THE NEVANLINNA CHARACTERISTIC AND INTEGRALS WITH MEROMORPHIC FUNCTIONS AND DIFFERENCES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

B.N. Khabibullin

New upper estimates for integrals over measures with an integrand associated with a meromorphic function or the difference of subharmonic functions are announced. These estimates are given using the Nevanlinna characteristic and also parametrs of the measure or its support. The main results are, in a sense, complete.

Keywords: meromorphic function, δ-subharmonic function, Nevanlinna Theory, Edrei – Fuchs Lemma on small arcs, Hausdorff h-content

УДК 517.986

О СВОЙСТВАХ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ КВАНТОВЫХ КАНАЛОВ

Р.Л. Хажин[1]

1 *ruslan.khazhin@mail.ru*; Казанский Федеральный университет

Рассматриваются отображения, зависящие от двух действительных неотрицательных аргументов и принимающие значения в метрическом пространстве квантовых каналов с вполне ограниченным расстоянием. Изучаются условия факторизации значений такого отображения и аппроксимации тождественного канала почти диагональными значениями.

Ключевые слова: вполне ограниченное расстояние, вполне положительный оператор, вполне положительный процесс, гильбертово тензорное произведение, двупараметрическое семейство квантовых каналов, квантовый канал, след оператора.

В работах целого ряда авторов изучались свойства вполне положительных процессов, которые представляют собой двупараметрические семейства вполне положительных операторов (см., например, [1, 2, 3] и ссылки в них). Наш доклад посвящен двупараметрическим семействам квантовых каналов, зависящим от двух действительных неотрицательных параметров. Мы рассматриваем эти семейства в метрическом пространстве квантовых каналов с так называемым вполне ограниченным расстоянием [4, с. 201].

Нами используются обозначения и терминология из книги [4]. Все гильбертовы пространства рассматриваются над полем комплексных чисел и конечномерны.

Пусть $\mathscr{H}$ – гильбертово пространство, $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ – C^*-алгебра всех линейных операторов на $\mathscr{H}$, а $\mathscr{S}(\mathscr{H})$ – подмножество в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, образованное всеми состояниями, т.е. положительными операторами σ со следом $tr\sigma = 1$. Через $\mathscr{O}_c(\mathscr{H})$ обозначается множество квантовых каналов, состоящее из сохраняющих след вполне положительных операторов на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

Вполне ограниченное расстояние между квантовыми каналами $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2 \in \mathscr{O}_c(\mathscr{H})$ определяется формулой [4, (4.35)]:

$$d(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2) = \frac{1}{2} \sup_{\mathscr{K}} \sup_{\omega} tr|(\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{I} - \mathscr{E}_2 \otimes \mathscr{I})(\omega)|.$$

Здесь $\mathscr{K}$ – гильбертово пространство, ω – состояние из $\mathscr{S}(\mathscr{H}\otimes\mathscr{K})$, $\mathscr{I}$ – тождественный канал, $|\cdot|$ – абсолютная величина оператора, а $\otimes$ – значок гильбертова тензорного произведения.

Зафиксируем действительное число $T > 0$. Вполне положительным процессом мы называем отображение

$$N : \{(s,t) \mid 0 \leqslant s \leqslant T, 0 \leqslant t \leqslant T, s \geqslant t\} \longrightarrow \mathscr{O}_C(\mathscr{H}) : (s,t) \longmapsto N(s,t),$$

удовлетворяющее следующим свойствам:

$$1)\ N(t,t) = \mathscr{I} \quad \text{для любого } \ t \in [0,T];$$

$$2)\ N(t_3,t_2)\circ N(t_2,t_1) = N(t_3,t_1) \quad \text{для всех}\, 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant T.$$

Мы отождествляем отображение с его образом – двупараметрическим семейством квантовых каналов.

Будем говорить, что тождественный канал $\mathscr{I}$ аппроксимируется почти диагональными значениями N в метрике d, если для каждого $t \in [0,T]$ выполняется условие

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} d(N(t+\varepsilon,t),\mathscr{I}) = 0.$$

В работе изучаются двупараметрические семейства квантовых каналов M, которые являются произведениями вполне положительных процессов N_1 и N_2. При этом

$$M(s,t) = N_1(s,t)\circ N_2(s,t),$$

где $s,t \in [0,T]$, а $\circ$ – значок композиции операторов. В докладе будут обсуждаться условия того, когда M является вполне положительным процессом. Также будут обсуждаться некоторые условия аппроксимации тождественного канала почти диагональными значениями двупараметрического семейства квантовых каналов в метрике d.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Гумерову Ренату Нельсоновичу за помощь в работе и всем участникам семинаров по функциональному анализу и математической физике в КГЭУ и КФУ за полезные обсуждения предмета доклада.

Литература

1. Wolf M. M., Cirac J. I. *Dividing quantum channels.* // Commun. Math. Phys. – 2006. – V. 40. – P. 123–134.

2. Breuer H. P., Laine E. M. *Non-Markovian dynamics in open quantum systems* // Rev. Mod. Phys. – 2015. – V. 40. – P. 234–253.

3. Филиппов С. Н. *Тензорные произведения квантовых отображений* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – 2018. – Т. 151. –С. 117–125.

4. Heinosaari T., Ziman M. *The mathematical language of quantum theory.* – Cambridge Univ. Press, Cambridge, – 2012. – 327 p.

ON TWO-PARAMETER FAMILIES OF QUANTUM CHANNELS

R.L. Hazhin

We consider mappings depending on two real non-negative arguments and taking values in a metric

space of quantum channels with the completely bounded distance. We study the questions about a factorization of values of such a mapping and an approximation of the identity channel by almost diagonal values of a mapping.
Keywords: completely bounded distance, completely positive operator, completely positive process, Hilbert tensor product, two-parameter family of quantum channels, quantum channel, trace of operator.

УДК 519.2+531.19

СТРУКТУРЫ СОБЫТИЙ, КВАНТОВЫЕ ЛОГИКИ И УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ

С.Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье обсуждается стохастические свойства квантово-механических систем в достаточно абстрактной форме. Такие системы (структуры) встречаются в теории вероятностей, теории операторных алгебр, теории топологических векторных пространств. Также рассмотрены ультрапроизведения последовательностей этих структур.

Ключевые слова: Структуры событий, ультрапроизведения.

Определение 1. (см., например, S. Gudder, [1]) *Пусть $\mathscr{E}$ — непустое множество, а S — множество функций из $\mathscr{E}$ в интервал $[0,1]$. Мы называем $(\mathscr{E}, S)$ структурой событий, если выполняются следующие две аксиомы: A1. Если $s(a) = s(b)$ для каждого $s \in S$, то $a = b$; A2. Пусть $a_1, a_2, \dots \in \mathscr{E}$ удовлетворяют условию $s(a_i) + s(a_j) \leq 1$, $i \neq j$ для каждого $s \in S$. Тогда существует такой элемент $b \in \mathscr{E}$, что $s(b) + s(a_1) + s(a_2) + \dots = 1$ для каждого $s \in S$.*

Если $(\mathscr{E}, S)$ является структурой событий, будем называть элементы $\mathscr{E}$ событиями, а элементы S — состояниями. Для $a, b \in \mathscr{E}$, определим соотношение $a \leq b$, если $s(a) \leq s(b)$ для каждого $s \in S$. Легко показать, что $\leq$ является отношением частичного порядка, поэтому $(\mathscr{E}, S)$ является частично упорядоченным множеством. Если $a \in \mathscr{E}$, то поскольку $s(a) \leq 1$ для каждого $s \in S$, по аксиоме $A2$ существует элемент $b \in \mathscr{E}$ такой, что $s(b) = 1 - s(a)$ для каждого $s \in S$. Далее будем писать $b = a'$ и называть событие b ортодополнением события a. Мы можем интерпретировать a' как событие, которое происходит тогда и только тогда, когда a не происходит. Если $a \leq b'$, мы скажем, что события a и b ортогональны, и будем писать $a \perp b$.

Если операция $a \to a'$ является ортодополнением на $(\mathscr{E}, S)$, то $a'' = a$ для каждого $a \in \mathscr{E}$; если $a \leq b$, то $b' \leq a'$; и $a \vee a' = 1$ для каждого $a \in \mathscr{E}$. Такое частично упорядоченное множество $(\mathscr{E}, S)$ будем называть полным частично упорядоченным множеством и обозначать $(\mathscr{E}, \leq, ')$.

Скажем, что два события a, b совместимы ($a \leftrightarrow b$), если существуют взаимно ортогональные события a_1, b_1 и c такие, что $a = a_1 \vee c, b = b_1 \vee c$.

Полное частично упорядоченное множество $(\mathscr{P}, \leq, ')$ называется σ-полным, если $a_i \in \mathscr{P}$, $a_i \perp a_j$, $i \neq j$, влечёт существование $\vee a_i$. Полное частично упорядоченное множество $(\mathscr{P}, \leq, ')$ называется ортомодулярным, если $a \leq b$ влечёт $b = a \vee (b \wedge a')$.

Определение 2. *Квантовой логикой называется σ-полное ортомодулярное частично упорядоченное множество.*