

УДК 517.98

РАССЛОЕНИЕ НАД ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ (X, φ) И АССОЦИИРОВАННАЯ C^* -АЛГЕБРА

С.А. Григорян¹, А.Ю. Кузнецова²¹ gsuren@inbox.ru; Казанский государственный энергетический университет² alla.kuznetsova@gmail.com; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт физики

Пару (X, φ) , состоящую из счетного множества X с заданным на нем отображением φ , можно рассматривать как динамическую систему. Здесь мы рассматриваем динамические системы с ограниченной в совокупности мощностью прообраза. Тогда система (X, φ) порождает C^* -алгебру $C_\varphi^*(X)$. Мы вводим понятия накрытия и расслоения динамической системы и рассматриваем расширение $C_\varphi^*(X)$ в терминах расслоений над (X, φ) .

Ключевые слова: C^* -алгебра, динамическая система, накрытие, расслоение.

Динамическая система, порожденная отображением есть пара (X, φ) , состоящая из счетного множества X и заданного отображения $\varphi : X \rightarrow X$. Пусть даны две динамические системы (Y, ψ) и (X, φ) . Пусть задано отображение $\tau : Y \rightarrow X$, связывающее отображения φ и ψ , а именно такое, что

- 1) $\tau(Y) = X$;
- 2) если $\tau(y) \neq \tau(\psi(y))$, то $\varphi(\tau(y)) = \tau(\psi(y))$, $y \in Y$.

Тогда можно сказать, что $\tau : Y \rightarrow X$ порождает отображение (обозначим той же буквой) $\tau : (Y, \psi) \rightarrow (X, \varphi)$, которое назовем *накрытием динамической системы (X, φ) динамической системой (Y, ψ)* . Соответственно, множество $Y_x = \{y \in Y : \tau(y) = x\}$ назовем *слоем над $x \in X$* .

Накрытие $\tau : (Y, \psi) \rightarrow (X, \varphi)$ назовем *n -слойным*, если $\text{card } Y_x = n$ для всех $x \in X$.

Накрытие $\tau : (Y, \psi) \rightarrow (X, \varphi)$ назовем *расслоением*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ существует биекция $\sigma : Y_{x_1} \rightarrow Y_{x_2}$ такая, что

- 1) из условия $y \in Y_{x_1}$ и $\psi(y) \in Y_{x_1}$ следует $\sigma(\psi(y)) = \psi(\sigma(y))$,
- 2) из условия $y \in Y_{x_1}$ и $\psi(y) \in Y_{\varphi(x_1)}$ следует $\tau(\sigma(y)) = \varphi(x_2)$.

В работе [1] была введена и далее в работах [2, 3] исследована C^* -алгебра $C_\varphi^*(X)$, порожденная динамической системой (X, φ) , принадлежащей к классу динамических систем с конечной мощностью прообраза. Доклад посвящен расширениям алгебры $C_\varphi^*(X)$ в терминах расслоений над (X, φ) .

Заданная динамическая система индуцирует оператор композиции

$$T_\varphi : l^2(X) \rightarrow l^2(X), \quad T_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Пусть (X, φ) — такая динамическая система, что $\sup_{x \in X} \text{card } \varphi^{-1}(x) < \infty$. Тогда (и только тогда) оператор T_φ ограничен и порождает $C_\varphi^*(X)$.

Пусть $\tau : (Y, \psi) \longrightarrow (X, \varphi)$ — n -слойное расслоение, то есть $\text{card } \tau^{-1}(x) = n$ для всех $x \in X$. Тогда

$$\sup_{y \in Y} \text{card } \psi^{-1}(y) \leq n \sup_{x \in X} \text{card } \varphi^{-1}(x),$$

и из ограниченности T_φ на $l^2(X)$ следует ограниченность T_ψ на $l^2(Y)$.

Пусть $C_\varphi^*(X)$ и $C_\psi^*(Y)$ — C^* -алгебры, порожденные динамическими системами (X, φ) и (Y, ψ) , и $\tau : (Y, \psi) \longrightarrow (X, \varphi)$ — n -слойное расслоение. Тогда

Теорема 1. *Расслоение $\tau : (Y, \psi) \longrightarrow (X, \varphi)$ порождает вложение*

$$\tau^* : C_\varphi^*(X) \hookrightarrow C_\psi^*(Y).$$

Пусть теперь $Y = X \times \{1, 2, \dots, n\}$ и при этом

Теорема 2. *Пусть $\psi(x, k) = (x, k+1)$ для $1 \leq k < n$, и $\psi(x, n) = (\varphi(x), 1)$. Тогда $C_\psi^*(Y)$ является алгебраическим расширением $C_\varphi^*(X)$ с помощью уравнения $x^n = T_\varphi$.*

Теорема 3. *Пусть $\psi(x, k) = (x, k+1)$ для $1 \leq k < n$, и $\psi(x, n) = (\varphi(x), n)$. Тогда $C_\psi^*(Y) = C_\varphi^*(X) \otimes M_n(\mathbb{C})$.*

Литература

1. S. Grigoryan, A. Kuznetsova C^* -algebras generated by mappings// Lobachevskii J. of Math. – 2008. – V. 29. – № 1. – Pp. 5–8.
2. Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. C^* -алгебры, порожденные отображениями// Мат. Заметки – 2010. – Т. 87. – № 5. – С. 694–703.
3. А.Ю. Кузнецова Об одном классе операторных алгебр, порожденных семейством частичных изометрий// Записки научных семинаров ПОМИ – 2015. – Т. 437. – С. 131–144.

THE BUNDLE OVER DYNAMICAL SYSTEM (X, φ) AND ASSOCIATED C^* -ALGEBRA

S.A. Grigoryan, A.Yu. Kuznetsova

The pair (X, φ) , which consists of the countable set X and the preset self-mapping φ , can be regarded as a dynamical system. Here we consider the dynamical systems with a bounded in common cardinality of preimage. In this case the system (X, φ) generates the C^ -algebra $C_\varphi^*(X)$. We introduce the notions of covering and bundle of the system and consider the extension of $C_\varphi^*(X)$ in the terms of bundle over (X, φ) .*

Keywords: C^* -algebra, dynamic system, covering, bundle.

УДК 517.98

СТРУКТУРА C^* -АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ СВОБОДНЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ АБЕЛЕВЫХ ПОЛУГРУПП

Т.А. Григорян¹

¹ tkhorkova@gmail.com; Казанский государственный энергетический университет