4. Losev A. G., Filatov V. V. *Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds* // Lobachevskii J Math – 1990. – V. 40. – PP. 1363–1370.

5. Grigor'yan A. A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1999. – V. 36. – C. 135–249.

MASSIVENESS OF EXTERIOR OF COMPACT ON NON COMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

V.V. Filatov

It is proved that q – massivnes of exterior of compact is equivalent to qD – massivnes of it on non-compact Riemannian manifolds. This result generalizes corresponding theorem for harmonic functions.

Keywords: massive sets, energy integral, stationary Shrodinger equation, elliptic equations.

УДК 530.145

УМЕНЬШАЮЩИЕ СЛЕД КВАНТОВЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И ИХ СВОЙСТВА

С.Н. Филиппов[1]

1 *sergey.filippov@phystech.edu*; Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук; Физико-технологический институт им. К.А. Валиева Российской академии наук; Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)

В докладе рассматриваются свойства уменьшающих след квантовых отображений, а также вводится понятие обобщённого стирающего квантового канала. Аналитически доказывается супераддитивность квантовой когерентной информации для этого канала.

Ключевые слова: квантовая операция, квантовая пропускная способность, когерентная информация.

В докладе рассматривается физически мотивированная задача передачи классической и квантовой информации через квантовые линии связи с потерей физических носителей информации, в которых вероятность потери зависит от состояния носителей [1]. Типичным примером такой задачи являются потери в оптоволокне, зависящие от поляризации [2]. Пусть $\Lambda : \mathbb{C}^{d\times d} \to \mathbb{C}^{d\times d}$ – вполне положительное и неуменьшающее след отображение (известное в литературе как квантовая операция). В работе [1] вводится следующее понятие обобщенного стирающего канала:

$$\Gamma_\Lambda[\rho] = \begin{pmatrix} \Lambda[\rho] & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & \mathrm{tr}\left[\rho(I - \Lambda^\dagger[I])\right] \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $\Lambda^\dagger$ – дуальное отображение, I – единичная матрица размера $d \times d$. Если ρ – оператор плотности одного носителя информации, то $\mathrm{tr}\left[\rho(I - \Lambda^\dagger[I])\right]$ – вероятность потери этого носителя. Если $\Lambda = p\mathrm{Id}$, $0 \le p \le 1$, то $\Gamma_{p\mathrm{Id}}$ есть стандартный стирающий канал [3, 4]. Если $\Lambda = p\Phi$, где $\Phi : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ – дефазирующий канал, то $\Gamma_{p\Phi}$ – так называемый «дефразирующий» канал, для которого авторы работы [5] численно установили супераддитивность когерентной информации для некоторых параметров p и каналов Φ. В отличие от этой работы отображение Λ не обязно обладать свойством равномерного уменьшения следа, т.е. вероятность стирания $\mathrm{tr}\left[\varrho(I - \Lambda^{\dagger}[I])\right]$ может в общем случае зависеть от состояния ϱ. Это объясняет, почему отображение (1) называется обобщённым стирающим каналом.

Предположим, что информация кодируется в поляризационные степени свободы единичных фотонов, которые могут потенциально находится в сцепленном коллективном состоянии. Пусть p_H и p_V – вероятности прохождения для горизонтально и вертикально поляризованных фотонов. Тогда действие оптоволокна с зависящими от поляризации потерями описывается квантовой операцией с одним оператором Крауса A [2]:

$$\Lambda[\varrho] = A\varrho A^{\dagger}, \quad A = \sqrt{p_H}|H\rangle\langle H| + \sqrt{p_V}|V\rangle\langle V|. \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), мы получаем квантовый канал с интересными свойствами. В работе [1] выводятся нижние и верхние оценки для классической и квантовой пропускных способностей обобщенного стирающего канала.

В работе [1] также доказывается, что Γ_Λ является деградируемы тогда и только тогда, когда $\min(p_H, p_V) \geq \frac{1}{2}$ или $p_H = 1$ или $p_V = 1$. Канал Γ_Λ является антидеградируемы тогда и только тогда, когда $\max(p_H, p_V) \leq \frac{1}{2}$ или $p_H = 0$ или $p_V = 0$. Если или $\frac{1}{2} < p_H < 1$, $0 < p_V < 1 - p_H$ или $\frac{1}{2} < p_V < 1$, $0 < p_H < 1 - p_V$, то аналитически доказывается супераддитивность когерентной информации [1], т.е., $\frac{1}{2}Q_1(\Gamma_\Lambda^{\otimes 2}) > Q_1(\Gamma_\Lambda)$, где

$$Q_1(\Psi) = \sup_{\rho \in \mathscr{D}(\mathscr{H})} \{S(\Psi[\rho]) - S(\widetilde{\Psi}[\rho])\},$$

$\widetilde{\Psi}$ – канал, комплементарный к Ψ, $S(\rho) = -\mathrm{tr}[\rho \log \rho]$ – энтропия фон Неймана, $\mathscr{D}(\mathscr{H})$ – множество матриц плотности. Максимально достижимая разность $\frac{1}{2}Q_1(\Gamma_\Lambda^{\otimes 2}) - Q_1(\Gamma_\Lambda)$ составляет примерно $7.197 \cdot 10^{-3}$ бит и достигается вблизи параметров $p_H = 0.7$ и $p_V = 0.19$ (или наоборот).

В докладе также обсуждается делимость уменьшающих след квантовых отображений.

Исследование поддержано Российским Научным Фондом в рамках проекта 19-11-00086.

Литература

1. Filippov S. N. *Capacity of trace decreasing quantum operations and superadditivity of coherent information for a generalized erasure channel* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical – 2021. – V. 54. – P. 255301.

2. Gisin N., Huttner B. *Combined effects of polarization mode dispersion and polarization dependent losses in optical fibers* // Optics Communications –1997. –V. 142. –P. 119.

3. Grassl M., Beth T., Pellizzari T. *Codes for the quantum erasure channel* // Phys. Rev. A –1997. – V. 56. – P. 33.

4. Bennett C. H., DiVincenzo D. P., Smolin J. A. *Capacities of quantum erasure channels* // Phys. Rev. Lett. – 1997. – V. 78. – P. 3217.

5. Leditzky F., Leung D., Smith G. *Dephrasure channel and superadditivity of coherent information* // Phys. Rev. Lett. –2018. – V. 121. – P. 160501.

TRACE DECREASING QUANTUM OPERATIONS AND THEIR PROPERTIES

S.N. Filippov

We consider general properties of trace decreasing quantum operations and introduce the notion of a generalized erasure channel. We analytically prove superadditivity of quantum coherent information for this channel.

Keywords: quantum operation, quantum capacity, coherent information.

УДК 517.547.2, 517.574

ХАРАКТЕРИСТИКА НЕВАНЛИННЫ И ИНТЕГРАЛЫ С МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ И РАЗНОСТЯМИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Б.Н. Хабибуллин[1]

1 *khabib-bulat@mail.ru*; Башкирский государственный университет

Анонсированы новые верхние оценки интегралов по мерам с подынтегральным выражением, связанным с мероморфной функцией или разностью субгармонических функций. Эти оценки даются с использованием характеристики Неванлинны, а также параметров меры или ее носителя. Результаты в определённом смысле завершённые.

Ключевые слова: мероморфная функция, δ-субгармоническая функция, теория Неванлинны, лемма Эдрея – Фукса о малых интервалах, h-обхват Хаусдорфа

$\mathbb{C}$ — *комплексная плоскость* с *вещественной осью* $\mathbb{R}$ и *положительной полуосью* $\mathbb{R}^+$. Для мероморфной функции $f \neq 0,\infty$ в *открытом круге* $D(R) := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| < R\bigr\} \subset \mathbb{C}$ радиуса R её *характеристика Неванлинны* — возрастающая выпуклая относительно ln непрерывная функция $T(r,f) := m(r,f) + N(r,f)$ на интервале $(0,R)$, где [1]

$$m(r,f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+\bigl|f(re^{i\varphi})\bigr|\,\mathrm{d}\varphi \in \mathbb{R}^+, \quad \ln^+ x \underset{x\in\mathbb{R}^+}{:=} \max\{0, \ln x\},$$

$$N(r,f) := \int_0^r \frac{n(t,f)-n(0,f)}{t}\,\mathrm{d}t + n(0,f)\ln r \in \mathbb{R},$$

а $n(r,f)$ — число полюсов функции f, подсчитанное с учётом их кратности в *замкнутом круге* $\overline{D}(r) := \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| \leq r\bigr\} \subset \mathbb{C}$. Невозможно оценить сверху функцию максимума модуля $M(r,f) := \max\limits_{|z|=r}\bigl|f(z)\bigr|$ через $T(r,f)$, как и $T(r,f)$ через $M(r,f)$ [1, гл. I, § 7]. В то же время оценки интегралов от $\ln^+ M(r,f)$ или $\ln^+|f|$ — это классические

Теорема Р. Неванлинны (см. [1, гл. I, теорема 7.2] вместе с обсуждением в [2, Введение, 1.1]) *Пусть* $1 < k \in \mathbb{R}^+$, $0 < r_0 \in \mathbb{R}^+$. *Тогда существует такое число* $c_0(k) \in \mathbb{R}^+$, *что для любой мероморфной функции* $f \neq 0,\infty$ *на* $\mathbb{C}$ *выполнено неравенство*

$$\int_0^r \ln^+ M(t,f)\,\mathrm{d}t \leq c_0(k)T(kr,f)r \quad \text{при всех } r \geq r_0.$$