*space of quantum channels with the completely bounded distance. We study the questions about a factorization of values of such a mapping and an approximation of the identity channel by almost diagonal values of a mapping.*

Keywords: completely bounded distance, completely positive operator, completely positive process, Hilbert tensor product, two-parameter family of quantum channels, quantum channel, trace of operator.

УДК 519.2+531.19

**СТРУКТУРЫ СОБЫТИЙ, КВАНТОВЫЕ ЛОГИКИ И УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ**

С.Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

*В статье обсуждается стохастические свойства квантово-механических систем в достаточно абстрактной форме. Такие системы (структуры) встречаются в теории вероятностей, теории операторных алгебр, теории топологических векторных пространств. Также рассмотрены ультрапроизведения последовательностей этих структур.*

**Ключевые слова**: Структуры событий, ультрапроизведения.

**Определение 1.** (см., например, S. Gudder, [1]) *Пусть $\mathscr{E}$ — непустое множество, а $S$ — множество функций из $\mathscr{E}$ в интервал $[0,1]$. Мы называем $(\mathscr{E},S)$ структурой событий, если выполняются следующие две аксиомы: A1. Если $s(a)=s(b)$ для каждого $s\in S$, то $a=b$; A2. Пусть $a_1,a_2,\dots\in\mathscr{E}$ удовлетворяют условию $s(a_i)+s(a_j)\le 1$, $i\neq j$ для каждого $s\in S$. Тогда существует такой элемент $b\in\mathscr{E}$, что $s(b)+s(a_1)+s(a_2)+\ldots.=1$ для каждого $s\in S$.*

Если $(\mathscr{E},S)$ является структурой событий, будем называть элементы $\mathscr{E}$ событиями, а элементы $S$ — состояниями. Для $a,b\in\mathscr{E}$, определим соотношение $a\le b$, если $s(a)\le s(b)$ для каждого $s\in S$. Легко показать, что $\le$ является отношением частичного порядка, поэтому $(\mathscr{E},S)$ является частично упорядоченным множеством. Если $a\in\mathscr{E}$, то поскольку $s(a)\le 1$ для каждого $s\in S$, по аксиоме $A2$ существует элемент $b\in\mathscr{E}$ такой, что $s(b)=1-s(a)$ для каждого $s\in S$. Далее будем писать $b=a'$ и называть событие $b$ ортодополнением события $a$. Мы можем интерпретировать $a'$ как событие, которое происходит тогда и только тогда, когда $a$ не происходит. Если $a\le b'$, мы скажем, что события $a$ и $b$ ортогональны, и будем писать $a\perp b$.

Если операция $a\to a'$ является ортодополнением на $(\mathscr{E},S)$, то $a''=a$ для каждого $a\in\mathscr{E}$; если $a\le b$, то $b'\le a'$; и $a\vee a'=1$ для каждого $a\in\mathscr{E}$. Такое частично упорядоченное множество $(\mathscr{E},S)$ будем называть полным частично упорядоченным множеством и обозначать $(\mathscr{E},\le,')$.

Скажем, что два события $a,b$ совместимы ($a\leftrightarrow b$), если существуют взаимно ортогональные события $a_1,b_1$ и $c$ такие, что $a=a_1\vee c, b=b_1\vee c$.

Полное частично упорядоченное множество $(\mathscr{P},\le,')$ называется $\sigma$-полным, если $a_i\in\mathscr{P}$, $a_i\perp a_j$, $i\neq j$, влечёт существование $\vee a_i$. Полное частично упорядоченное множество $(\mathscr{P},\le,')$ называется ортомодулярным, если $a\le b$ влечёт $b=a\vee(b\wedge a')$.

**Определение 2.** *Квантовой логикой называется $\sigma$-полное ортомодулярное частично упорядоченное множество.*

**Определение 3.** (см., например, S. Heinrich, [2]) *Пусть $A_n\,(n \in \mathbb{N})$ — произвольные непустые множества, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$. Фактор-множество декартова произведения множеств $A_n$ $(n \in \mathbb{N})$ по отношению эквивалентности $(a_n) \sim_{\mathscr{U}} (b_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathscr{U}$ называется теоретико-множественным ультрапроизведением семейства множеств $(A_n)$ и обозначается $(A_n)_{\mathscr{U}}$.*

**Определение 4.** *Пусть $(\mathscr{E}_n, S_n)$ — последовательность структур событий, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$. Пусть $\prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n$ — декартово произведение последовательности $(\mathscr{E}_n)$. Положим*

$$\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{E}_n, S_n) = \{(a_n) \in \prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n : \lim_{\mathscr{U}} s_n(a_n) = 0 \text{ для всех } (s_n),\ s_n \in S_n\}.$$

*В фактор-пространстве $(\mathscr{E}_n)_{\mathscr{U}} = \prod_{n=1}^{\infty}\mathscr{E}_n / \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{E}_n, S_n)$ определим множество состояний следующим образом:*

$$S_{\mathscr{U}} = \{s_{\mathscr{U}} : s_{\mathscr{U}}(a_n)_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} s_n(a_n)\}.$$

*Пару $((\mathscr{E}_n)_{\mathscr{U}}, S_{\mathscr{U}})$ назовём ультрапроизведением последовательности структур событий.*

**Теорема 1.** *Ультрапроизведение последовательности структур событий есть структура событий.*

Множество вероятностных мер $\mathscr{M}$ на $(\mathscr{E}, \leq, ')$ называется определяющим порядок, если $m(a) \leq m(b)$ для каждого $m \in \mathscr{M}$ влечёт $a \leq b$.

Известно, что если $\mathscr{E}$ — непустое множество, а $S$ — множество функций из $\mathscr{E}$ в $[0,1]$, то $(\mathscr{E}, S)$ является структурой событий тогда и только тогда, когда $(\mathscr{E}, \leq, ')$ является квантовой логикой, а $S$ — определяющим порядок множеством вероятностных мер на $\mathscr{E}$.

**Теорема 2.** *Ультрапроизведение последовательности квантовых логик есть квантовая логика.*

## Литература

1. Gudder S. Stochastic Methods in Quantum Mechanics. — Dover Publications, 2014.

2. Heinrich S. *Ultraproducts in Banach space theory* // J. für die reineund angewandte Math. – 1980. – V. 313, – P. 72–104.

EVENT STRUCTURES, QUANTUM LOGICS AND ULTRAPRODUCTS

S.G. Haliullin

*The article discusses the stochastic properties of quantum mechanical systems in a rather abstract form. Such systems (structures) are found in probability theory, the theory of operator algebras, and the theory of topological vector spaces. Ultraproducts of the sequences of these structures are also considered.*

Keywords: Event structures, ultraproducts.