$2z] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$, *а дискретный спектр оператора* ${}^1\widetilde{H}_1^t$ *состоит из не более четырех точек:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_1^t) = \{4z, 2z+z_3, 2z+z_4, z_3+z_4\}$, *здесь* $z = A-\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ *(соответственно,* $z = A+\sqrt{4B^2+\varepsilon_1^2}$ *).*

c) Если $-2B < \varepsilon_2 < 0$, *тогда существенный спектр оператора первого триплета* ${}^1\widetilde{H}_1^t$ *состоит из объединений не более трех отрезков:* $\sigma_{ess}({}^1\widetilde{H}_1^t) = [4A-8B, 4A+8B] \cup [2A-4B+z_3, 2A+4B+z_3] \cup [2A-4B+z_4, 2A+4B+z_4]$, *а дискретный спектр оператора* ${}^1\widetilde{H}_1^t$ *состоит из не более одного точек:* $\sigma_{disc}({}^1\widetilde{H}_1^t) = \{z_3+z_4\}$.

Литература

1. Tashpulatov S. M. *The structure of essential spectra and discrete spectrum of four-electron systems in the Hubbard model in a singlet state* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – V. 38. – № 3. – P. 530–541.

STRUCTURE OF ESSENTIAL SPECTRA AND DISCRETE SPECTRUM OF FOUR-ELECTRON SYSTEMS IN A IMPURITYHUBBARD MODEL IN THE FIRST TRIPLET STATE

S.M. Tashpulatov, R.T. Parmanova

This paper we consider of the four-electron systems in the impurity Hubbard model and describes the structure of essential spectrum and discrete spectra of the system in the first triplet state of the system.
Keywords: Impurity Hubbard model, four-electron systems in the impurity Hubbard model, essential spectra, discrete spectrum, quintet state, triplet states, singlet states.

УДК 530.145

О ПРИМЕНЕНИИ ФАКТОРИЗАЦИИ АНТИ-ТАКАГИ К ФЕРМИОННЫМ ОПЕРАТОРАМ СЖАТИЯ

А.Е. Теретёнков[1]

1 *taemsu@mail.ru*; Отдел математических методов квантовых технологий, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии наук, г. Москва

В работе получена теорема, позволяющая конструктивно вычислять факторизацию анти-Такаги комплексных антисимметричных матриц. Будет показано, что данный алгоритм может быть использован для вычислений с фермионными операторами сжатия.

Ключевые слова: факторизация матриц, фермионы, сжатые состояния.

В ряде недавних работ [1],[2],[3],[4] алгоритм разложения Такаги [5] для комплексных симметричных матриц был применён для вычислений, связанных с бозонными сжатыми состояниями. В данной работе мы докажем теорему, обосновывающую аналогичный алгоритм для антисимметричных матриц. А также приведём пример его применения для вычислений с фермионными операторами сжатия. А именно, будет доказана следующая теорема, позволяющая конструктивно вычислять факторизацию анти-Такаги комплексных симметричных матриц в терминах сингулярного разложения данных матриц.

Теорема. *Пусть* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *— анти-симметричная матрица* $A = -A^T$*, и пусть известно её произвольное сингулярное разложение*

$$A = U\Lambda V^*,$$

где $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *и* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *— унитарные* $UU^* = VV^* = I$*,* Λ *— диагональная с упорядочением сингулярных чисел по возрастанию. Тогда разложение анти-Такаги матрицы* A *определяется формулой*

$$A = U_z \Lambda J U_z^T,$$

где

$$U_z = U(U^*\overline{V}J)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$J = \begin{cases} \oplus_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \text{для чётного } n = 2k, \\ \oplus_{j=1}^{k} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \oplus (1) & \text{для нечётного } n = 2k+1. \end{cases}$$

Данная теорема будет применена для вычислений с операторами сжатия в случае конечного числа фермионных мод, порождёнными квадратичными гамильтонианами

$$H = \frac{i}{2}\Big((c^\dagger, Ac^\dagger) + (c, \overline{A}c)\Big),$$

где $(c^\dagger, Ac^\dagger) = \sum_{ij} A_{ij} c_i^\dagger c_j^\dagger$ и $(c, \overline{A}c) = \sum_{ij} \overline{A}_{ij} c_i c_j$ ($c_j^\dagger, c_j$ — фермионные операторы рождения и уничтожения), а A — антисимметричная комплексная матрица, к которой и будет применена указанная выше теорема.

Как аналитически, так и численно будет показано, что такой подход в ряде задач вычислительно существенно эффективнее ”наивной” реализации фермионных операторов как конечномерных матриц.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение № 075-15-2020-788).

Литература

1. Arzani F., Fabre C., Treps N. *Versatile engineering of multimode squeezed states by optimizing the pump spectral profile in spontaneous parametric down-conversion* // Phys. Rev. A. – 2018. – V. 97. – N. 3. – P. 033808.

2. Hernandez Vera M., Jagau T.C. *Resolution-of-the-identity approximation for complexscaled basis functions* // J. Chem. Phys. – 2019. – V. 151. – N. 11. – P. 111101.

3. Kopylov D. A., Spasibko K. Y., Murzina T. V., et al. *Study of broadband multimode light via non-phase-matched sum frequency generation* // New J. Phys. – 2019. – V. 21. – N. 3. – P. 033024.

4. Kopylov D. A., Rasputnyi A. V., Murzina T. V., et al. *Spectral properties of second, third and fourth harmonics generation from broadband multimode bright squeezed vacuum* // Laser Phys. Lett. – 2020. – V. 17. – N. 7. – P. 075401.

5. Chebotarev A. M., Teretenkov A. E. *Singular value decomposition for the Takagi factorization of symmetric matrices* // Appl. Math. and Comp. – 2014. – V. 234 – P.380–384.

ON APPLICATION OF SKEW-TAKAGI FACTORIZATION TO FERMIONIC SQUEEZING OPERATORS

A.E. Teretenkov

In this work we obtain the theorem which allows one to constructively calculate the skew-Takagi factorization for skew-symmetric matrices. It will be shown that this algorithm can be used for computations with fermionic squeezing operators.

Keywords: matrix factorization, fermions, squeezed states.

УДК 517.5

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ L_{P,μ_α}

Т.Е. Тилеубаев[1]

1 *tileubaev@enu.kz*; Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева

В работе с помощью обобщенных сдвигов изучаются задачи теории приближения в метрике L_p со степенным весом. Получены аналоги прямых и обратных теорем теории приближения в пространствах L_{p,μ_α}.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль гладкости.

Пусть $1 \le p \le \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Для $1 \le p < \infty$ через L_{p,μ_α} обозначим пространство состоящее из измеримых функций, f на $[0,\infty)$,для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\mu_\alpha} = \left(\int_0^\infty |f(x)|^p d\mu_\alpha(x)\right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$d\mu_\alpha(x) = \frac{x^{2\alpha+1}}{2^\alpha\Gamma(\alpha+1)}dx.$$

При $p = \infty$ обозначим через L_{∞,μ_α} множество всех функций $f(t)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0,\infty)$. Норма в пространстве L_{∞,μ_α} определяется по формуле

$$\|f\|_{\infty,\mu_\alpha} = \sup_{x\in[0,+\infty)} |f(x)|.$$

.

Рассмотрим в пространстве L_{p,μ_α} оператор обобщенного сдига функций $f(x)$(см. [8])

$$(T^h f)(x) = \int_0^\infty f(t)W(h,x,t)d\mu_\alpha(t),$$

$$W(h,x,t) = \begin{cases} \dfrac{2^{1-\alpha}(\Gamma(\alpha+1))^2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha+1/2)}\dfrac{[(x-y)^2-t^2]^{\alpha-\frac{1}{2}}[t^2-(x-y)^2]^{\alpha-\frac{1}{2}}}{(xyt)^{2\alpha}}, & |x-y|<t<x+y \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$