

общих инвариантов операторов, образующих базис двумерной подалгебры, позволяет существенно упростить процесс интегрирования исходного уравнения и избежать так называемого “неправильного” понижения его порядка. В зависимости от типа базисных операторов (точечный, касательный или альтернативный обобщённый оператор, не являющийся классическим) возникает несколько случаев, для каждого из которых указывается правило построения инвариантов, позволяющих построить факторсистему наиболее эффективным образом.

Этот подход можно обобщить на уравнение любого старшего порядка в случае подалгебры любой размерности.

Литература

1. Ибрагимов Н.Х. *Опыт группового анализа*. – М.: Знание, сер. Математика и кибернетика, № 7, 1991. – 48 с.
2. Линчук Л.В. Альтернативные обобщенные симметрии обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования, материалы научной конференции “Герценовские чтения – 2010”. – СПб: Издательство БАН, 2010. – с. 46-53.
3. Linchuk L.V., Zaitsev V.F., Flegontov A.V. *Local and nonlocal symmetries and inverse problems for ordinary differential equations* – International journal of pure mathematics, Vol.1, 2014. – P.72–76.
4. Зайцев В.Ф., Линчук Л.В., Флегонтов А.В. Эволюция классического группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений – Устойчивость и процессы управления. Материалы III Международной конференции, посвящённой 85-летию со дня рождения профессора, чл.-корр. РАН В.И.Зубова. – СПб: Издательский Дом Фёдоровой Г.В., 2015. – С. 81-82.

THE IMPACT OF ALTERNATIVE GENERALIZED OPERATORS SUB-ALGEBRA TYPE ON THE FACTORIZATION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

L.V. Linchuk

This paper describes a reduction of ordinary differential equations by the algebra of alternative generalized admissible operators. The connection between the type of sub-algebra and the method of factorization of the 2nd order ordinary differential equations is considered. The classification of the sub-algebras is made. The examples of the integrable equations are given.

Keywords: alternative generalized operators, two-dimensional sub-algebra, ordinary differential equations, factorization, group analysis.

УДК 512.532.3, 517.986

РАСШИРЕНИЯ ПОЛУГРУПП И БАНАХОВЫ МОДУЛИ

Е.В. Липачева¹

¹ elipacheva@gmail.com; Казанский государственный энергетический университет

Рассматриваются нормальные расширения полугрупп и полугрупповые C^ -алгебры, определяемые этими расширениями. Изучается структура банахова модуля на подлежащем пространстве редуцированной полугрупповой C^* -алгебры для полугруппы, являющейся расширением другой полугруппы с помощью конечной группы.*

Ключевые слова: полугруппа с сокращением, нормальное расширение полугруппы, редуцированная полугрупповая C^* -алгебра, банаховый модуль, свободный банаховый модуль.

Пусть S и L – полугруппы с сокращением и единицами, а G – конечная группа. Единицы в S , L и G будем обозначать буквой e .

Пусть имеется инъективный гомоморфизм полугрупп $\tau : S \rightarrow L$ и сюръективный полугрупповой гомоморфизм $\sigma : L \rightarrow G$. Тройку (L, τ, σ) назовем *нормальным расширением* полугруппы S с помощью группы G , если $\tau(S)$ является полным образом единицы группы G , т.е. $\sigma^{-1}(e) = \tau(S)$. Таким образом, нормальное расширение можно задать с помощью короткой точной последовательности

$$e \longrightarrow S \xrightarrow{\tau} L \xrightarrow{\sigma} G \longrightarrow e.$$

Расширение (L, τ, σ) полугруппы S с помощью группы G называется *тривиальным*, если оно эквивалентно расширению $(S \times G, \tau', \sigma')$, где $\tau'(a) = (a, e)$ и $\sigma'(a, g) = g$ для любых $a \in S, g \in G$. Это значит, что существует изоморфизм полугрупп $\psi : L \rightarrow S \times G$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \nearrow \tau & \downarrow \psi & \searrow \sigma & \\ S & & & & G. \\ & \searrow \tau' & & \nearrow \sigma' & \\ & & S \times G & & \end{array}$$

Для полугруппы S рассмотрим гильбертово пространство $l^2(S)$ квадратично суммируемых комплекснозначных функций на S . Ортонормированным базисом в этом пространстве является множество функций $\{e_a \mid a \in S\}$, таких, что $e_a(b) = 1$, если $a = b$, и $e_a(b) = 0$ в противном случае.

В алгебре всех ограниченных линейных операторов $B(l^2(S))$ рассмотрим C^* -подалгебру, порожденную множеством изометрий $\{T_a \mid a \in S\}$, где $T_a(e_b) = e_{ab}$, $a, b \in S$, которая называется *редуцированной полугрупповой C^* -алгеброй* и обозначается $C_r^*(S)$. Аналогично введем в рассмотрение C^* -алгебру $C_r^*(L)$.

Нормальные расширения полугрупп и соответствующие полугрупповые C^* -алгебры рассматривались в работах [1, 2, 3]. В работах [4, 5] изучалась структура банахова модуля на подлежащем пространстве C^* -алгебры $C_r^*(L)$, определяемая заданным сюръективным гомоморфизмом полугрупп $\sigma : L \rightarrow G$. При этом описаны условия, при которых C^* -алгебра $C_r^*(L)$ является конечно порожденным банаховым модулем или свободным банаховым модулем над своей подалгеброй.

В настоящем докладе обсуждается связь между нормальными расширениями полугрупп и структурой банахова модуля на полугрупповой C^* -алгебре $C_r^*(L)$.

Как следствие теоремы 3.1 из работы [3] можно получить, что если расширение (L, τ, σ) тривиально, то C^* -алгебра $C_r^*(S)$ вкладывается в C^* -алгебру $C_r^*(L)$, то есть существует изометрический $*$ -гомоморфизм $\varphi : C_r^*(S) \rightarrow C_r^*(L)$, такой, что $\varphi(T_a) = T_{\tau(a)}$, $a \in S$. Таким образом, подлежащее пространство C^* -алгебры $C_r^*(L)$ можно наделить структурой банахова $C_r^*(S)$ -модуля. Как показывается в следующей теореме, этот модуль является свободным банаховым $C_r^*(S)$ -модулем.

Теорема. Пусть (L, τ, σ) – тривиальное расширение полугруппы S с помощью конечной группы G . Тогда существует топологический изоморфизм банаховых $C_r^*(S)$ -модулей:

$$C_r^*(L) \cong \bigoplus_1 C_r^*(S),$$

где число слагаемых в прямой l_1 -сумме равно порядку группы G .

Литература

1. Grigoryan S. A., Gumerov R. N., Lipacheva E. V. *On Extensions of Semigroups and their Applications to Toeplitz Algebras* // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40. – P. 2052–2061.
2. Гумеров Р. Н. *Нормальные расширения полугрупп и вложения полугрупповых C^* -алгебр* // Труды МФТИ. – 2020. – Т. 12. – № 1. – С. 74–82.
3. Липачева Е. В. *Расширения полугрупп и морфизмы полугрупповых C^* -алгебр* // Сиб. матем. ж. – 2021. – Т. 62. – № 1. – С. 82–96.
4. Липачева Е. В. *О градуированных полугрупповых C^* -алгебрах и гильбертовых модулях* // Труды МИАН им. В.А.Стеклова. – 2021. – Т. 313. – С.131–142.
5. Lipacheva E. V. *A semigroup C^* -algebra which is a free Banach module* // Lobachevskii J. Math. – 2021. – V. 42. (в печати).

EXTENSIONS OF SEMIGROUPS AND BANACH MODULES

E.V. Lipacheva

We consider the normal extensions of semigroups. The reduced semigroup C^* -algebras are associated with these extensions. We study the structure of a Banach module on the underlying space of the reduced semigroup C^* -algebra defined for a semigroup that is an extension of another semigroup by a finite group.

Keywords: cancellative semigroup, normal extension of semigroup, reduced semigroup C^* -algebra, Banach module, free Banach module.

УДК 534.11

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ МАССАМИ

В.Л. Литвинов¹

¹ vladlitvinov@rambler.ru; Сызранский филиал Самарского государственного технического университета, г.Сызрань

Рассматриваются продольные колебания неограниченного неоднородного стержня. Для решения задачи используется метод Римана.

Ключевые слова: продольные колебания, неограниченный неоднородный стержень

Рассмотрим продольные колебания неограниченного неоднородного стержня. Дифференциальное уравнение имеет вид

$$U_{tt}(x, t) - a^2(x, t)U_{xx}(x, t) = 0, \quad ((1))$$