

Квантовые Тензорные сети

Лекция 1

(07.09.21)

Г. В. Корень "Тензорное
исчисление"

М.: Физматкнига, 2020.

A — объект

↑ главная буква

A_i $\Sigma_{i=1}^3 A_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, T_0$

$$A_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

 $i, k = 1, 2, 3$

$$A_{ikl} = \begin{pmatrix} A_{ik1} \\ A_{ik2} \\ A_{ik3} \end{pmatrix}$$

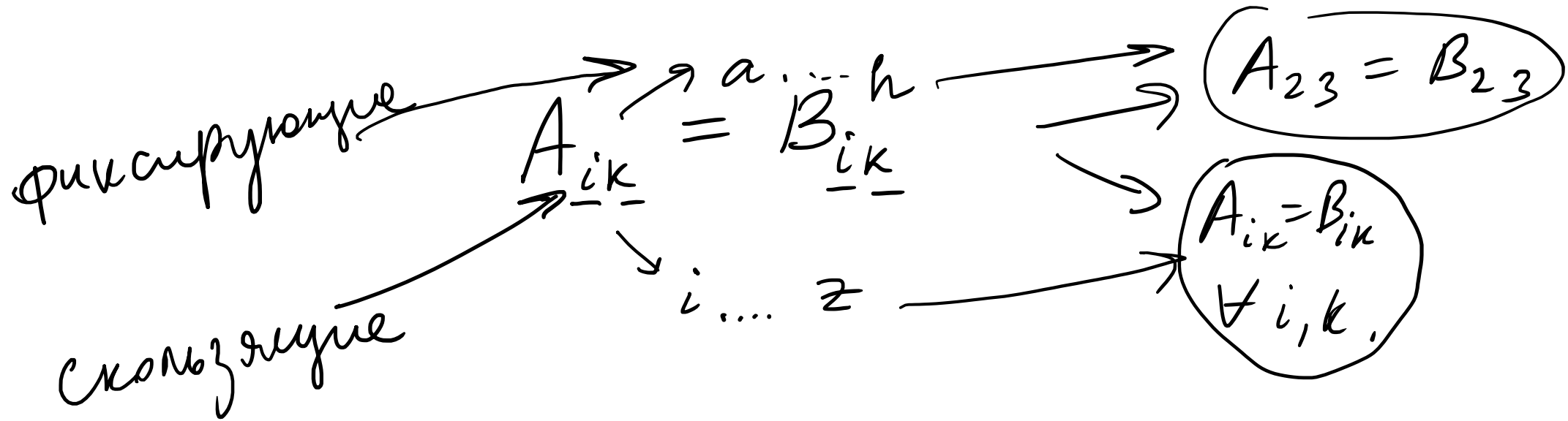
$$A_{\underbrace{ikl, \dots}}$$

число индексов $\equiv$ порядок.

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$\mathbb{R}$ измерение.

A — объект нулевого порядка.



$$A_c = B_c$$

$$A_e = B_e$$

$$A_{ic} = B_{ic}$$

$\nwarrow$ $\uparrow$
 фикс.
 i - любое

Если $A_{ik} = -A_{ki}$, ^{анти} то симм. объект

$A_{ik} = A_{ki}$ — то симм. объект.

$A_{ikl} = A_{kil}$ — симм. по отн.
к инд. i и k .

$A_{ik} \rightarrow A_{ki}$ (транспонирование)

$A_{ikl} \rightarrow A_{kile}$ (обобщ. транспон.)

A_{ikl} и A_{kil} — "изомеры".

A_{ikl}

$$\boxed{A_{iil} \equiv \sum_c A_{ccl}} - \underline{\underline{\text{вертка.}}}$$

~~A_{iii}~~ - запрещено!

$$\sum_c A_{cl}.$$

если комм.

$$A_j B_j = A_i B_i = \sum_c \overset{\swarrow}{A_c} \overset{\swarrow}{B_c} = \sum_c B_c A_c = B_i A_i$$

(A_{ik})
 (B_{km})

$$\begin{aligned}
 (A \cdot B)_{im} &= \sum_c A_{ic} B_{cm} \\
 &= A_{ik} B_{km}.
 \end{aligned}$$

A_{ikl} — трёхм. таблица.

A_{iiii}

A_{ik} — таблица двум.
(матрица)

δ_{ik} - символ Кронекера = $\begin{cases} 1, & i=k \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$

$$A_i \delta_{ik} = A_k$$

$\delta_{ii} = N$ - измерение инд. i

Символ Леви-Чивитта (абсол. антисимм.)

$N=3$

$$e_{ikl} = -e_{lki}$$

$e_{231} = 1$ объект

$$e_{123} = 1$$

$$-e_{113} = e_{113} = 0.$$

$N=4$

$$e_{iklm}$$

$e_{1234} = 1$

$$e_{2341} = -1.$$

$$e_{i_1 \dots i_N}$$

$$e_{12 \dots N} = 1.$$

$e_{ik} e A_{ik}$

$$e_{ik} e B_e = \tilde{B}_{ik}$$

объект 2 порядка.

дуальный к B_e

объект 1 пор.

$N=3$

$$B_e = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$(\tilde{B}_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & B_3 - B_2 \\ -B_3 & 0 & +B_1 \\ B_2 - B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{B}_{12} = e_{12} e B_e = B_3.$$

$$\tilde{B}_{13} = e_{13} e B_e = -B_2$$

$$B_p = \frac{1}{2} \tilde{B}_{ik} e_{ikp}$$

$$\stackrel{=0}{! \rightarrow} e_{\underline{ikl}} e_{\underline{pqr}} =$$

6 порядка

$l=r$

$$e_{ikl} e_{pql} = \delta_{ip} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{il} \\ \delta_{kl} & \delta_{kl} & \delta_{kl} \end{vmatrix} \dots = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$= 0 \quad \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \\ \delta_{lp} & \delta_{lq} & \delta_{lr} \end{vmatrix}$$

$$e_{321} e_{213}$$

$$e_{123} e_{123} = 1 = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix}$$

перест.
индексов

$$\begin{aligned} & \dots - \delta_{iq} \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{il} \\ \delta_{kp} & \delta_{kl} \end{vmatrix} \\ & + (\delta_{el}) \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \\ & = \begin{vmatrix} \delta_{iq} & \delta_{ip} \\ \delta_{kq} & \delta_{kp} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\ & + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$e_{ikl} e_{pqe} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} = \delta_{ip} \delta_{kq} - \delta_{iq} \delta_{kp}$$

$$e_{i\overline{kl}} e_{p\overline{kl}} = \delta_{ip} \delta_{kk} - \delta_{ik} \delta_{kp} = 3\delta_{ip} - \delta_{ip} = 2\delta_{ip} = e_{\overline{kl}i} e_{\overline{kl}p}$$

$$\frac{1}{2} e_{i\overline{kl}} \tilde{B}_{ik} = \frac{1}{2} \boxed{e_{i\overline{kl}}} \left(\boxed{e_{ik\overline{q}}} B_{\overline{q}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 \delta_{eq} B_q = B_e$$

1 порядок
l-контр.

$$\overleftarrow{A}, \overleftarrow{B}$$

$$\boxed{\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.}$$

$(A_{ik}), (B_{lm})$ — матрицы

$N=3$:

$$\epsilon_{ikl} A_{i1} A_{k2} A_{l3} = \det A. (*)$$

$$\epsilon_{ikl} A_{ip} A_{kq} A_{lr} = \begin{cases} \det A & \text{если } p=1, q=2, r=3 \\ \dots \end{cases}$$

3 порядка

$$\epsilon_{pqr} \det A.$$

$$\det A \cdot \det B = \underbrace{\det A \cdot e_{ikl}}_{\text{}} B_{i1} B_{k2} B_{l3} =$$

$$= e_{xyz} \underbrace{A_{xi} A_{yk} A_{zl}}_{(A \cdot B)_{x1}} B_{i1} B_{k2} B_{l3} =$$

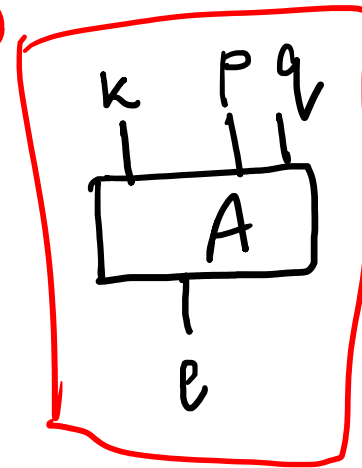
$$= e_{\underline{x}\underline{y}\underline{z}} (A \cdot B)_{\underline{x}1} (A \cdot B)_{\underline{y}2} (A \cdot B)_{\underline{z}3} = \det(A \cdot B).$$

Контрвариантные объекты: $\frac{A^{kl}}{\quad}$

Ковар. — — — : $\frac{A_{kl}}{\quad}$

$$\boxed{A^k \quad P^q \quad \textcircled{e}} \cdot B^{m(\textcircled{e})}$$

Диаграмма (Петроуза):



Объекты

Тензоры в
физике

$$A_i = S_{ij} A_j'$$



$$T_{ijk} = S_{ip} S_{jq} S_{kr} T'_{pqr}$$

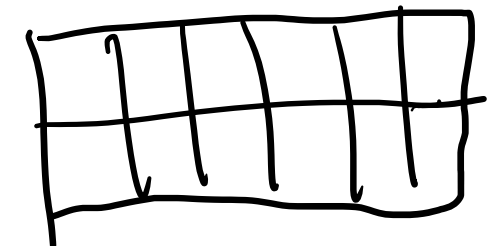
$$(T')^m_i (\bar{L})^k_j = T^i_k \bar{L}^m_j$$

→ в нашем курсе
Торрешников "Основы
алгебры"

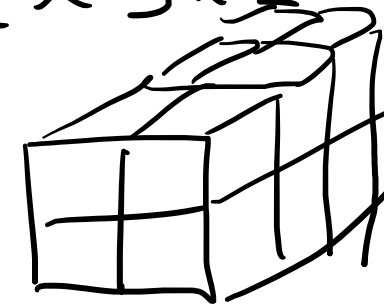
многомерные
таблицы

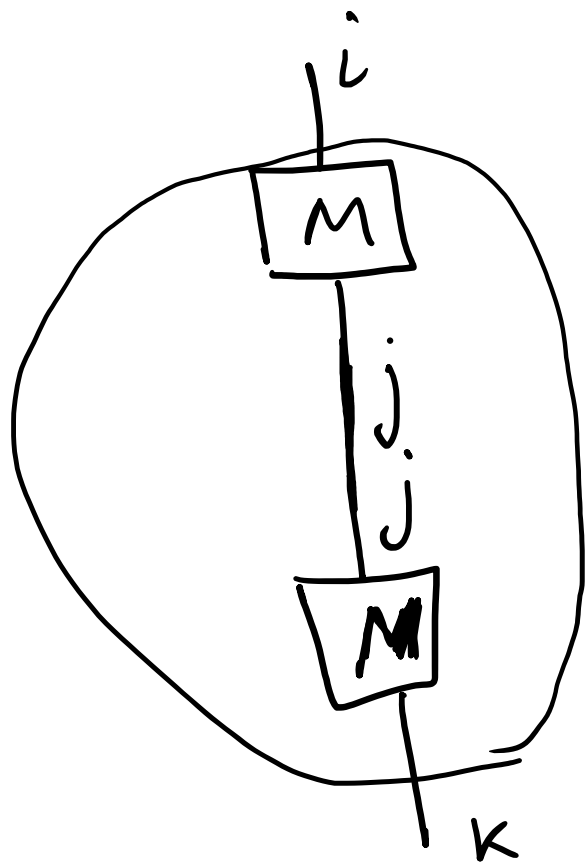
"форма тензора"

2x6



← 2x3x2





- матрица ~~M_{ij}~~ M^i_j

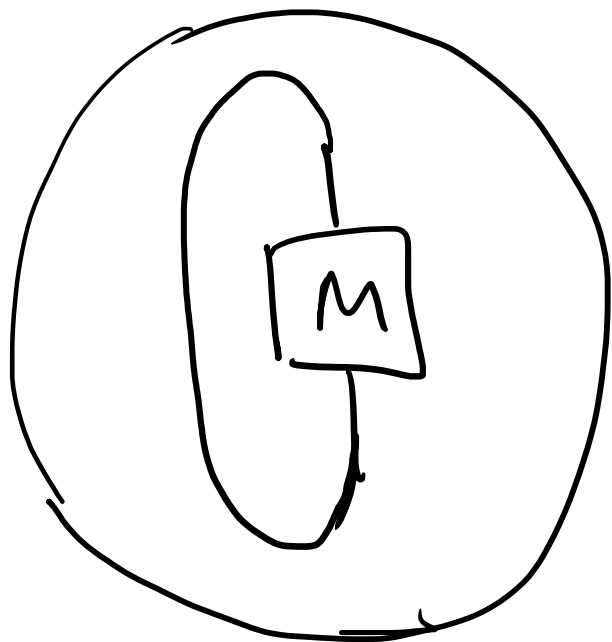
- матрица N^j_k

$$(M \cdot N)^i_k = M^i_j N^j_k$$



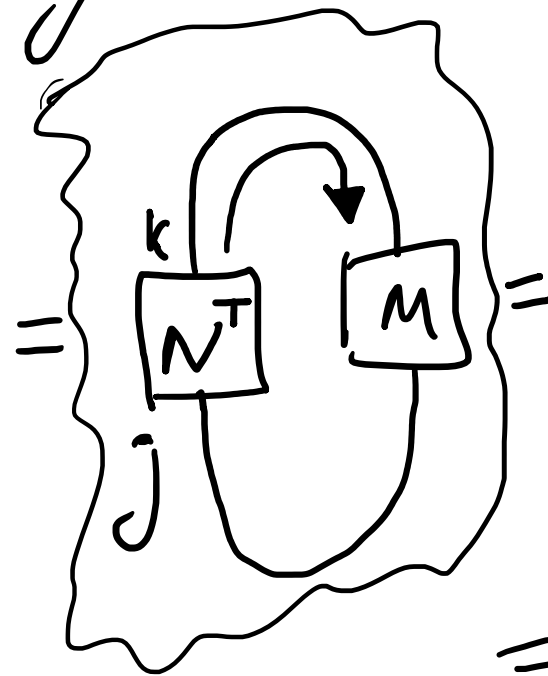
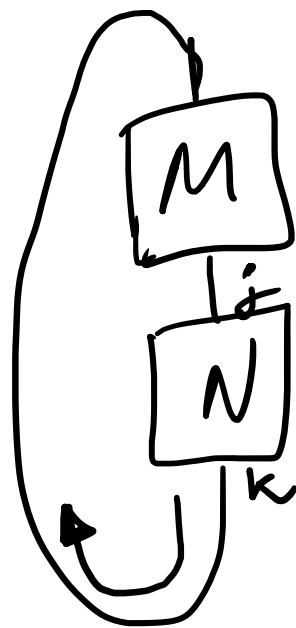
2 порядка

$$\text{tr } M = M^i_i$$

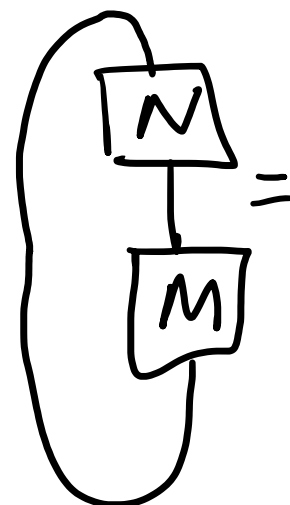


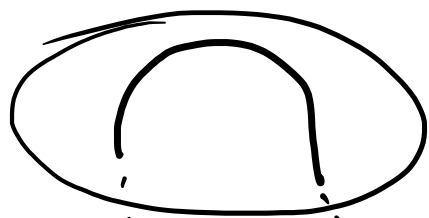
— объект нулевого порядка

$$\text{tr}(M \cdot N) =$$

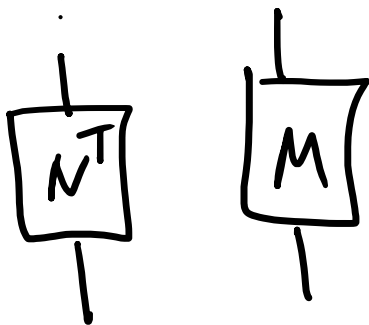


$$= \text{tr}(N \cdot M)$$

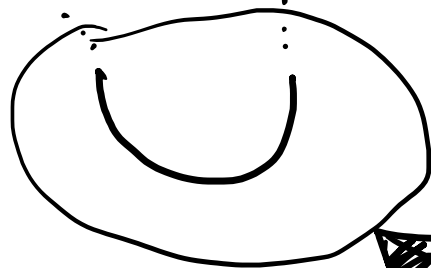




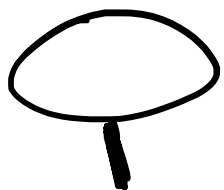
— тензор 2 порядка.
 $\langle \psi_+ |$



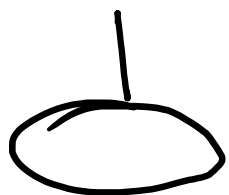
$$\langle \psi_+ | N^T \otimes M | \psi_+ \rangle = \text{tr}(MN)$$



— тензор 2 порядка.
 $\sum_i |i\rangle \langle i| = |\psi_+\rangle$



$\langle \dots |$ бра вектор



$|\dots\rangle$ — ket-вектор.