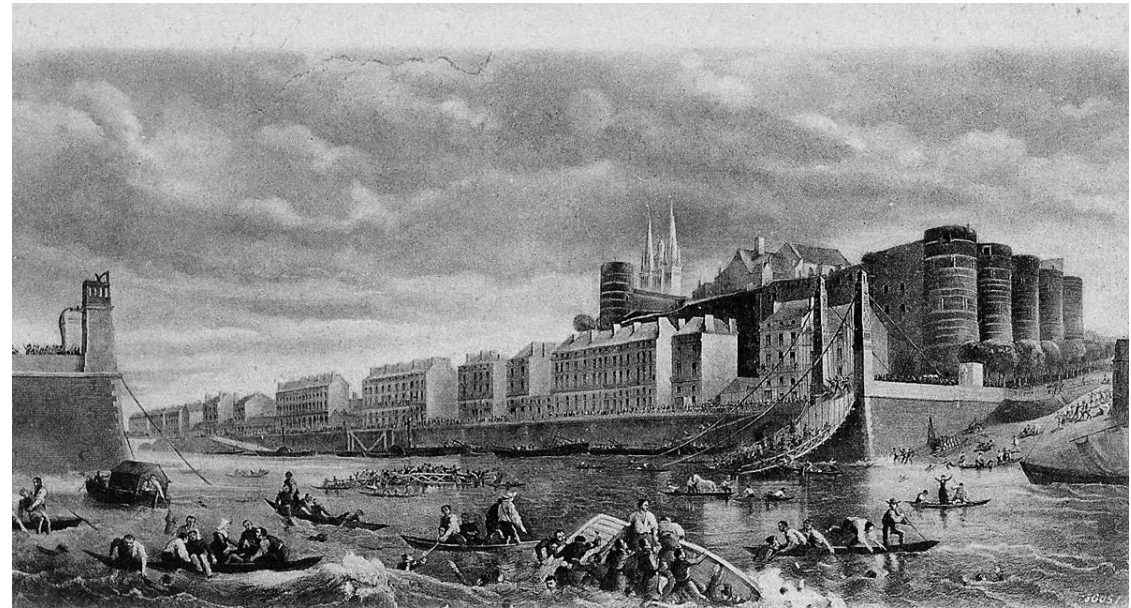
- *Вредная роль резонанса* нередко приводила к неблагоприятным последствиям и даже катастрофам. Особенно чувствительными к резонансу оказались мостовые конструкции. Известны случаи, когда марширующая войсковая часть во время перехода по подвесному мосту возбуждает настолько большие колебания, что они создают возможность его обрушения.
- В апреле 1831 г. рухнул Бротонский подвесной мост с железными цепями, переброшенный через реку Ирвелл в Великобритании, что было вызвано проходившим по нему отрядом солдат. Частота шага солдат, шедших в ногу, оказалась близка к одной из собственных частот колебаний моста, что повлекло за собой обрыв цепей и последующее обрушение моста в реку.
- Интересно отметить, что солдаты, шедшие вчетвером в ряд, почувствовали, что мост вибрирует в такт их шагам, и, найдя это весьма забавным, заставили его вибрировать еще больше.

Резонанс как неблагоприятный фактор

- К счастью, в этом инциденте *никто не погиб*, поскольку пролет моста был низким, а глубина воды в этом месте была небольшой, однако порядка 20 человек получили ранения.
- Это событие вызвало *некоторую потерю доверия к подвесным мостам*, что, однако, *не помешало строительству новых подвесных мостов*.
- Главным следствием обрушения Бротонского моста стал *приказ «не шагать в ногу» при пересечении мостов войсками*.
- Несмотря на то, что французские солдаты также получили аналогичный приказ, в апреле 1850 г. *подобный инцидент повторился*. На этот раз обрушился *мост Бас-Шен* через реку Мен во французском городе Анже, имевший два троса, когда по нему *проходил батальон французских солдат*.
- К сожалению, здесь уже не обошлось без жертв: *погибло более 200 человек*.

Обрушение моста Бас-Шен

- Колебаниям моста *способствовала плохая погода*, поскольку батальон проходил по мосту во время сильной грозы, когда ветер заставлял мост *вибрировать*, а солдаты, пытаясь восстановить свое равновесие, *еще больше раскачали его*.
- Оставшиеся в живых сообщили, что они шли, как пьяные, и едва могли удержаться от падения.
- Усилия солдат, направленные на то, чтобы не шагать в ногу, вероятно, заставили их *непроизвольно маршировать с тем же ритмом*, с которым качался мост, а это и *привело к возникновению резонансного эффекта*.



Обрушение Египетского моста

- Не менее трагична и судьба известного однопролетного *Египетского моста* со сфинксами, подвешенного на тройных нитях металлических цепей и переброшенного через реку Фонтанку в Санкт-Петербурге.
- В январе 1905 г., когда по мосту проходил кавалерийский эскадрон, *цепи разорвались, и пролеты моста полностью обрушились на лед Фонтанки.*
- Среди эскадрона *не было людских жертв*, но одна лошадь *утонула*, а еще две *сильно пострадали*, поэтому их пришлось пристрелить.
- Одной из основных версий обрушения служит ***явление резонанса***, поскольку предполагается, что лошади, хорошо обученные строгому церемониальному маршу, отлично отбивали шаг.
- Эта версия подвергалась сомнению, поскольку считается, что лошади *не способны двигаться «в ногу», т. е. не могут отбивать точный ритм.*

Обрушение Египетского моста

- Более того, очевидцы катастрофы единогласно заявляли, что *помимо кавалерийского эскадрона* по мосту навстречу ему также *ехали извозчики*, а по тротуару шли прохожие, так что *слаженного хода не было*.
- Поэтому, казалось бы, *эффект резонанса* в этом случае *и не должен был возникнуть*.
- Другой причиной катастрофы высказывалась *непрочность конструкции*, хотя поначалу и эта версия *отрицалась инженерами*, ведь с момента постройки в 1826 г. мост периодически ремонтировался, однако *после обрушения была обнаружена раковина в металле* одного из звеньев несущей цепи.





Выдержка из газеты «Новости дня» от 21 января 1905 г.

Сегодня в 12 ½ час. дня при следовании лейб-гвардии конного-гренадерского полка через Египетский цепной мост через Фонтанку, по направлению от Могилёвской улицы к Ново-Петергофскому проспекту, в тот момент, когда головная часть полка уже подходила к противоположному берегу, мост обрушился. Находившиеся впереди офицеры успели проскочить на берег, нижние же чины, в количестве двух взводов, шедшие в строй справа по 3 в ряд, вместе с лошадьми (упали) в воду. Упали также в воду проезжавшие в обратную сторону один ломовой и четыре легковых извозчика без седоков и несколько пешеходов. Вся настилка моста вместе с перилами и скреплениями, разорвав цепи и сломав часть чугунной опоры, проломала лёд и оказалась на дне реки. <...> К 2^{-м} часам дня люди и лошади были извлечены из воды. Пострадавшие были отправлены в ближайшие приёмные покои и в лазарет Николаевского артиллерийского училища. Серьёзно пострадавших, по официальным сведениям, не оказалось. Из лошадей одна затонула, две были искалечены и, вытащенные на берег, пристрелены. Причина несчастья, как предполагают, раскачка моста кавалерией при не вполне прочной конструкции. <...>

Выдержка из книги А. Н. Крылова «Вибрация судов»

§ 5. Кажется, во времена наполеоновских войн в Испании, через какой-то мост шел отряд войска, твердо отбивая шаг (вероятно, на мосту или за мостом стояло какое-нибудь важное начальство). Мост был цепной, лихо отбиваемый шаг как раз пришелся в такт с периодом колебаний моста, размахи увеличились настолько, что цепи оборвались, и мост обрушился в реку. После того во всех армиях держалось правило — при переходе через мост не идти „в ногу“ и „шаг не отбивать“; но лет тридцать тому назад в тогдашнем Петербурге был через Фонтанку цепной мост, который назывался Египетским, шел через него эскадрон гвардейской кавалерии, не помню какого полка, лошади хорошо обученные, особенно стройному церемониальному маршу, шли в ногу, отлично отбивая шаг, который и совпал в такт с колебаниями моста, — цепи лопнули, мост обрушился в воду, погибло чуть ли не 40 человек.

Резонанс как неблагоприятный фактор

- Вывод: наиболее вероятным объяснением обрушения Египетского моста служат *совместно все указанные обстоятельства*, поскольку *раскачка моста кавалерией* в той или иной степени *имела место быть*, что в сочетании с *не вполне прочной конструкцией моста* и привело к его обрушению.
- Разумеется, с *ростом парка машиностроительных конструкций*, с *возрастанием их скоростей и мощностей* *множились и их аварийные ситуации*, обусловленные ***вредной ролью резонанса***. В качестве примеров нежелательного воздействия резонанса в технике можно указать *разрушение различных сооружений, обрыв проводов, вибрации в трубопроводах, раскачивание вагона на стыках рельсов, раскачивание груза на подъемном кране* и многое другое.
- Следует подчеркнуть, что в число резонансных воздействий также необходимо включить и ***самовозбуждающиеся разгонные режимы***, отличающиеся от выше описанных тем, что они *поддерживаются за счет силовых факторов неколебательной природы*.

Автоколебательный резонанс

- Параметры таких режимов (амплитуда и частота) определяются *внутренними свойствами самой системы*. Колебания такого рода принято называть *автоколебаниями*, так что рассматриваемый режим может быть назван *самозбуждающимся* или *автоколебательным резонансом*.
- Его простейшими примерами служат **флаттер** элементов конструкций летательного аппарата (главным образом, крыла самолета либо несущего винта вертолета) и **шимми** передних колес транспортного средства.
- Нужно также отметить, что в отличие от классического гармонического резонанса, при котором *амплитуда возрастает во времени линейно*, автоколебательный резонанс может повлечь *возрастание амплитуд по экспоненциальному закону*.
- Применительно к мостовым конструкциям здесь следует упомянуть о широко известной катастрофе, случившейся в результате *аэроупругого флаттера*.

Обрушение Такома-Нэрроу моста

- В ноябре 1940 г. почти сразу после открытия произошло *обрушение висячего Такома-Нэрроу моста*, переброшенного через пролив Такома-Нэрроу в штате Вашингтон в США.
- При этом можно было наблюдать динамические *изгибно-крутильные колебания моста*, которые усиливались вертикальными колебаниями тросов.
- При проектировании моста учитывалось действие одних только статических нагрузок, в том числе и ветровой, однако ее *аэродинамическое действие не было принято во внимание*.
- Эта авария оставила *огромный след в истории науки и техники* и способствовала целому пласту *новых исследований в области аэродинамики*.
- Более того, она оказала серьезное влияние на *подходы к проектированию большепролетных мостов во всем мире*.



От гармонического резонанса к авторезонансу

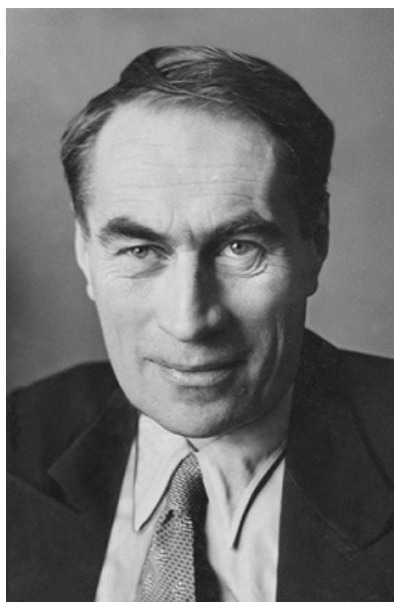
- Особенностью всех упомянутых ранее *резонансных эффектов* является то, что они относятся лишь к *линейным* или же к *слабо-нелинейным системам*. Тем не менее, с увеличением амплитуд колебаний все более отчетливо начинают проявляться *нелинейные свойства* механической системы.
- В нелинейной системе имеет место *дрейф частот с увеличением амплитуд*, и данный факт приводит к *нарушению главного условия возникновения резонансного процесса* – действия внешней силы *в такт* с собственными колебаниями. Поэтому описанные ранее методы резонансного возбуждения колебаний становятся *малоэффективными*, так что взамен чисто гармонического (т. е. *программного*) управления, *следует синтезировать другое*.
- Проблема *резонанса как метода управления* свободными колебаниями в различных динамических системах приобрела достойное внимание со стороны механиков, радиоинженеров, математиков лишь на подходе к середине XX века благодаря *развитию радиосвязи и электромашиностроения*.

От гармонического резонанса к авторезонансу

- Особенно важную роль здесь сыграло то, что с ростом мощностей и скоростей колебания различных машин и механизмов приобретали *существенно нелинейные свойства* и *новые степени свободы*, и в соответствии с этим *усложнялись и множились различные типы резонансов*.
- Все это привело к необходимости использования *иного режима возбуждения резонансных колебаний*, при котором частота возбуждения не предписывается извне, а поступает на привод возбуждения как *сигнал контура обратной связи*.
- Именно таким образом целесообразно прикладывать управляющие воздействия в нелинейных системах, поскольку при этом *частота и фаза этого сигнала* будут *точно соответствовать текущей частоте и фазе системы*, ввиду чего ей будет передаваться вся поступающая энергия. Это свойство и характерно для *настоящего резонансного режима*.
- Возникающий при этом режим нарастающих колебаний получил в литературе название «*авторезонанса*».

Авторы книги «Теория колебаний»

- Впервые термин «*авторезонанс*» был введен в научный лексикон классиком советской школы теории колебаний *А. А. Андроновым* в первом издании книги «*Теория колебаний*», выпущенной им вместе с *А. А. Виттом* и *С. Э. Хайкиным*.



Александр Александрович
Андронов
(1901-1952)



Александр Адольфович
Витт
(1902-1938)



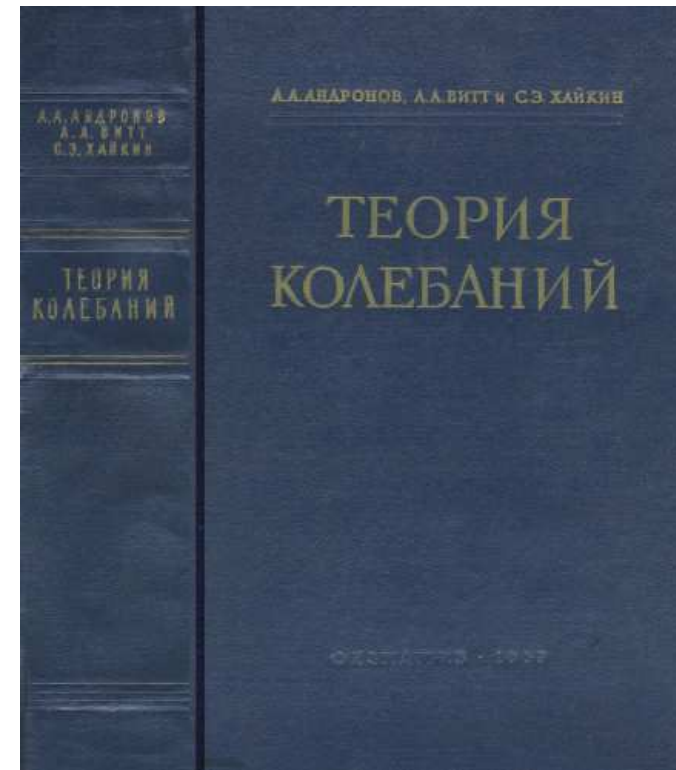
Семён Эммануилович
Хайкин
(1901-1968)

Книга «Теория колебаний»



Первое издание

- Первое издание книги вышло в 1937 г., однако к моменту публикации А. А. Витт был арестован и вскоре после этого умер. Поэтому было невозможно поставить его фамилию на титульном листе.
- Второе издание книги вышло только в 1959 г., и при этом чудовищная несправедливость в отношении А. А. Витта была исправлена.



Второе издание

Понятие авторезонанса

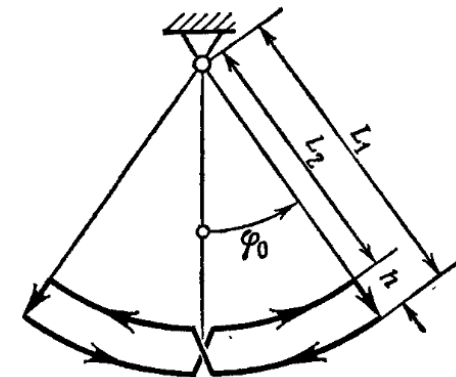
- В книге *«Теория колебаний»* **авторезонанс** определяется как *«резонанс под действием силы, порождаемой движением самой системы»*, и в ней рассматривается пример линейной системы второго порядка (электрический контур) при наличии реле в обратной связи.
- Происхождение термина *«авторезонанс»*, вероятно, было связано с тем, что с учетом обратной связи система фактически становилась *замкнутой*.
- Упомянутый выше термин *«автоколебания»* также был введен Андроновым в 1928 г. и *быстро вошел в практику* как в советской литературе, так и за рубежом. Термин *«авторезонанс»* долгие годы оставался почти незамеченным и использовался лишь *применительно к достаточно простым системам с одной степенью свободы*, где не требуется определять формы колебаний.
- Всплеск интереса к авторезонансу *стал возрастать в последние десятилетия*.
- Главной трудностью при практической реализации авторезонанса является именно необходимость *использования контура обратной связи* для формирования требуемого закона управления приводом.

Основные свойства авторезонанса

- Понятия *«автоколебательный резонанс»* и *«авторезонанс»*, являясь родственными, имеют между собой важное отличие: автоколебательный резонанс, как правило, проявляется благодаря *естественным физическим причинам* (как, например, аэроупругий флаттер), и оказывается *явлением неблагоприятным*, тогда как авторезонанс *целенаправленно организуется специальным образом за счет контура обратной связи*.
- Учитывая наличие обратной связи для использования явления авторезонанса, его также можно назвать *управляемым резонансом*.
- Приведенное в начале статьи описание резонанса, данное Галилеем на примере маятника, *вовсе не противоречит наличию обратной связи* – напротив, из приведенной цитаты *становится понятным*, как ее использовать для возбуждения резонансного режима, а именно:
«приостанавливать дыхание при возвращении маятника, и вновь дуть в соответствующий его качанию момент».

Простейшие примеры авторезонанса

- На том же примере маятника можно более детально проиллюстрировать **простейшие примеры авторезонанса**, которые проясняют суть этого термина.
- Можно осуществить разгон маятника при помощи скачкообразного изменения длины нити в среднем и крайнем положениях, который имитирует раскачивание качелей самим качающимся на них человеком.
- Хорошо известно, что человек стремится раскачать качели при помощи ритмичного сгибания и выпрямления тела, а именно, человек выпрямляется (поднимая свой центр тяжести) при прохождении качелей через вертикальное положение и приседает (опуская свой центр тяжести) при максимальном отклонении.
- В этом случае длина маятника может быть выражена через переменные состояния, причем анализ показывает, что в этом случае будет происходить нарастание полной энергии, поэтому имеет место именно **авторезонанс**.



Простейшие примеры авторезонанса

- Не стоит отождествлять это явление с тем вариантом, когда длина нити *скачкообразно* меняется через *равные интервалы времени*, т. е. в виде *заданной программы*. В таком случае будет иметь место **параметрический резонанс**, т. к. длина нити здесь меняется периодически с *заранее заданной частотой*, так что изменения длины будут зависеть не от движения маятника, а происходят согласно *конкретному закону во времени*. Это не обязательно приведет к искомой цели – раскачать качели до любого желаемого уровня энергии, ибо при этом не будет по умолчанию выполнено условие нарастания энергии.
- Можно осуществить разгон математического маятника постоянной длины и с помощью *управляющего момента в шарнире*, который строится по принципу обратной связи и *пропорционален его угловой скорости* (или, что то же самое в данном случае, *кинетическому моменту*).

Простейшие примеры авторезонанса

- Мощность этого момента пропорциональна квадрату угловой скорости и всегда *неотрицательна*, в результате чего полная механическая энергия начнет монотонно нарастать, а значит будут увеличиваться и колебания маятника.
- При превышении энергией уровня, *отвечающего верхнему положению равновесия маятника*, движение из *колебательного* перейдет в *круговращательное*.
- Данное управление допускает *различные модификации*. Например, можно сделать коэффициент усиления *функцией переменных состояния* и постепенно понижать его с увеличением энергии. В этом случае можно добиться *выхода колебаний на некоторый заданный уровень*, что зачастую и является целью управления.
- Можно использовать и другие виды управления, например, *релейное*, которое также приводит к *неотрицательной мощности*, пропорциональной модулю угловой скорости.

Авторезонанс в многочастотных системах

- В то время, *начавшаяся эпоха роботизации* поставила множество задач рационального управления *системами с многими степенями свободы*, и, соответственно, с несколькими собственными частотами. И вблизи каждой из них может возникать ***собственный резонансный режим***, требующий определения собственной формы колебаний.
- Казалось бы, построение ***авторезонансного режима*** в такой кибернетической системе, когда все механические элементы конструкции движутся *с одной частотой*, причем осуществляется ее разгон, должна иметь *довольно сложное и многоступенчатое решение*.
- Однако выяснилось, что можно без особых трудностей построить такое решение, используя метод ***«коллинеарного управления»***.
- Этот подход к управлению движением многомерных механических систем основан на стремлении в максимальной степени использовать ее *собственные динамические свойства*, т. е. ее *кинетику*, учитывающую *динамическое взаимодействие различных степеней свободы* объекта управления.

Коллинеарное управление

- *Коллинеарное управление* имитирует обобщенные силы инерции, возникающие при разгоне системы, а условие коллинеарности математически трактуется как требование пропорциональности столбца управляющих воздействий столбцу обобщенных импульсов системы.
- Первоначально эта идея была применена к задаче о разгоне свободного твердого тела до определенного уровня угловой скорости посредством внешнего крутящего момента (например, при помощи газореактивных двигателей, укрепленных на корпусе несущего тела), построенного по принципу коллинеарного управления. Поскольку для твердого тела обобщенный импульс есть непосредственно вектор кинетического момента, то крутящий момент формируется пропорционально кинетическому моменту.
- Данный режим оказался крайне полезным, и, кроме того, оптимальным по таким критериям, как расход рабочего вещества или быстродействие. Поэтому впоследствии он был использован для управления движением различных манипуляторов, где также продемонстрировал свою эффективность.

Коллинеарное управление

- Все это побудило использовать данный метод для *авторезонансного возбуждения* и в многомерных колебательных системах, которые функционируют в *различных силовых полях*. Именно в таких системах наиболее явно и раскрываются *основные свойства авторезонанса*.
- Наиболее простым примером может служить *коллинеарный разгон двойного маятника в гравитационном поле*. С его помощью можно разогнать двойной маятник *по каждой из его форм колебаний* вплоть до значительных амплитуд.
- При этом форма колебаний постепенно *дрейфует вместе с частотой* при переходе *из линейной зоны в нелинейную*, однако при усложнении своего качественного характера она сохраняет свою *регулярную структуру* и характеризуется *периодичностью*.
- *Сохранение топологической структуры формы нелинейных колебаний* приобретает чрезвычайно важное значение для *беговых форм движения живых организмов*.

Коллинеарное управление

- Поэтому фактически именно *коллинеарное управление* позволяет построить ***авторезонансный режим*** при больших амплитудах раскачивания конечностей.
- Это чрезвычайно важно в задачах *биомеханики и робототехники*, где переход *от шаговых к беговым амплитудам* возможен только в режиме ***авторезонанса***, причем и при ходьбе, и при беге движение остается *одночастотным*, хотя частота постепенно изменяется, а вместе с ней происходит и *плавное изменение формы колебаний*.
- Применительно к биомеханике метод коллинеарного управления можно назвать ***методом «биоморфного управления»***, а для самого резонанса вполне уместно ввести также термин ***«биорезонанс»***. В результате такой ***резонансный режим*** становится *управляемым как по амплитуде, так и по частоте*.
- Таким образом, представленные заключения *крайне важны для биомеханики* и могут найти применение при *беге андроидов и звероидов*, где построение ***нелинейного резонансного режима*** играет *первостепенную роль*.

Более детальное определение авторезонанса

- Учитывая вышесказанное, *детальное определение авторезонанса для систем со многими степенями свободы* следовало бы дать так:

Авторезонанс – это такой режим вынужденного движения динамической системы, когда локальные движения по всем ее степеням свободы происходят *с одной частотой*, которая может *дрейфовать при изменении амплитуд колебаний*, при этом *вынуждающие силы*, действующие по всем степеням свободы благодаря *контуру обратной связи*, постепенно увеличивают уровень *механической энергии* системы.

- *Главное отличие* авторезонанса от гармонического резонанса заключается в том, что он может существовать *при гораздо больших амплитудах*. Поэтому гармонический резонанс правильнее было бы называть «*квазирезонансом*», а авторезонанс – *истинным резонансом*.

Авторезонанс: основные выводы

- *Авторезонанс* адекватно характеризует режим колебаний не только при малых, но и при больших амплитудах, осуществляя плавный переход от линейной области в нелинейную.
- Это означает, что данный термин описывает **подлинный резонанс**, что обуславливает его важное практическое значение.
- Именно **авторезонанс** выявляет важнейшие свойства многочисленных резонансных эффектов в технике. Примеры, взятые из робототехники и биомеханики, также иллюстрируют суть данного понятия.
- Таким образом, обобщая понятие «**авторезонанс**» на системы с несколькими степенями свободы, мы по существу неразрывно связываем его с понятием «**коллинеарного управления**».

Заключение

Завершая свое путешествие от *первоначальных исследований резонанса* до *авторезонанса*, остается резюмировать отличительные свойства и области существования различных резонансов.

- Наиболее часто встречающимися являются *орбитальные резонансы*, которые характерны для различных природно-географических и эволюционных процессов, свойственных неживой природе.
- Такое же происхождение имеют и *гармонические резонансы* в машиностроении, мостостроении и т. п.
- *Авторезонансы* свойственны живой природе и системам автоматического управления, поэтому именно *авторезонансные режимы движения* постепенно начинают занимать важное место в робототехнике и биодинамике.

Заключение

- Особенно эффективным авторезонансным управлением является *коллинеарное управление*, основанное на использовании управляющего воздействия пропорционально обобщенному импульсу системы и обладающее *оптимальными характеристиками*.
- Наконец, отметим, что *резонанс* является настолько *многогранным явлением*, что охватить все его проявления в рамках одного доклада не представляется возможным, так что внимание было уделено лишь *наиболее известным из них*, которые чаще всего *встречаются в практических приложениях*.
- При этом, как видно из настоящего доклада, наиболее просто *резонансные эффекты* можно наблюдать *именно при исследовании маятниковых систем*.

СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!