Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ -: 2–59
УДК: 621.320
http://ipo.spb.ru/journal
doi:10.1000/182

КОМПЬЮТЕР КАК НОВАЯ РЕАЛЬНОСТЬ МАТЕМАТИКИ: IV. ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА

Н. А. Вавилов
СПбГУ

Аннотация

В этой части я продолжаю обсуждать роль компьютера в современных исследованиях по аддитивной теории чисел. Здесь будет рассказано об окончательном решении тернарной = нечетной проблемы Гольбаха не в асимптотических переформулировках XX века, а в *исходной* формулировке XVIII века. Речь идет об утверждении, что *каждое* нечетное натуральное число $n > 5$ можно представить как сумму $n = p_1 + p_2 + p_3$ трех натуральных простых. Решение этой проблемы было завершено только Харальдом Хельфготтом в 2013–2014 годах и не могло бы быть получено без использования компьютеров. В настоящей статье задокументирована история этой классической задачи и ее решения, в частности, указывается на огромное количество имеющихся в литературе исторических ошибок. Кроме того, обсуждаются статус бинарной = четной проблемы Гольдбаха, частичные результаты в направлении ее решения, и некоторые близкие задачи.

Ключевые слова: *проблема Гольдбаха, метод Бруна—Шнирельмана, константа Шнирельмана, метод Харди—Литтлвуда—Виноградова,*

Цитирование: Н. А. Вавилов Компьютер как новая реальность математики // Компьютерные инструменты в образовании, 2020. № -. С. 2–59 .

Благодарности: *Настоящая статья возникла в процессе работы над грантом РФФИ 19-29-14141.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Замечательная книга Хуа Локена “Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел” открывается следующей фразой: “История аддитивной теории чисел начинается с двух высказываний, которые в дальнейшем стали называться проблемами Гольдбаха и Варинга”, [104]

В *маргиналии* к адресованному Леонарду Эйлеру письму 1742 года [187] — которое в 1843 году опубликовал правнук Эйлера Павел Николаевич фон Фусс [186] — Кристиан Гольдбах высказал предположение, ставшее впоследствии знаменитым как **гипотеза Гольдбаха** — хотя, как выяснилось в 1908 году, часть этого утверждения, относящуюся к *нечетным* числам, сформулировал Рене Декарт ровно за век до Гольдбаха[1].

[1] Или даже всю гипотезу? Вот какую запись Шарль Адам и Поль Таннери обнаружили в его бумагах: “sed & omnis numerus par fit ex uno vel duobus, vel tribus primis”, [163], p. 298.

• **Нечетная проблема Гольдбаха**. Каждое нечетное натуральное число $n > 5$ можно представить как сумму *трех* натуральных простых.

На это Эйлер [181] почти сразу ответил, что он ничуть не сомневается в справедливости даже следующего *гораздо* более сильного утверждения, хотя у него и не получилось пока его строго доказать.

• **Четная проблема Гольдбаха**. Каждое четное натуральное число $n > 2$ можно представить как сумму *двух* натуральных простых.

Сформулированные Декартом и Эйлером нечетная и четная проблемы Гольдбаха также часто называются **тернарной проблемой Гольдбаха** и **бинарной проблемой Гольдбаха**, соответственно.

Одним из самых замечательных достижений математики предшествующего десятилетия было *полное* решение Харальдом Хельфготтом в 2013–2014 годах [212–216] *нечетной* проблемы Гольдбаха в *исходной* формулировке — а не в какой-то из асимптотических переформулировок XIX–XX веков, о которых пойдет речь ниже. Иными словами, он доказал, что *абсолютная* константа Шнирельмана s не превосходит 4 и равна 3 для нечетных чисел, т.е. каждое нечетное число $n > 5$ действительно является суммой [не более/ровно] трех простых. К успеху здесь привело сочетание двух факторов.

• С одной стороны, Хельфготт пересчитал *from scratch* и с явными константами все асимптотики в методе Харди—Литтлвуда—Виноградова, фактически перезапустил *огромный* фрагмент **аналитической теории чисел**[2].

• С другой стороны, как и в случае остальных классических проблем аддитивной теории чисел, это решение не могло бы быть получено без самого существенного использования компьютеров.

В то же время, *четная* проблема Гольдбаха — как и остальные проблемы Ландау — все еще не решена не только в исходном смысле $s = 2$ для четных чисел, но даже в строго понимаемом асимптотическом смысле $S = 2$ для четных чисел — всех, начиная с некоторого места. В исходной же абсолютной формулировке она представляет собой *широко* открытую проблему.

Очевидное, хотя и редко упоминаемое в этом контексте отличие проблемы Гольдбаха от проблемы Варинга состоит в том, что простых чисел очень много. *Гораздо* больше, чем квадратов натуральных чисел, не говоря уже про высшие степени. Поэтому, *казалось бы*, проблема Гольдбаха должна быть проще проблемы Варинга — проще даже, чем выражение чисел суммами квадратов.

В проблеме Варинга приходится тщательно различать константы $g(k)$, $G(k)$, $G^+(k)$. Однако два или три слагаемых, это очень мало слагаемых. Это значит, что все три гипотетических аромата константы Шнирельмана s, S и S^+ должны совпадать, что не дает возможности поджимать s снизу посредством S, как это делалось в проблеме Варинга. Кроме того, простые числа распределены гораздо менее регулярно и интервалы между двумя соседними простыми могут быть сколь угодно велики. Дополнительная алгебраическая структура, которой обладают степени, и их

[2]Мы перечисляем некоторые замечательные новые идеи его подхода в § 8. Однако для любого более детального понимания их контекста и того, за счет чего удалось улучшить предыдущие результаты на *многие сотни* порядков, необходимо читать тексты самого Харальда [214, 217] и, в особенности, его книгу, [216] и последующие версии, выложенные на `https://webusers.imj-prg.fr/~harald.helfgott/anglais/book.html`

предсказуемое распределение делают проблему Варинга несколько проще, чем она должна была бы быть априори.

В настоящей работе рассказано об историческом, культурном и математическом контексте проблем Гольдбаха, основных результатах, полученных в направлении их решения с помощью различных методов — методов решета, аддитивной комбинаторики, кругового метода, метода тригонометрических сумм и т.д. Мы обсуждаем основные моменты решения Хельфготтом нечетной проблемы Гольдбаха и, в соответствии с общим замыслом этой серии статей, особенно детально именно РОЛЬ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ в этом решении.

Я *не верю*, что НЕЧЕТНАЯ ПРОБЛЕМА ГОЛЬДБАХА МОГЛА БЫ БЫТЬ РЕШЕНА БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРОВ. Дело в том, что как метод Бруна—Шнирельмана, так и метод Харди—Литтлвуда—Виноградова носят *асимптотический* характер, с помощью них можно доказать представимость в виде ограниченного количества простых слагаемых достаточно больших натуральных чисел. Для *маленьких* чисел необходима непосредственная проверка case by case. Разумеется, для фактического решения проблемы полезно, чтобы эти маленькие числа действительно были доступны нашим сегодняшним инструментам, т.е. не $< 10^{10^{10}}$ или даже $< 10^{600}$, а хотя бы $< 10^{30}$, как у Хельфготта.

Замечу, что лишь один из *небольших*[3] вычислительных фрагментов решения — после всех замечательных улучшений асимптотической теории, полученных Хельфготтом! — даже в самом *простейшем* варианте требовал построения цепочки из нескольких миллиардов простых чисел с последовательными разностями $< 4 \cdot 10^{18}$. Даже если эта часть и могла бы *чисто теоретически* быть проведена вручную, уже она потребовала бы согласованных усилий нескольких сотен квалифицированных вычислителей в течение десятков лет. Ясно, что никто не стал бы даже рассматривать возможность вложения такого рода ресурса — не говоря уже о предыдущем шаге, проверке вручную четной гипотезы Гольдбаха до $4 \cdot 10^{18}$

Разумеется, прелесть математики в том и состоит, что нам обычно удается найти такой способ рассуждений, при котором результат, исходно требовавший значительных усилий, становится *очевидным*. Совершенно нельзя исключать, что завтра, или через 20 лет, или через 100 лет, или через 500 лет, такого рода могущественные простые идеи будут предложены и в аддитивной теории чисел. Но *сегодня* мы не имеем никакого понятия, как такие идеи могли бы выглядеть, и как в такого рода задачах обойтись без массивных вычислений.

Я начал работать над этой статьей в августе 2020, одновременно с [12]. Но систематически разобраться в литературе по проблеме Гольдбаха оказалось гораздо более трудным делом, чем сделать то же самое для проблемы Варинга. Все исторические сведения здесь оказались еще более подвержены деформациям, связанным с историческ-кой конъюнктурой, недомолвкам, искажениям, передергиваниям и ПРЯМЫМ МИСТИФИКАЦИЯМ.

С тем, решил ли Иван Матвеевич Виноградов в 1937 году проблему Гольдбаха, и кто какими словами при какой оказии высказывался по этому поводу, как раз все понятно. Этот аспект подробно обсуждает Владимир Андреевич Успенский [92]. С тем когда,

[3]Как замечает сам Харальд, *сегодня* компьютерную проверку до $< 10^{27}$, т.е. до того места, начиная с которого работают его асимптотические методы, можно провести на бытовом компьютере за уикенд. Но, разумеется, по модулю результатов работы [271], что на бытовом компьютере за уикенд уже не проделаешь. Подробнее см. § 8.

кто и с какими оценками эффективизировал доказательство Виноградова, разобраться труднее (и чтобы восстановить какие-то нюансы заведомо нужен доступ к архивам), но тоже возможно. И там и там речь идет о *сознательных* экзажерациях и умолчаниях, предпринятых с абсолютно прозрачными целями[4].

Гораздо опаснее систематические делюзии и мифы, источники и причины которых, трудно отследить. Например, с детства все мы слышали, будто Лев Генохович Шнирельман доказал в 1930 году, что *абсолютная* константа Шнирельмана s не превосходит 800000. Эта байка сообщается в Большой Советской Энциклопедии, в Большой Советской Википедии, в книге Куранта и Роббинса “Что такое математика?” [56] и т.д. Вплоть до — хотя и в чуть более аккуратной форме — книги Гельфонда и Линника [28].

На самом деле не только сам Шнирельман, но и кто-либо другой в те годы не доказывал, и не мог, видимо, доказать ничего подобного. Более того, сам Шнирельман не публиковал даже никаких оценок *асимптотической* константы Шнирельмана S, хотя это он как раз сделать мог бы. Первая *попытка* оценить константу Шнирельмана была предпринята Николаем Павловичем Романовым в 1935 году, а первая правильная *опубликованная* оценка *асимптотической* константы Шнирельмана $S \leq 71$ была получена Хейльбронном, Ландау и Шерком [210]. Ну а первые оценки *абсолютной* константы Шнирельмана были получены только в середине 1960-х годов и они были гораздо хуже, чем $s \leq 800000$.

Собственно, сама оценка $S \leq 800000$ возникла в результате *опечатки*. Вместо того, чтобы *разделить* 400000 из работы Романова [83] на 2, Любельский в своем реферате в Zentralblatt *умножил*[5] 400000 на 2. Я пришел в ужас, когда осознал, что ВСЯ ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ примерно так и НАПИСАНА — не в духе настоящей истории, а В ДУХЕ ГЕРОИЧЕСКОГО ЭПОСА — и что исправить это, очевидно, невозможно. Сколько бы раз ни повторить, что Шнирельман ничего такого не доказывал, в том числе и в примечаниях к [56], всегда найдется кто-то, кто сошлется на какое-то старое издание, откуда это попадет в очередное переиздание Википедии.

Как и в [12, 13] мой основной фокус состоит в том, чтобы объяснить — насколько это возможно в популярном тексте общего характера — принципиальную математическую сторону дела, почему я считаю, что окончательные результаты не могли бы быть получены без помощи компьютеров, и почему я уверен в том, что этот материал нужно использовать в преподавании математики на всех уровнях. Но в силу необходимости (ненадежность, прямые ошибки и вранье во всех имеющихся источниках), здесь я вынужден уделить гораздо больше внимания собственно историческим аспектам. Некоторые вещи хороши для какой-то цели, другие сами по себе, но истина хороша тем, что она делает нас свободными (Ин. 2:32).

В некотором смысле, я оказался здесь в привилегированном положении. Дело в том, что начиная со школьных лет я близко общался с одним из абсолютно центральных протагонистов всей этой эпопеи, Николаем Григорьевичем Чудаковым, и слышал от него много обстоятельств и оценок, которые теперь, вместе с прочитанным, сложились

[4]Более того, у меня нет большого желания как-то морализировать по этому поводу. Примерно до 1990-го года все равно не было надежды решить проблему Гольдбаха в каком-либо ином смысле, чем это сделал в 1937 году Виноградов. Хотя, конечно, корректнее было бы не подменять исходную формулировку, а честно признавать, что решить проблему Гольдбаха мы пока не можем.

[5]Впрочем, сам Романов проделывает примерно такое же упражнение с 200000. Из его статьи непонятно, считает ли он, что Шнирельман мог бы *при желании* получить своим методом оценку $S \leq 100000$, как он пишет вначале, или $S \leq 400000$, как можно заключить из последующего текста. В любом случае и то и другое чисто фигуры речи.

для меня в некоторую психологически цельную картину. Так что мне оставалось только правдиво, в меру сил, в соответствии с тем, как я их помню и понимаю, записать эти вещи: “описывай, не мудрствуя лукаво, все то, чему свидетель в жизни будешь”.

Я начинал с тех же общих источников, которые указаны в других частях, но именно здесь обнаружил, что даже основные классические тексты содержат серьезные ошибки и упрощения. Если говорить о доклассическом периоде, я в основном опирался на книги Леонарда Диксона [170] и Владыслава Наркевича [264, 265][6] (хотя основные тексты, разумеется, прочел сам). Если говорить о классическом периоде, то это оригиналы статей авторов того времени, в первую очередь Харди, Литтлвуда, Шнирельмана, Ландау, Виноградова и Чудакова. В том, что касается собственно современного развития, в первую очередь тексты самого Харальда Хельфготта [212–216]. Отмечу также чрезвычайно интересный историко-философский текст Хавье Эчеверриа [174], где собрано большое количество материала по ранней истории и *экспериментальному* подтверждению гипотезы.

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМ ГОЛЬДБАХА

В этом параграфе я приведу отрывки из писем Гольдбаха и Эйлера, в которых сформулированы исходные гипотезы, и намечу некоторые моменты дальнейшей жизни этих гипотез после Ландау и Гильберта.

2.1. Исходная формулировка проблемы Гольдбаха

Нечетная и четная проблема Гольдбаха были до некоторой степени сформулированы в июне 1742 года, в письме Гольдбаха и в ответе Эйлера. Контекст и текст этих писем настолько интересны для истории России и истории математики, что я рекомендую прочесть их *полностью* — причем не в издании Фусса, на которое я здесь ссылаюсь, где сохранена только математическая составляющая, а все даже очень осторожные упоминания об окружающих обстоятельствах опущены.

Безмерно интересен и сам *язык* этих писем, который представляет собой идиосинкратический немецко-латинский пиджин, где все значащие слова латинские, а все служебные — немецкие: “ein aggregatum trium numerorum primorum sey”. При этом, поразительным образом, этот несуществующий язык полностью, *до слова*, понятен — даже понятнее той латыни с немецкой грамматикой, на которой они писали свои статьи. Читая эти письма я живо представил, что они вот так и разговаривали между собой в Петербургской Академии Наук, вставляя иногда русские слова для большей выразительности.

Вот совсем коротко *непосредственный* контекст этих писем. В годы, предшествующие воцарению Елизаветы, Эйлер и Гольдбах *внезапно* почувствовали себя в Петербурге крайне неуютно. В результате за год до этих писем, в июне 1741 года, Леонард Эйлер, Kind und Kegel[7], оставил Россию и переехал в Берлин. Кристиан Гольдбах в

[6] Книги Наркевича являются ближайшей современной аппроксимацией к книгам Диксона. Вот что пишет Ангел Кумчев в рецензии на [265]: “While it is unlikely that we will ever see version 2.0 of L. E. Dickson’s classic “History of the theory of numbers”, the present volume comes close if one restricts one’s attention to certain parts of number theory. Про Диксона и Наркевича я *уверен*, что они сами читали все, что цитируют — как и про Чудакова. Про более поздних авторов — далеко не всегда.

[7] Старшему из пятерых сопровождавших его в этом экзодусе детей, Иоганну Альбрехту, было на тот момент 6.5 лет.

марте 1742 года так и вовсе переехал в Москву начальником *Черного Кабинета*[8] в Коллегию иностранных дел Российской Империи. Чтобы поставить эту переписку в более широкий шпенглеровский контекст, можно вспомнить, что именно в 1741 году Иоганн Себастиан Бах опубликовал часть своего Clavier-Übung, известную как Goldberg-Variationen (BWV 988). Что, конечно, дало потом возможность острословам компонировать Goldbach-Variationen[9].

То, что потом было истолковано как проблема Гольдбаха, содержится в письме Гольдбаха Эйлеру [187] (Москва, 7 июня 1742 года), в маргиналии на стр.127. Однако и сам окружающий текст настолько интересен, что я вопроизведу его здесь.

Начинается эта страница со следующего наблюдения общего характера [почти] на немецком: “Ich halte es nicht für undientlich, dass man auch diejenigen propositiones anmerke, welche sehr probabiles sind, ohngeachtet es an einer wirklichen Demonstration fehlet, denn wenn sie auch nachmals falsch befunden werden, so können sie doch zu Entdeckung einer neuen Wahrheit Gelegenheit geben.”[10]

В качестве такого примера Гольдбах упоминает гипотезу о простых числах Ферма, опровергнутую Эйлером. После этого он формулирует *свою* гипотезу: “Auf solche Weise will ich auch eine conjecture hazardieren: dass jede Zahl, welche aus zweyen numeris primis zusammengesetzt ist, ein aggregatum so vieler numerorum primorum sey, als man will (die unitatem mit dazu gerechnet), bis auf die congeriem omnium unitatum; zum Exempel”[11]

$$4 = 1+3 = 1+1+2 = 1+1+1+1, \qquad 5 = 2+3 = 1+1+3 = 1+1+1+2 = 1+1+1+1+1,$$
$$6 = 1+5 = 1+2+3 = 1+1+1+3 = 1+1+1+1+2 = 1+1+1+1+1+1, \qquad \text{etc.}$$

Теперь, когда мы знаем *настоящую* гипотезу Гольдбаха, можно взглянуть на левое поле письма[12], где дописана следующая маргиналия: “Nachdem ich dieses wieder durchgelesen, finde ich, dass sich die conjecture in summo rigore demonstrieren lässet in casu $n+1$, si successerit in casu n, et $n+1$ dividi possit in duos numeros primos. Die Demonstration ist sehr leicht. Es scheinet wenigstens, dass eine jede Zahl, die grösser ist als 1[13], ein aggregatum trium numerorum primorum sey.”[14]

[8] *Schwarzes Cabinet* или *Cabinet noir*, служба перлюстрации и дешифровки корреспонденции, примерно то же, что *Black Chamber*, `https://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/chamberguide.html`, не путать с *camera oscura* или *black room*.

[9] `https://maikhester.net/index.php/musiker/kompositionen/50-goldbach-variationen-fuer-kammerorchester`.

[10] “Мне не кажется бесполезным записывать даже те предложения, которые весьма вероятны, независимо от того, что у них нет настоящего доказательства, потому что, даже если потом выяснится, что сами они ошибочны, они, тем не менее, могут дать повод к открытию новой истины.”

[11] “Таким же образом я тоже рискну высказать гипотезу: каждое число, *которое составлено из двух простых*, будет суммой произвольного числа простых чисел (включая сюда единицу), до тех пор, пока не останутся только единицы, например …”

[12] Целиком эта страница письма воспроизведена, например, в книге Юшкевича и Копелевич [109], с.171, а также в `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Letter_Goldbach-Euler.jpg`, в итальянском переводе романа Доксиадиса [171], с.96, и во многих других источниках.

[13] Именно так в издании 1843 года, подготовленном правнуком Эйлера Павлом Николаевичем фон Фуссом, [186]! В книге Дирка Хоффманна [223], S.123, после слов “Seine These verbirgt sich in einer hastig formuleirter Randnotiz”, воспроизведена в более крупном разрешении собственно *маргиналия* Гольдбаха, где хорошо видно, что слова “die grösser ist als 1” дописаны вообще без пробелов *под* строкой, потом 1 там заменено на 2, а потом снова на 1.

[14] “После того, как я это снова перечитал, я заметил, что эту гипотезу можно строго доказать для $n+1$, если она справедлива для n, и $n+1$ можно разбить на два простых. Доказательство очень просто. По крайней мере, *казалось бы*, что каждое число большее 1 должно быть суммой трех простых чисел.” По поводу

На самом деле, как уже упоминалось во введении, это последнее предположение было сформулировано Декартом за век до того. Не менее знаменателен и ответ Эйлера [181] (Берлин, 30 июня 1742 года), середина страницы 135: “Dass eine jegliche Zahl, welche in zwey numeros primos resolubilis ist, zugleich in quot, quis voluerit, numeros primos zertheilt werden könne, kann aus einer Observation, so Ew. vormals mit mir communicirt haben, dass nehmlich ein jeder numerus par eine summa duorum numerorum primorum sey, illustrirt und confirmirt werden. Denn, ist der numerus propositus n par, so ist er eine summa duorum numerorum primorum, und da $n-2$ auch eine summa duorum numerorum primorum, so ist n auch eine summa trium numerorum primorum, und auch quatuor u.s.f. Ist aber n ein numerus impar, so das ist derselbe gewiss eine summa trium numerorum primorum, weil $n-1$ eine summa duorum ist, und kann folglich auch in quotvis plures resolvirt werden. Das aber ein jeder numerus par eine summa duorum primorum sey, halte ich für ein ganz gewisses theorema, ungeachtet ich dasselbe nicht demonstriren kann.”[15]

Больше всего этот язык напомнил мне мумбайский пиджин, который позволяет свободно общаться местным жителям (говорящим на маратхи) с гостями города (говорящими на хинди). Он устроен следующим образом. Слова общие между хинди и маратхи сохраняются как есть. Различающиеся слова заменяются на английские. Вот как звучит типичная фраза на этом языке: “ek foreigner, do Indians”. Вот именно на таком языке Гольдбах и Эйлер между собой и общались!

Самое забавное состоит в следующем. В книге Варинга “Meditationes Algebraicae” как в издании 1770 года, так и в издании 1782 года содержится следующая формулировка четной и нечетной проблем Гольдбаха: “Omnis par numerus constat e duobus primis numeris, & omnis impar numerus vel est primus numerus, vel constat e tribus primis numeris, & c.”, [361], p.379. Как видно из следующей формулы, Варинг считает 1 простым числом, поэтому никакой ошибки здесь нет, все значит все! Но вот что значит его “и так далее”?

Исходя из этого не только Олри Теркем[16], и Эжен Каталан в 1855 году, но и Эдуар Люка чуть ли не до 1896 года приписывали формулировку проблемы Гольдбаха Варингу! Чрезвычайно интересен *контекст*, в котором проблема Гольдбаха попадает в фокус внимания. В 1855 году Олри Теркем и Камилль-Кристоф Жероно публикуют в “Nouvelles Annales de Mathématiques” список из четырех нерешенных математических проблем:

- “Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers;
- “Tout nombre pair est la différence de deux nombres premiers”;

перевода последней фразы замечу, что я не знаю, различал ли сам Гольдбах формы “es scheint” и “es scheinet”. *Сегодня* “es scheinet” не является нормативным немецким, но в разговоре обе формы возможны и различие между ними очевидно любому носителю языка: es scheint = кажется, es scheinet = казалось бы.

[15]“То, что любое число, которое можно представить как сумму двух простых чисел, можно разбить и на любое желаемое количество простых чисел, можно вывести из того наблюдения, которое Вы мне только что сообщили, а именно, что каждое четное число есть сумма двух простых чисел. В самом деле, если предложенное число n четное, то оно является суммой двух простых чисел, но тогда и $n-2$ является суммой двух простых чисел, так что n является также суммой трех простых чисел, а также четырех и т.д. Если же n нечетное, то оно само несомненно является суммой трех простых чисел, в то время как $n-1$ является суммой двух, и следовательно его тоже можно разложить в любое их количество. То же, что любое четное число должно быть суммой двух простых, я рассматриваю как совершенно несомненную теорему, несмотря на то, что у меня не получается ее доказать.”

[16]Разумеется, здесь имеется в виду знаменитый полимат Олри Теркем (1782–1862), основатель первого журнала по истории математики “Bulletin de Bibliographie, d’Histoire et de Biographie de Mathématiques”, а не его племянник палеонтолог Реусс Олри Теркем (1797–1886). Впрочем, еще больше Теркем знаменит своими “modest proposals” на тему реформы иудаизма: перевод богослужения на французский, перенос субботы на воскресенье, полный запрет обрезания и т.д.

- "Tout nombre est la somme de neuf cubes entiers positifs au plus";
- "Tout nombre est la somme de dix-neuf bicarrés entiers positifs au plus";

то, что сегодня известно как [четная] проблема Гольдбаха, **проблема Полиньяка** и проблемы Варинга для кубов и биквадратов, соответственно.

При этом они прямо указывают на связь этих задач с постулатом Бертрана, асимптотическим законом распределения простых и работами Чебышева! Хавье Эчеверрия [174] отмечает чисто шпенглеровское совпадение, работы Каталана и Дебова появляются в том же 1855 году. Следующий такой узловой для проблемы Гольдбаха год — 1896.

2.2. Дальнейшая история проблемы Гольдбаха

На ICM 1900 в Париже Гильберт [222] сформулировал 23 проблемы (и не сформулировал еще одну, 24-ю проблему). Наряду с гипотезой Римана *четная* гипотеза Гольдбаха и проблема близнецов — а в действительности более общая гипотеза, которую мы сейчас напомним — являются частью **восьмой проблемы Гильберта**. При этом в качестве своих источников по проблеме Гольдбаха Гильберт ссылается на работу Штекеля 1896 года [320] и работу Ландау 1900 года [233].

В действительности, Гильберт [222] высказал даже следующую гораздо более общую гипотезу, которая утверждает, что диофантово уравнение $ax + by + c = 0$, где a, b, c попарно взаимно простые, всегда имеет решение в простых числах[17]. В отличие от большинства остальных проблем Гильберта, на сегодня (2021 год) ни одна из частей восьмой проблемы Гильберта не решена.

На ICM 1912 в Кембридже Эдмунд Ландау [234] сформулировал четыре относящиеся к простым числам проблемы, которые он охарактеризовал как "beim gegenwärtigen Stande der Wissensehaft unangreifbar". Эти четыре проблемы часто упоминаются как **проблемы Ландау**:

- Четная гипотеза Гольдбаха.
- Гипотеза близнецов.
- Гипотеза Лежандра: верно ли, что между n^2 и $(n+1)^2$ всегда лежит простое число?
- Бесконечно ли количество простых вида $n^2 + 1$?

Сегодняшний статус проблем Ландау описан в статье Пинца, [279].

Четная гипотеза Гольдбаха, в силу простоты и доступности своей формулировки, имеет все шансы занять место теоремы Ферма в популярной культуре — у гипотезы Римана таких шансов гораздо меньше!

Про проблему Гольдбаха, как и про теорему Ферма, уже пишутся романы и снимаются фильмы. В романе Апостолоса Доксиадиса "Дядя Петрос и проблема Гольдбаха" [35], эта задача упомянута прямо в названии. Отдельно доставляет написание фамилии Гольдбаха по-новогречески, Γκόλντμπαχ. Впрочем, в 1998 году сам автор перевел роман на английский и все переводы на дальнейшие языки осуществлялись уже с этого текста, а не с греческого оригинала 1992 года.

[17] Так в тексте!! Гильберт не упоминает очевидное необходимое условие $a + b + c \equiv 0 \pmod 2$. Но там и все вокруг написано в таком же сугубо разговорном жанре, например, сама проблема Гольдбаха звучит так: "...ob jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen darstellbar ist."

По-английски роман Доксиадиса завершается эпитафией: “Every even number greater than 2 is the sum of two primes”[18]. В качестве рекламной акции, англоязычные издатели (Bloomsbury USA в США и Faber and Faber в Британии), предложили награду в один миллион долларов любому, кто сумеет доказать гипотезу Гольдбаха в течение двух лет после издания книги 2000 года “до полуночи” 15 марта 2002 года и опубликовать это решение в уважаемом математическом журнале “до полуночи” 15 марта 2004 года [19]

Следующая симпатичная задача — подразумевавшееся жюри решение которой опиралось на справедливость гипотезы Гольдбаха! — предложена Сергеем Волчёнковым [78].

Задача. Разбейте натуральные числа от 1 до n на минимальное количество групп, сумма каждой из которых является простым числом.

Еще один забавный контекст, где возникает проблема Гольдбаха — **кристаллографическое условие**, т.е. порядки поворотных осей кристаллов в различных размерностях, см., например, [112].

2.3. Верить в наше время нельзя никому

В процессе подготовки настоящей статьи я посмотрел формулировки проблемы Гольдбаха в *нескольких десятках* математических и историко-математических текстов. *Ни в одном* из них приведенный выше фрагмент не воспроизводится полностью без грубых искажений.

В тексте Юшкевича и Копелевич [109], с.170–171, имеет место если не прямой подлог, то *серьезное* передергивание. Там этот фрагмент цитируется следующим образом: “Таким образом, я хочу решиться высказать предположение… каждое число большее, чем 2, есть сумма трех простых чисел.” Между тем, как мы видели, в тексте *в этом месте* высказывается совершенно другое предположение. А собственно гипотеза про сумму трех простых высказана на полях и предваряется фразой: “es scheinet *wenigstens*” = “по-крайней мере казалось бы”.

Но это историки! Можно представить себе, что творится в текстах, написанных математиками! Вот с чего *начинается* классическая статья Харди—Литтлвуда: “It was asserted by Goldbach, in a letter to Euler dated 7 June, 1742 , that *every even number* $2m$ *is the sum of two odd primes*, and this proposition has generally been described as 'Goldbach's Theorem' ”, [200], с.1. А вот что пишет Хуа Локен: “Проблема Гольдбаха была впервые сформулирована в 1742 г. в письме Гольдбаха к Эйлеру. В этом письме Гольдбах высказал две гипотезы относительно представления целых чисел в виде суммы простых”, [104]. Опять же, это

[18]Михаил Левин `https://fantlab.ru/translator16` перевел этот фрагмент так: “Каждое натуральное число большее 2 представляется в виде суммы двух простых чисел.” Из чистого любопытства я посмотрел, как это передано на других языках. “Ogni numero pari maggiore di 2 è la somma di due numeri primi”, “Todo entero par mayor que 2 es igual a la suma de dos primos” — *везде* верно. Впрочем, в русском переводе *все* прекрасно, вплоть до благодарности “Кену Райбету и Кейт Конрад” на последней странице — так переданы имена Ken Ribet и Keith Conrad.

[19]В занятной рецензии [229] Аллин Джексон дает ссылку на правила этого конкурса. Ссылка, конечно, давно утратила актуальность, но об этом можно прочитать чуть подробнее в [110]. Там *много* забавного, и условие, что в конкурсе могут участвовать только резиденты Великобритании и США. И обсуждение того, что рецензент математического журнала может потребовать “to cut the prize money”, чтобы вовремя послать отзыв (русское слово “откат” в смысле “доля” происходит именно отсюда, это калька американского “to cut the money”). На это Алан Бейкер философски замечает: “I don't think the money makes much difference. If people do it, they will do it for the challenge.”

великие классики! Можно представить себе, что творится в текстах, написанных просто классиками!

В предисловии к книге Михаэля Рассиаса [293], специально посвященной проблеме Гольдбаха, Йорг Брюдерн и Преда Михайлеску пишут: “Goldbach, a school teacher in Königsberg[20], had formulated the question in a letter to Euler dated 1742”. Если Гольдбах и был чьим-то школьным учителем, то, боюсь, только российского императора Петра II в 1727–1729 годах. А весной 1742 года переехал, как мы знаем, в Москву начальником *Черного Кабинета* Коллегии иностранных дел.

Я не знаю, кто впервые неправильно интерпретировал слово “vormals” в письме Эйлера Гольдбаху, как указание на наличие *некогда*[21] какого-то *предыдущего* письма, где уже обсуждалась гипотеза Гольдбаха. Естественно предположить, что это был англофон, который истолковал “vormals” как “formerly”. Не исключено, что это мог быть сам Диксон, который пишет “L. Euler remarked that the first conjecture can be confirmed from an observation *previously* communicated to him by Goldbach, that every even number is a sum of two primes”, [170], p.421. Будучи однажды высказанными, особенно в столь авторитетных источниках, подобные мемы далее воспроизводятся сами по себе.

В своей замечательной[22] книге [343] Роберт Вон так описывает историю проблем Гольдбаха: “In *two* letters to Euler in 1742, Goldbach conjectured that every even number is a sum of two primes and every number greater than 2 is a sum of three primes. He included 1 as a prime number, and so in modern times Goldbach’s conjectures have become the assertions that every even number greater than 2 is a sum of two primes and every odd number greater than 5 is a sum of three primes.”

Опасность такого рода заявлений состоит в том, что, поскольку большинство математиков не интересуется историей своей науки, подобные мемы начинают бесконтрольно реплицироваться и сам факт их появления в НАДЕЖНОЙ ССЫЛКЕ является для большинства пользователей вполне УБЕДИТЕЛЬНЫМ ПРУФОМ. Вот, например, с чего начинается книга Михаэля Рассиаса [293]: “In 1742 C. Goldbach, in *two* letters sent to L. Euler, formulated two conjectures. The first conjecture stated that every even integer can be represented as the sum of two prime numbers and the second one, that every integer greater than 2 can be represented as the sum of three prime numbers.” Ясно, что это не мог написать человек, в данном случае имела место ВИРУСНАЯ РЕПЛИКАЦИЯ.

Если так выглядят *серьезные* тексты, то можно себе представить, что творится в большинстве обычных источников учебного и научно-популярного характера! Должен признаться, что мысль о том, что история математики в изложении профессиональных ма-

[20]В статье Игоря Алексеевича Кириллова [43] утверждается, что род Гольдбахов “восходит” к Верховным Магистрам Тевтонского ордена (Ordo fratrum domus hospitalis Sanctae Mariae Teutonicorum in Jerusalem). Мне не совсем понятно, что в контексте католического монашеского ордена могло бы значить слово “восходит”. Список всех Верховных Магистров [des Deutschen Ordens] ab ordine condita (= от основания орды) до наших дней, вместе с портретами, можно посмотреть, например, в `https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Hochmeister_des_Deutschen_Ordens`. Фон Гольдбахов там нет, как и среди других высших руководителей (= Großgebietiger) ордена на федеральном уровне. Действительно, некий Хельвиг фон Гольдбах примерно около года в 1300–1302 годах был *ландмайстером* ордена в Пруссии. Поскольку дело происходило в Кенингсберге, логично предположить, что он действительно приходился каким-то дальним родственником Христиана фон Гольдбаха.

[21]Сам по себе текст письма не дает никаких оснований читать “vormals” как “einst”, “erst”, “eher” или “früher”. Скорее как “vormal” или “vorig” — в *непосредственно предшествующем* письме. Разумеется, чтобы утверждать это определенно, нужно провести лингвистический анализ всех текстов Эйлера, чего я, естественно, не делал.

[22]No joke! Именно из этой книги я впервые понял многие основные идеи, которые в других местах не проговариваются.

тематиков чуть более, чем вся, выглядит хуже, чем Wikipedia, была для меня совершенно новой.

3. РАННИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА

Владыслав Наркевич [265] пишет, что на протяжении более века по проблеме Гольдбаха не было никаких продвижений. Это неудивительно с учетом того, что в книге Варинга проблема вскользь упомянута ближе к концу, а сама переписка Эйлера и Гольдбаха была опубликована только в 1843 году. Так что фактически первые работы по проблеме Гольдбаха были выполнены только в 1855 году.

3.1. Ранние экспериментальные данные

Большинство результатов до 1919–1920 годов носили экспериментальный характер. Так, в 1855 году Адольф Дебов [162] проверил четную гипотезу Гольдбаха для всех $n \le 10^4$. При этом он делает следующее характерное замечание: “Tout nombre pair, excepte 2, est la somme de deux nombres premiers *au moins* de deux manières, et lorsque Ie nombre pair est double d’un nombre impair, iI est toujours simultanément la somme de deux nombres premiers de la forme $4n+1$ et la somme de deux nombres premiers de la forme $4n-1$.”

И действительно, большинство авторов конца XIX и начала XX веков не столько устанавливали *возможность* представления числа как суммы двух простых, как пытались собрать экспериментальные данные, чтобы угадать *асимптотику* для количества таких представлений. Все они исходили из справедливости, как они говорили, “эмпирической теоремы” Гольдбаха. Единственным известным мне исключением является работа Эжена Лионне[23] 1879 года [248], где он приводит теоретико-вероятностные соображения в пользу того, что *четная* гипотеза Гольдбаха неверна: “. . . en géneral les géomètres qui s’en sont occupès, et particulièrement Euler, regardent l’affirmative comme très probable. Nous allons démontrer quelques propositions qui nous semblent plutôt établir la probabilité contraire.”

Среди тех, кто этим занимался, были и довольно неожиданные люди, основные интересы которых, *казалось бы*, довольно далеки от теории чисел. В том числе Джеймс Джозеф Сильвестр [328, 329], 1872 и 1896, и Георг Кантор [133**?**], 1994 и 1996. В действительности, Сильвестр серьезно интересовался неприступными проблемами теории чисел, в частности, в [13] мы уже упоминали его работу по нечетным совершенным числам.

Кантор тоже интересовался теорией чисел — и в особенности “весьма элементарной теоремой Гольдбаха” — более чем серьезно, *чрезвычайно* интересные документы, относящиеся к этой не слишком известной стороне его деятельности, собраны в книге (книгах?) Анн-Мари Декайо [160, 161][24]. В частности, там воспроизводится факсимиле знаменитого доклада Кантора на Конгрессе AFAS 1894 года в Кайене: “II y a environ dix ans, j’ai fait calculer pour tous les nombres pairs de 2 a 1000, une table qui contient toutes les partitions de

[23]Как Адольф Дебов, 1818–1888, так и Эжен Лионне, 1805–1884, были школьными учителями в Париже, первый в Lycée Condorcet, второй в Lycée Louis-Le-Grand. Эжена Лионне сегодня вспоминают и в других контекстах, в связи с задачей о 8 ферзях, основанной им Филотехнической Ассоциацией `https://fr.wikipedia.org/wiki/Association_philotechnique` и т.д.

[24]Обратите внимание, что по-французски и по-немецки эта книга называется *совершенно* по-разному, даже если проигнорировать подзаголовок: “Cantor et la France” vs “Cantor und die Franzosen” — ну да, “die Mathematiker sind eine Art Franzosen”.

ceux nombres en deux nombres premiers.” Совершенно изумительна первая реакция Анри Пуанкаре — “А где вообще Гольдбах опубликовал свою знаменитую эмпирическую теорему? И есть ли какие-то свидетельства в ее пользу?”

Критически важными для привлечения внимания к этой задаче были работы Пауля Штэкеля [320], 1896 и Роберта Хаусснера [202, 203], 1897–1899[25]. Кумулятивно, они затабулировали *все* представления четных n в виде $n = p_1 + p_2$, до $n = 3000$ и *количество* таких представлений до $n \leq 5000$, при этом выяснилось, что количество таких представлений максимально для n делящихся на 3, а относительные максимумы достигаются для n делящихся на 5, 7 и т.д.

Самая простая гипотетическая асимптотика $\pi(n)^2/\varphi(n)$ была предложена Штэкелем [320]. В 1900 году ее опроверг Эдмунд Ландау [233], что и послужило непосредственным основанием для упоминания Гильбертом проблемы Гольдбаха в качестве части его восьмой проблемы. Все остальные предсказания, сделанные по этому поводу Сильвестром, Бруном [125] в 1915 году, Штэкелем [321] в 1916 году, Шахом и Уилсоном [310, 311] в 1919 году опровергли Харди и Литтлвуд [200, 201].

Наркевич [264], с.334, пишет, что в 1903 году Риперт проверил гипотезу до $n < 50816$, но я сам его работы не видел, а работы Пиппинга [282–286], в которых вычисления доведены до $n < 100000$, публиковались еще вплоть до 1940 года. Справедливость гипотезы для нескольких серий больших четных чисел таких как 2^n и, более общо, $2^n m$, где m — маленькое нечетное, проверил в 1906 году Каннингем [158].

Сегодня все эти экспериментальные данные чрезвычайно легко сгенерировать на компьютере буквально за секунды. На сайте `Imaginary`[26] можно найти галлерею Жана-Франсуа Колонна `Pictures of Number Theory` где, в частности, есть картинка `Goldbach comet` или `Goldbach rainbow`, изображающая количество представлений четного числа $n = p_1 + p_2$, для всех $n \leq 411678$.

3.2. Результаты, полученные методом решета

Первый принципиальный прорыв в направлении решения проблемы Гольдбаха принадлежит Вигго Бруну [125–129][27]. Он ТЕСНЕЙШИМ ОБРАЗОМ СВЯЗАН С ПРОГРЕССОМ В НАПРАВЛЕНИИ ПРОБЛЕМЫ БЛИЗНЕЦОВ.

Мелвин Натансон объясняет связь этих задач следующим образом: “There is a structural similarity between the twin prime conjecture and the Goldbach conjecture. The twin prime conjecture states that there exist infinitely many prime numbers p such that $p+2$ is also a prime number or, equivalently, there exist infinitely many integers k such that $k(k+2)$ has exactly two prime factors. The Goldbach conjecture states that every even integer $n > 4$ can be written as the sum of two primes or, equivalently, there exists an integer k such that $1 < k < n-1$ and $k(n-k)$ has exactly two prime factors”, [266].

В самом первом приближении **метод решета** состоит в следующем. Берется какая-то арифметическая прогрессия и из нее выбрасываются (= “отсеиваются”) элементы каких-то других арифметических прогрессий, обычно по простым модулям. Для приложений важно уметь получать хорошие верхние и нижние оценки на количество остающихся

[25] Интересно, что оба они возвращались к этой теме спустя 20+ лет [204, 205, 321].

[26] `https://imaginary.org/gallery/jean-francois-colonna-number-theory`

[27] Во многих местах я видел ссылки на оригинальный *шведский* текст работы [125] и оригинальный норвежский текст работы [129]. Но сам я эти брошюры не нашел и не знаю, отличаются ли они от немецкого и французского переводов.

членов как функций от длины последовательности N и других параметров. В философском смысле это асимптотическая версия **метода включения-исключения**, в которой получаются не точные значения, а оценки сверху и снизу.

• В простейшем известном всем с детства варианте — **решете Эратосфена** — в качестве исходной прогрессии берется начальный интервал натурального ряда от 1 до N и из него отсеиваются все числа, делящиеся на простые от 2 до $\sqrt{N}$. Остаются простые числа от $\sqrt{N}$ до N и их количество оценивается какими-то вариантами асимптотического закона распределения простых.

• В более общем **решете Бруна** исходная прогрессия произвольная, из нее отсеиваются прогрессии, состоящие из чисел с фиксированным вычетом по простым модулям. Причем, вообще говоря, отсеиваются *несколько* прогрессий по данному модулю.

Вот, что пишет по этому поводу Наркевич: “The first attempt to apply the Eratosthenian sieve to the problem of Goldbach was made by J. Merlin [257], who also considered the problem of twin primes, i.e. prime pairs differing by 2. His paper contained only the statements of his assertions and arguments leading to them were published by J. Hadamard [195], since Merlin was killed at the beginning of the First World War[28], but the reasoning presented here is only heuristical. A few years later the paper of Viggo Brun [127] (see [126]) appeared, in which Merlin’s idea obtained the correct form”, [264].

Этим методом Брун, Радемахер и Эстерман доказали, что каждое достаточно большое четное число представляется как сумма двух слагаемых, каждое из которых является произведением не более M слагаемых, где

- $M \leq 9$, Вигго Брун, [126, 127], 1919–1920.
- $M \leq 7$, Ханс Радемахер, [289], 1923.
- $M \leq 6$, Теодор Эстерман, [177], 1932.

Подчеркнем, что все эти результаты, как и дальнейшие упоминаемые нами результаты, полученные методом решета, являются *асимптотическими*.

Метод Бруна излагается во многих местах. Одно из лучших введений для начинающего и неспециалиста содержится в докладе Бернара Тессье [333]. В нем нет размаха и разлета его последующих геометрических обзоров, но зато аккуратно объяснена основная идея в простейшей ситуации[29]. Большинство последующих изложений методов решета для неспециалистов, например, миниобзор Ричарда Моллина [260] фокусируются не на самом методе Бруна, а на более поздних достижениях (большое решето Линника, решето Сельберга, вариации Бомбьери и Аскольда Виноградова и т.д.)

[28]Жан Мерлен, 1876–1914, работал в обсерватории Лиона, его биографию можно найти на сайте этой обсерватории `http://selene-projet.fr/Jean_Merlin/Jean_Merlin.html`, но серьезно увлекался математикой. Нет никакого сомнения, что Брун самым внимательным образом изучал его работу. Мерлен погиб 27 августа 1914 года — “От важных государственных причин скончалось много молодых мужчин”. Как хорошо известно, безумный эгалитаризм III Республики и связанный с ним L’IMPÔT DU SANG на французских ученых оказали огромное влияние на последующее развитие математики во Франнции, например, привели к появлению Бурбаки [37].

[29]Как видно из списка на странице `https://webusers.imj-prg.fr/ bernard.teissier/`, это вообще первая опубликованная работа Тессье — на момент ее написания автору было 20 лет — и единственная его работа по теории чисел. Как очередной триумф наукометрии, стоит упомянуть, что этот текст вообще не отражен в MathSciNet! А ведь это даже не 1866 год, а 1966. Если это относится к профессиональной базе данных, то что же говорить про коммерческие, которые априори задуманы как fake news.

3.3. Результат Шнирельмана

Следующим принципиальным продвижением была работа Шнирельмана 1930 года. Вот, что писал в 1920 году Харди: “Goldbach’s assertion remains unproved; it has not even been proved that every number n is the sum of 10 primes, or of 100, or of any number independent of n”, [198].

Пусть $X \subseteq \mathbb{N}$ — какое-то множество натуральных чисел, $X(n) = X \cap \underline{n}$ — его пересечение с множеством $\underline{n} = \{1,2,\dots,n\}$ первых n натуральных чисел. **Плотностью Шнирельмана** множества X называется

$$\sigma(X) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{|X(n)|}{n}.$$

Таким образом, по определению $|X(n)| \geq \sigma(X)n$ для *всех* $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $0 \leq \sigma(X) \leq 1$, причем $\sigma(X) < 1$ для всех $X \neq \mathbb{N}$.

Поучительно сравнить это определение с обычным понятием **натуральной плотности**[30]

$$d(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{|X(n)|}{n},$$

которая является предельным значением *вероятности* встретить элемент множества X среди первых n натуральных чисел, при n стремящемся к бесконечности.

С одной стороны, интуитивно $d(X)$ является гораздо более *естественной* мерой величины множества X, не зависящей от случайных обстоятельств, связанных с маленькими значениями n. В свою очередь, $\sigma(X)$ чрезвычайно чувствительна именно по отношению к начальным значениям. Например, плотность Шнирельмана любого множества X не содержащего 1 равна 0, плотность Шнирельмана любого множества X не содержащего 2 не превосходит $1/2$, плотность Шнирельмана любого множества X не содержащего 3 не превосходит $2/3$ и т.д. Поэтому плотность Шнирельмана множества $2\mathbb{N}-1$ нечетных чисел равна 1/2, as expected, в то время как плотность Шнирельмана множества $2\mathbb{N}$ четных чисел равна 0. Это абсолютно контр-интуитивно, так как *вероятность* встретить четные и нечетные числа одинакова, $d(2\mathbb{N}-1) = d(2\mathbb{N}) = 1/2$. С другой стороны, в отличие от плотности Шнирельмана натуральная плотность существует далеко не для всех множеств натуральных чисел.

Определим теперь **сумму Шнирельмана** двух подмножеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ как

$$X \dotplus Y = X \cup Y \cup X + Y, \qquad \text{где} \quad X + Y = \{m + n \mid m \in X, n \in Y\}$$

есть обычная **сумма Минковского** X и Y. Иными словами,

$$X \dotplus Y = \Big((X \cup \{0\}) + (X \cup \{0\}) \Big) \cap \mathbb{N}.$$

Ясно, что эта операция ассоциативна и, таким образом, по индукции можно определить сумму Шнирельмана $X_1 \dotplus \ldots \dotplus X_s$ любого конечного семейства подмножеств $X_1,\dots,X_s$. В частности, для подмножества $X \subseteq \mathbb{N}$ и натурального числа $s \in \mathbb{N}$ можно рассмотреть сумму Шнирельмана $sX = X \dotplus \ldots \dotplus X$ копий этого подмножества в количестве s штук.

Шнирельман сделал два следующих очевидных, но чрезвычайно глубоких и важных наблюдения:

- Для любых двух подмножеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma(X \dotplus Y) \geq \sigma(X) + \sigma(Y) - \sigma(X)\sigma(Y).$$

[30] Для $d(X)$ используются также другие названия, **естественная плотность**, **асимптотическая плотность** и т.д.

• Для двух подмножеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ из неравенства $\sigma(X)+\sigma(Y) \geq 1$ следует, что $X \dotplus Y = \mathbb{N}$.

Отсюда по индукции легко вывести, что для любого подмножества $X \subseteq \mathbb{N}$ положительной плотности Шнирельмана $\sigma(X) > 0$ существует такое s, что $sX = \mathbb{N}$.

На самом деле, конечно, оба эти наблюдения сразу вытекают из следующей более общей теоремы, доказанной в 1942 году Манном.

• Для любых двух подмножеств $X, Y \subseteq \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sigma(X \dotplus Y) \geq \min(\sigma(X) + \sigma(Y), 1).$$

Но это гораздо более трудный результат, который не нужен для доказательства сформулированной выше основной теоремы Шнирельмана, утверждающей, что $sX = \mathbb{N}$ для любого множества положительной плотности. Проблема, однако состоит в том, что множество простых чисел $\mathbb{P}$ не содержит 1, так что его плотность равна 0. Ясно, что и множество простых чисел Гольдбаха $\mathbb{P} \cup \{1\}$ тоже имеет плотность 0. Еще одно ключевое наблюдение Шнирельмана состояло в следующем.

• Множество

$$X = \{1\} \cup (\mathbb{P} + \mathbb{P}) = \{1\} \cup \left\{p + q \mid p, q \in \mathbb{P}\right\},$$

состоящее из 1 и сумм двух простых, имеет положительную плотность Шнирельмана.

В самом деле, обозначим через $r_2(n)$ количество представлений n как суммы $n = p + q$ двух простых. Тогда из неравенства Коши вытекает, что

$$\frac{|X(n)|}{n} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(\sum r_2(m)\right)^2}{\sum r_2(m)^2},$$

где обе суммы берутся по $1 \leq m \leq n$. Оценивая *снизу* числитель второй дроби в правой части при $n \to \infty$ по теореме Чебышева, мы видим, что для больших n он не меньше $c_1 n^4 / \ln(n)^4$, для *какой-то* положительной константы $c_1 > 0$. С другой стороны, ее знаменатель легко оценить *сверху* методом решета Бруна и получить что, снова асимптотически, он не больше $c_2 n^3 / \ln(n)^4$, для *какой-то* положительной константы $c_2 > 0$. Это значит, что *существует* N такое, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $|X(n)|/n \geq c_1 c_2^{-1} > 0$. С другой стороны, так как $1 \in X$, то $|X(n)|/n \geq 1/N$ для любого $1 \leq n \leq N$.

Лучшее резюме работы Шнирельмана дал Александр Осипович Гельфонд: “Доказав, с помощью некоторых результатов В. Бруна, что последовательность парных сумм простых чисел имеет, в несколько обобщённом смысле, конечную плотность, Л. Г. Ш н и р е л ь м а н впервые в 1930 г. решил знаменитую проблему Гольдбаха в ослабленной постановке. Он показал, что всякое целое число есть сумма ограниченного числа простых чисел. Единица при этом считается простым числом”, [27], стр. 57. Здесь, кстати, *все* правильно, и *все* существенное упомянуто. И то, что ключевой шаг в доказательстве *второй* теоремы Шнирельмана проистекает из метода решета, и то, что 1 простое число, и то, что *никакой* оценки при этом не получено.

3.4. Доказательство Ландау

То, чего не упоминает Гельфонд, это что в работе самого Шнирельмана 1930 года нет не только никакой оценки, но и полного доказательства. Там просто констатируется, что такое доказательство *могло бы быть получено* методом Бруна. Первое доказательство теоремы Шнирельмана опубликовал в том же 1930 году Эдмунд Ландау [237]. Это по существу то доказательство, которое воспроизведено потом в [239] и перекочевало оттуда под именем доказательства Шнирельмана во все современные учебники.

Работа Ландау [237], как и остальные его работы, это schier Genuss для любого ценителя острого немецкого слова. Она начинается буквально так: “Die Arbeit von Herrn L. SCHNIRELMANN *Ob additiwnich swoistwach tschisel* (*Über additive Eigenschaften von Zahlen*) enthält einen der größten Fortschritte der Zahlentheorie, die ich erlebt habe.” — “величайшее продвижение в теории чисел, случившееся на моей жизни”.

Но следующие абзацы заставляют вспомнить оценки Ландау работ Виноградова: “Den Beweis des entscheidenden Hauptsatzes (seines Lemma 3) überläßt er allerdings dem Leser als völlig analog dem Beweis von Herrn BRUN für einen anderen Satz (über Primzahlzwillinge)” — “доказательство ключевой леммы в любом случае отсутствует/оставлено читателю”.

Ну и, в качестве coup de grâce: “Und Herrn SCHNIRELMANNS restliche 6 Seiten lassen sich auf eine Seite abkürzen” — “ну а остальные 6 страниц доказательства Шнирельмана легко сократить до одной страницы”. Но там вокруг *все* столь же прекрасно: “...denn *selbst ich* hatte mich bisher nie die Mühe unterzogen, Herrn BRUNS Originalarbeit ...genau durchzulesen”[31], “...bitte ich 100001 statt 100000 zu lesen”, “Meine ganze ...Arbeit hätte vor 100 Jahren geschrieben werden können”, usw.

В любом случае, своими словами мораль такова: Шнирельман, Ландау и Зигель *действительно* доказали теорему Шнирельмана в 1930 году. Но я представляю, как должен был страдать такой перфекционист как Ландау, читая русские работы того времени! И как он должен был радоваться, когда ему удавалось придать содержащимся в них идеям ту классическую форму, которую мы знаем сегодня.

4. КОНСТАНТА ШНИРЕЛЬМАНА

В сотнях текстов, как учебного, научно-популярного и исторического характера, так и вполне себе серьезных, под именем **константы Шнирельмана** происходит смешение двух совершенно разных понятий, **асимптотической константы Шнирельмана** S и **абсолютной константы Шнирельмана** s — раньше они обозначались K и k, соответственно.

4.1. Асимптотическая и абсолютная константы Шнирельмана

Напомним, прежде всего, как эти термины понимались в 1930-е годы.

• **Асимптотической константой Шнирельмана** называется наименьшее S для которого *существует* N такое, что все натуральные числа числа $n \geq N$ являются суммами не более, чем S простых, $n = p_1 + \ldots + p_m$, $m \leq S$.

• **Абсолютной константой Шнирельмана** называется наименьшее s такое, что *все* натуральные числа числа $n \geq 2$ являются суммами не более, чем s простых, $n = p_1 + \ldots + p_m$, $m \leq s$.

Как мы помним, для проблемы Варинга конечность $g(k)$ вытекает из конечности $G(k)$, но для получения *оценки* для $g(k)$ оценка $G(k)$ сама по себе совершенно недостаточ-

[31] Собственно, Ландау и говорит, что приведенное далее доказательство положительности плотности Шнирельмана множества $\{1\} \cup (\mathbb{P} + \mathbb{P})$ получено Зигелем!

на, нужно знать еще то место N, начиная с которого каждое натуральное число является суммой $G(k)$ неотрицательных k-х степеней.

Точно так же, конечность S влечет конечность s, но оценка S сама по себе не дает *никакой* конкретной оценки для s. Чтобы дать какую-то конкретную оценку s нужно знать не только оценку S, но и оценку того места N, начиная с которого каждое натуральное число есть сумма $\leq S$ простых.

В методе Шнирельмана 1 расматривается как простое число. Это значит, что фактически доказывается, что существуют такие постоянные K и L, что каждое число n имеет вид

$$n = p_1 + \ldots + p_k + l,$$

где все p_i простые, $k \leq K$ и $l \leq L$, Разумеется, натуральные числа, меньшие L являются суммами ограниченного числа простых[32].

Резюмируем теперь основные этапы большого пути. Более детально история оценок S и s будет прослежена ниже.

- Гипотеза Гольдбаха утверждает, что $s = 3$.
- В 1912 году Эдмунд Ландау [234] предложил для начала доказать, что $s < \infty$. В 1930 году Шнирельман, Ландау и Зигель действительно это доказали, [106, 237].
- В 2013–2014 годах Хельфготт доказал, что $s \leq 4$.

Однако фокус состоит в том, что промежутке Виноградов еще раз доказал, что $s < \infty$, понизив при этом оценку *асимптотической* константы Шнирельмана с $S \leq 71$ — именно такова первая достоверная *опубликованная* оценка S — до $S \leq 4$.

Разумеется, после этого все разговоры про *асимптотическую* константу Шнирельмана потеряли смысл — если только нас не интересует бокс со связанными руками типа доказательства определенными средствами[33] — и начиная с 1950-х годов константой Шнирельмана обычно стали называть *абсолютную* константу Шнирельмана s. Забыв при этом, что до работ Саратовской школы 1960-х годов не было вообще *никаких* оценок s — до этого все результаты, как на пути Бруна—Шнирельмана, так и на пути Харди—Литтлвуда—Виноградова, были исключительно *асимптотическими*. Первые оценки s на пути Шнирельмана, или вообще на каком-либо пути, причем с гораздо менее точными оценками чем $s < 800000$, были получены лишь спустя 30–40 лет после работы Шнирельмана.

4.2. 800000 простых в популярной культуре

В *сотнях* текстов ошибочно утверждается, что Шнирельман в 1930 году доказал, что $s < 800\,000$. Так, в своей биографии Гольдбаха [109] Адольф Павлович Юшкевич и Юдифь Хаимовна Копелевич утверждают: “В 1930 г. Л. Г. Шнирельман с помощью особого приема строго доказал, что каждое целое число есть сумма не более K простых чисел. Это число K Шнирельман тогда оценил равным приблизительно 800 000.”

Конечно, было бы смешно ожидать от историка и филолога, чтобы они понимали подобного рода тонкости (. . . хотя . . .). Гораздо удивительнее, что это утверждение воспроизводится в сотнях текстов *по теории чисел*, как учебных и научно-популярных, так

[32]Например, $\leq L/2$ двоек и троек. Мы не будем здесь обсуждать постулат Бертрана и вариации на тему жадного алгоритма, позволяющие сразу дать логарифмические оценки на количество простых слагаемых.

[33]Это некоторое эристическое преувеличение. В действительности, конечно, на пути Шнирельмана значительно легче оценить то N, начиная с которого что-то выполняется.

и вполне серьезных, написанных выдающимися профессионалами в этой области — и попало *в таком виде* даже в Большую Советскую Энциклопедию [30]!

Понятно, что оттуда это в неизменном виде перекочевало в Большую Советскую Википедию: “In 1930, Lev Schnirelmann proved [19] [20] that any natural number greater than 1 can be written as the sum of not more than C prime numbers, where C is an effectively computable constant, see Schnirelmann density. Schnirelmann’s constant is the lowest number C with this property. Schnirelmann himself obtained $C < 800000$.”[34]

Кстати, для разнообразия, в Краткой *Еврейской* Энциклопедии правильно: “он ...сыграл выдающуюся роль в решении «проблемы Гольдбаха», которую математики пытались решить с 1742 г., доказав теорему о том, что всякое целое число больше единицы есть сумма *ограниченного* числа простых чисел.”[35]

Вот, что пишет в своих воспоминаниях Лев Семенович Понтрягин: “Проблема Гольдбаха формулируется следующим образом: всякое ли целое число, большее 6, можно представить в виде суммы не более трёх простых чисел? Л. Эйлер показал, что для решения этой проблемы достаточно доказать, что каждое чётное число есть сумма двух простых. В 1930 г. Л. Г. Шнирельман доказал, что всякое целое число, большее 1, есть сумма не более чем 800 000 простых чисел”, [79], Примечание 17. И подобного рода упоминаний 800 000 много десятков — если не сотен!

Но круглые числа вызывают у меня некоторые подозрения — это не стилистика теории чисел, это стилистика “Махабхараты” и “Рамаяны”: “800000 одних младших богов”, “800000 гандхарвов и апсар” “800000 движущихся в разные стороны, летающих, управляемых мысленно колесниц”, “800000 летучих обезьян, малых и великих, слабых и могучих, отовсюду поспешили в Кишкиндху”, “силою колдовства он породил 800000 новых ракшасов”, “они были пронзены во все члены 800000 стрел, посланных луком гандивой”. Кстати, академическое издание Махабхараты, все 2×80000 строк, я тоже впервые увидел на верхней полке в кабинете Николая Григорьевича Чудакова.

Такого рода числа используются скорее в качестве устрашения: “Леонардо, не желая принимать на себя ответственности, решил объявить гонфалоньеру всю правду и представил расчет, в котором доказывал, что для сооружения двух отводных, до Ливорнского болота, каналов в 7 футов глубины, 20 и 30 ширины, представляющих площадь в 800 000 квадратных локтей, потребуется не менее 200 000 рабочих дней, а может быть, и более, смотря по свойствам почвы. Синьоры ужаснулись”, (Мережковский, Жизнь Леонардо да Винчи).

4.3. Откуда взялись 800000 простых?

Я попытался прочесть все доступные мне опубликованные работы 1930-х годов, но не нашел там *никаких* конкретных оценок абсолютной константы Шнирельмана. Судя по *опубликованным* работам, история возникновения легендарных 800000 примерно такова.

Исходно Николай Павлович Романов попытался дать *какую-то* оценку *асимптотической* константы Шнирельмана[36]. В качестве мотивировки ему нужно было указать

[34] https://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach_conjecture

[35] Цитируется по “Электронная Еврейская Энциклопедия”, 2004–2006, онлайн версия “Краткой Еврейской Энциклопедии в 11 томах”, Иерусалим, 1976–2005, https://eleven.co.il/jews-of-russia/in-culture-science-economy/14873/

[36] Возможно, за всем этим стоит *гораздо* больше, чем наши учителя готовы были обсуждать. Во всяком случае, одно из обвинений предъявленных Лузину в 1936 году, это именно положительный отзыв на док-

какое-то предыдущее значение этой константы. Вот что он пишет: “В своей замечательной работе [106] Шнирельман впервые доказал, что каждое целое число может быть разложено на сумму ограниченного числа простых слагаемых, причем в качестве верхней границы для числа простых чисел, необходимых для представления всех достаточно больших чисел, он получил число 100000.”

И чуть далее: “Комбинируя эти две леммы, мы получаем предложение: каждое достаточно большое число может быть с точностью для ограниченного слагаемого разложено на сумму не больше чем $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right]$ простых чисел. Следуя Шнирельману, получим $\alpha = \dfrac{1}{200000}$, следовательно, для указанной верхней границы для числа необходимых простых слагаемых $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right] = 400000$. Легко показать, однако, что в качестве α можно взять $\dfrac{1}{552}$ и получить, таким образом, для указанной верхней границы $2\left[\dfrac{1}{\alpha}\right] = 1104$.”

Обратите внимание, насколько аккуратно здесь различаются асимптотическая $S \leq 100000$ и абсолютная $s < \infty$ константы Шнирельмана. Но работа Романова была опубликована по-русски, в довольно обскурном журнале, издаваемом в Томске, и я подозреваю, что большинство западных математиков того времени ее сами не читали, а знакомы с ее содержанием исключительно по рефератам, опубликованным в `Zentralblatt`. Вот как выглядели эти рефераты.

Вот реферат Арнольда Шольца: “Nach Schnirelman haben die als Summe zweier Primzahlen darstellbaren Zahlen eine positive untere Dichte, d. h. bis x ist ihre Anzahl $> \alpha x$ mit positivem α. Hier wird gezeigt, daß $\alpha = 2 : 1104$ ausreicht. Nach dem zweiten Schnirelmanschen Satz folgt dann, daß sich jede Zahl als Summe von höchstens 1104 Primzahlen darstellen läßt. Schnirelman gab 100000 an.” Шольц здесь говорит “jede Zahl” — ну так это реферат, а не статья. Но, как выясняется, “детали имеют значение”.

А вот, для сравнения, реферат Саломона Любельского[37]: “Mittels der Schnirelmannschen Methoden beweist Verf., daß man die Abschätzung der Schnirelmannschen Weltkonstante C von $C \leq 2 \cdot 400000$ auf $C \leq 2 \cdot 1104$ herabsetzen kann. Störende Druckehler...” Ну, здесь Любельский еще раз умножает на 2, вместо того, чтобы один раз разделить! Вместе две эти маленькие неточности в двух рефератах приводят к сокрушающему эффекту.

Должен признаться, что я *восхищен* литературным стилем статей Эдмунда Ландау[38]. Вот, например, как аккуратно изложена в работе [210] ситуация с константами Шнирельмана: “Man verdankt Herrn Schnirelmann [108] den Satz: Jedes $x > 1$ ist als Summe von

---

торскую диссертацию Романова, см. [32]. Вероятно, имел место консенсус “молодых”, что все основные идеи содержались в первой работе Шнирельмана. А с точки зрения Лузина, эта работа была *несколько небрежной*. Вот как это всплывает на заседании комиссии АН СССР 13 июня 1936 года. Кто-то из зала — судя по дальнейшему, скорее всего всемогущий *в то время* Бенцион Израилевич Сегал — спрашивает: “О первой работе Льва Генриховича вы выражались, что это *топорная* работа...” Лузин: “Это было бы безумием, а что элементарная работа и *не доделана до конца*, Лев Генрихович и сам это признает. Он дал 1500 или 2000 *этих самых* простых...” [32], с.183. Это объясняет, кстати, почему Шнирельман нападал на Лузина агрессивнее всех остальных математиков.

[37] Один из основателей, вместе с Арнольдом Вальфишем, журнала “Acta Arithmetica”, Саломон Любельский, 1902–1941, прекрасно владел русским и реферировал большое количество русских работ того времени по теории чисел. Как свидетельство эпохи, место его гибели KZ Майданек. Впрочем, вот для сравнения годы жизни двух других главных протагонистов: Шнирельман, 1905–1938; Шольц, 1904–1942. Ну или упомянутый в [13] Михаил Гельбке, 1904–1942. “От важных государственных причин скончалось много молодых мужчин” — “и даже Немезида ни в чем не виновата, она лишь секретарша...”

[38] В данном случае Ландау на 30+ лет старше своих соавторов, и у меня нет никакого сомнения, что окончательный текст написан именно им.

höchstens c_1 Primzahlen darstellbar. Oder, was dasselbe besagt: Jedes $x > c_2$ ist als Summe von höchstens c_3 Primzahlen darstellbar. Wir nennen Schnirelmannsche Konstante S das kleinste c_3, zu dem es ein passendes c_2 gibt. Also: Alle grossen x sind in höchstens S Primzahlen zerlegbar; unendlich viele $x > 1$ sind nicht in $S - 1$ Primzahlen zerlegbar. ... Dieser Frage ist eine kürzlich erschienene Arbeit von Herrn Romanoff [301] gewidmet. Dieser gibt an, Herr Schnirelmann habe $S \leq 100000$ bewiesen, was sich zu $S \leq 1104$ verschärfen lasse[39]".

А вот версия истории по Джованни Риччи[40], которая, как я понимаю, копировалась в дальнейшем уже в качестве канонической: "Le varie tappe si possono riassumere nel modo seguente

$S \leq 800.000$ (L. Schnirelmann, 1930),

$S \leq 2208$ (N. P. Romanov, 1935),

$S \leq 71$ (H. Heilbronn–E. Landau–P. Scherk, 1936)."

С тем, что, конечно, Риччи честно признается, что в русские работы не заглядывал, так как не имел к ним доступа: "Per notizie su questo argomento, con objezioni ai lavori precedenti, rimandiamo il lettore alla memoria H. Heilbronn–E. Landau–P. Scherk [210] che noi prendiamo come base, essendoci stato impossibile vedere i lavori russi".

Но при этом саму оценку константы 800.000 он не берет из [210], где указано $S \leq 100000$, а *вычисляет* из реферата Любельского, Ну а дальше уже очевидно, что произошло. В том же году Виноградов доказывает, что $S \leq 4$. Но тогда всем, кто не в теме или внимательно не следил, вообще непонятно, в чем вклад Шнирельмана, и возникает легенда, что Шнирельман оценивал *абсолютную* константу Шнирельмана — хотя ни одна из процитированных работ, кроме *реферата* Шольца, не дает к этому ни малейшего основания, наоборот, в них всюду тщательнейшим образом подчеркивается "для всех достаточно больших", "ogni intero abbastanza grande", и так далее.

Именно в силу *психологического* напряжения между $S \leq 800000$ и $S \leq 4$ у многих, в том числе ведущих специалистов по теории чисел, возникла соответствующая иллюзия. Первоначально по следам работ Риччи и Виноградова абзац, который можно истолковать в таком духе, встречается даже в обзоре Николая Григорьевича Чудакова [100]. Специалисты, которые реально занимались аддитивной теорией чисел, разумеется, моментально осознали это различие, борьба за эффективизацию началась почти сразу [330] и, как отмечает Вон [341], эффективизировать доказательство Шнирельмана *значительно* легче, чем доказательство Виноградова.

[39] Использование литературных форм "habe bewiesen", "verschärfen lasse" означает, что они не ставят под сомнение эти утверждения — "hätte bewiesen", "verschärfen ließe"; но и не подписываются под ними — "hat bewisen", "verschärfen läßt". Они *недвусмысленно* снимают с себя всякую ответственность за эти оценки, которая целиком лежит на источнике сообщения. Иными словами, они не утверждают, что Шнирельман фактически доказал, что $S \leq 100000$. Они утверждают лишь, что *по словам Романова* Шнирельман это доказал. Я не знаю, все ли иноязычные читатели, особенно те, в родном языке которых отсутствует различие между congiuntivo и condizionale, способны оценить подобного рода нюансы. Более того, я совсем не уверен даже, что тот же Джованни Риччи, в родном языке которого такое различие как раз есть, обратил на это внимание. Текст может быть непонятным не потому, что он написан плохо, а потому, что он написан *слишком* хорошо.

[40] Джованни Риччи, 1904–1973. В качестве еще одного персонального туше упомяну, что 15 декабря 1936 Риччи был назначен профессором университета Милана [156, 157]. Марко Куджани вспоминает, что Риччи как-то сказал ему примерно такую фразу: "Открыть книгу, напечатанную красивым шрифтом на хорошей бумаге и правильно переплетенную, это одно из высших удовольствий, доступных человеку". Собственно, он и создал ту замечательную математическую библиотеку на via Saldini 50, которую я упоминаю в [11]. Сегодня она так и называется, La Biblioteca Matematica "Giovanni Ricci", см. `https://www.unimi.it/it/ugov/ou-structure/biblioteca-matematica-giovanni-ricci`

Но 800000 уже были выпущены из кувшина и начали триумфальную пролиферацию. Причем дело не ограничилось научно-популярными книгами и текстами общего характера. Воспроизведу по этому поводу комический пассаж из книги Наркевича [264] — кстати, едва ли не единственная *серьезная* фактическая ошибка, которую мне удалось у него заметить: “Schnirelman used ... a bound for the number of representations of an even integer as a sum of two primes, resulting from the application of Brun's sieve, to deduce the existence of a constant $S < 8 \cdot 10^4$ with the property that every integer exceeding 1 is a sum of at most S primes. ... Later work *diminished* Schnirelman's bound for S: ... $S < 2 \cdot 10^{10}$, ... ”

Владимир Андреевич Успенский и здесь оригинален. Он единственный из известных мне авторов пишет, что Шнирельман получил для s оценку $s \leq 300000$, см. [93].

4.4. Комментарий Чудакова и Климова

Приведу обширный отрывок из заметки Чудакова и Климова [102], который показывает, как *в действительности* обстояли дела с постоянной Шнирельмана в 1967 году. Поскольку эта заметка опубликована в одном из главных советских журналов, который читали *все* математики, и не была, насколько мне известно, кем-либо поставлена под сомнение, мне довольно странно, что ошибочные утверждения относительно константы Шнирельмана не были никогда исправлены. Я тогда же, будучи школьником 9-го класса, неоднократно слышал это в исполнении самого Чудакова, см. § 7.

Итак, вот этот отрывок: “Мы хотим обратить внимание на то, что в учебной и научно-популярной литературе повторяется ошибочное утверждение относительно так называемой постоянной Шнирельмана, т. е. наименьшего натурального S такого, что всякое натуральное $N \geq N_0$ представимо в форме

$$N = \sum_{i=1}^{k} p_i,$$

где $k \leq S$, p_i — простые числа.

В книгах [9, 28, 30, 73, 87, 91] утверждается, что $N_0 = 2$, а $S = 20$. При этом делается ссылка на работу Шапиро и Варга [323] как содержащую самый лучший результат относительно S, известный до сих пор[41]. Однако в этой работе основная теорема А, стр. 165, формулируется только для достаточно больших целых ... Таким образом ими получена оценка $S \leq 20$, но для достаточно большого N_0.

Другие авторы, работавшие методом Бруна—Шнирельмана, включая и самого Л. Г. Шнирельмана, не вычисляли значение N_0 и занимались только вычислением S. В [364] получено $S \leq 18$ тоже для $N \geq N_0$.

А. А. Шанин и Т. А. Шептицкая (Саратов) методом Бруна—Шнирельмана показали (в докладе на IV научной конференции математических кафедр педагогических институтов Поволжья в 1963 г.), что $S \leq 2 \cdot 10^{10}$ для $N_0 = 2$. Аналитическим методом К. Г. Бороздкин [8] получил, что $S \leq 4$ для $N_0 = \exp\{\exp 16,038\} = 10^{10^{6.60\ldots}}$ Так в действительности обстоит дело с постоянной S, поэтому необходимо сделать исправления при последующих изданиях перечисленных вначале книг, пока не появятся новые исследования постоянной S.”

[41] В немецком оригинале книги Троста в этом месте правильно “Für aile genügend grossen n ergab sich elementar $S \leq 20$ (Shapiro und Warga [323]) und $S \leq 18$ (Yin Wen Lin [364])”, ошибка именно в русском переводе. Конечно, самым удивительным является наличие прямой ошибки в книге Гельфонда и Линника [28], абзац после формулировки теоремы 6.2.1. Разумеется, последующее доказательство верно, но в нем не дается никакой оценки.

В пропущенном фрагменте текста Чудаков и Климов прозрачно намекают, что никто из авторов цитированных учебников и популярных книг доказательств в работе [323] не читал. Только Шефтель Хенехович Михелович сделал из статьи Чудакова и Климова правильные выводы и в популярной(!) брошюре [74] выпущенной издательством “Знание” тщательно различает S и s. Во всех остальных источниках неправильные утверждения не исправлены, В последующих изданиях книги Бухштаба правильно формулируется теорема Шнирельмана, после чего говорится, что s у Шнирельмана было довольно велико.

4.5. Оценки асимптотической константы Шнирельмана

Ясно, что история оценок асимптотической константы Шнирельмана делится на два периода, до 1937 года, когда Виноградов установил, что $S \leq 4$ и после этого. До работы Виноградова:

- $S \leq \infty$, Шнирельман, [108], 1930.
- $S \leq 100000$, Шнирельман[?], Где? Когда?
- $S \leq 2208$, Романов, [301][42], 1935.
- $S \leq 71$, Хейльброн, Ландау, Шерк, [210], 1936.
- $S \leq 67$, Дж. Риччи, [296], 1937.

После работы Виноградова улучшение константы Шнирельмана элементарными методами превратилось в чисто спортивную деятельность. Вот некоторые ее вехи.

- $S \leq 20$, Х. Шапиро и Ж. Варга, [323], 1950.
- $S \leq 18$, Ин Вен Лин, [364], 1958.
- $S \leq 12$, Кондакова и Николай Климов, [53], 1968.
- $S \leq 10$, Кузяшев и Чечуро [55], 1969. Вон [341] отмечает, что тот же результат был независимо получен в дипломной работе Хартмута Зиберта в Марбурге[43].
- $S \leq 6$ и $S \leq 5$ для нечетных чисел, Вон, [341], 1976.

Метод Вона основан на теореме Барбана—Дэвенпорта—Хальберштама[44], которая, в свою очередь, является простым следствием теоремы Зигеля—Вальфиша и большого решета. В этом смысле этот метод “элементарный” — но неэффективный. Тем не менее, как то, что при помощи столь простого метода удалось так рано получить результат такой силы, так и то, насколько это достижение мало известно за пределами профессионального числового сообщества, вызывает крайнее недоумение. В действительности, Вон лишь совсем чуть-чуть не дотянул до того, чтобы доказать тогда же $S \leq 4$ для четных чисел.

[42] “В моей работе “К проблеме Гольдбаха” имеется, кроме ошибок вычислительного характера, существенная ошибка теоретического характера, состоящая в пользовании леммой о равномерной, относительно k, оценке остаточного члена …”, [85], 39.

[43] Однако доказательства в этих работах опираются на теорему Бомбьери—Аскольда Ивановича Виноградова. Морально, это еще одно совместное обобщение асимптотического закона распределения простых и теоремы Дирихле о простых в арифметических прогрессиях. С оценкой асимптотики функции Чебышева в среднем, а не в индивидуальных классах, но зато лучше, чем в теореме Зигеля—Вальфиша. С точки зрения тех приложений, которые здесь рассматриваются, это почти то же самое, что GRH. Поэтому доказательства в этих работах можно назвать “элементарными” лишь весьма условно. В действительности, они используют примерно такой же аналитический инструментарий, что все остальные аналитические доказательства в духе Харди—Литтлвуда.

[44] Причем буквально в форме 1966 года [4, 159], а не какое-то из последующих усилений!

4.6. Оценки абсолютной константы Шнирельмана

Ясно, что оценка абсолютной константы Шнирельмана представляет собой значительно более серьезное предприятие, чем оценка асимптотической константы Шнирельмана.

- $s<\infty$, Шнирельман, [106, 107], 1930.
- $s\le 2\cdot 10^{10}$, Шанин, Шептицкая [105], 1963.
- $s\le 6\cdot 10^9$, Н. И. Климов, [46], 1969.
- $s\le 115$, Н. И. Климов, Пильтяй, Шептицкая, [51, 52], 1972.
- $s\le 159$, Дезуйе, [162], 1973.
- $s\le 113$, Климов, [47], 1975 .
- $s\le 65$, Климов, [48], 1975 .
- $s\le 61$, Климов, [49], 1975[45].
- $s\le 55$, Климов, [50], 1975.
- $s\le 27$, Вон, [341], 1977.
- $s\le 26$, Дезуйе, [162], 1977.
- $s\le 24$, Чжанг—Динг, [366], 1983.
- $s\le 19$ и $s\le 18$ для четных чисел, Ризель—Вон, [300], 1983.
- $s\le 7$ и $s\le 6$ для четных чисел, Оливье Рамаре, [292], 1995 .

Теорема Рамаре продолжает оставаться самым точным из элементарных результатов[46]. Как обычно, улучшение получено за счет усиления вспомогательных результатов. В данном случае, одна из ключевых лемм состояла в проверке того, что при $n>e^{67}$ количество целых между n и $2n$ представимых в виде суммы двух простых не меньше $n/5$. Все последующие улучшения опирались на аналитическую технику.

- $s\le 6$, Лешек Канецкий, [231], 1995, условно, по модулю гипотезы Римана.
- $s\le 5$, Лешек Канецкий, там же, 1995, условно, по модулю гипотезы Римана и того, что гипотеза Гольдбаха проверена для всех четных чисел меньших $1.405\cdot 10^{12}$.
- $s\le 6$ и $s\le 5$ для нечетных чисел, Теренс Тао, [331], 2012 .
- $s\le 4$ и $s\le 3$ для нечетных чисел, Харальд Хельфготт, [215], 2014.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО НЕЧЕТНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА

В 1922–1937 году нечетная гипотеза Гольдбаха была доказана в асимптотическом смысле. А именно, теорема Харди—Литтлвуда—Виноградова[47] утверждает, что любое натуральное число *начиная с некоторого места* является суммой трех простых. Иными словами, *существует* такое натуральное число n_0 , что каждое $n>n_0$ является суммой трех простых чисел.

[45] Статья [47] опубликована в 1978 году и, казалось бы, выпадает из хронологии. Фактически же она была подана в журнал в январе 1975, до того как появилась работа [48] статьи Вона, Дезуйе и других.

[46] Однако было бы натяжкой утверждать, что он получен чисто *на пути Шнирельмана*, так как основная оценка доказывается, внезапно, с помощью *тригонометрических сумм*.

[47] То, что в советской литературе называлось теоремой Гольдбаха—Виноградова.

5.1. Метод производящих функций

В 1922 году Харди и Литтлвуд устанавливают справедливость асимпотической нечетной гипотезы Гольдбаха в предположении справедливости GRH = **обобщенной гипотезы Римана**[48]. Сам Харди оценивал это результат так: "It is an imperfect and provisional result, but it is the first serious contribution to the solution of the problem", [212]. Метод Харди—Литтлвуда хорошо известен и является основой всего дальнейшего развития в аналитической теории чисел. В своей архетипичной форме он восходит к Эйлеру и мы уже обсуждали его основную идею в [12].

• Изначально они рассматривают ряд

$$f(z) = z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + z^{11} + \dots$$

являющийся производящей функцией для характеристической функции множества простых чисел. Как хорошо известно со времен Эйлера, его s-я степень

$$f(z)^s = \sum_{n=1}^{\infty} r_s(n) z^n$$

является тогда производящей функцией для количества представлений $r_s(n)$ натурального числа n как суммы *ровно* s простых чисел, не обязательно различных и с учетом порядка. Вот, например, как начинается ряд $f(z)^2$:

$$f(z)^2 = z^4 + 2z^5 + z^6 + 2z^7 + 2z^8 + 2z^9 + 3z^{10} + 2z^{12} + 2z^{13} + 3z^{14} + 2z^{15} + 4z^{16} + \\ 4z^{18} + 2z^{19} + 4z^{20} + 2z^{21} + 5z^{22} + 6z^{24} + \dots$$

Четная гипотеза Гольдбаха утверждает, что все коэффициенты $r_2(n)$ этого ряда при *четных* степенях z^n, $n \geq 4$, отличны от 0. А вот начало ряда $f(z)^3$:

$$f(z)^3 = z^6 + 3z^7 + 3z^8 + 4z^9 + 6z^{10} + 6z^{11} + 9z^{12} + 6z^{13} + 6z^{14} + 10z^{15} + 9z^{16} + \\ 12z^{17} + 12z^{18} + 12z^{19} + 12z^{20} + 19z^{21} + 12z^{22} + 21z^{23} + 15z^{24} + \dots$$

Разумеется, из четной гипотезы Гольдбаха следует, что *все* коэффициенты $r_3(n)$ этого ряда при степенях z^n, $n \geq 6$, отличны от 0 (каждое нечетное $n \geq 7$ имеет вид $m+3$ для некоторого четного $m \geq 4$, а $6 = 2+2+2$). Более слабая нечетная гипотеза Гольдбаха утверждает, что коэффициенты $r_3(n)$ при *нечетных* степенях z^n, $n \geq 7$, отличны от 0.

Впрочем, здесь возможны варианты.

• Можно, например, рассмотреть ряд

$$f_0(z) = 1 + z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + z^{11} + \dots$$

являющийся производящей функцией для характеристической функции множества, состоящего из простых чисел и нуля. Тогда коэффициент $f_0(z)^s$ при z^n интерпретируется как количество представлений натурального числа n как суммы *не более* s простых чисел, с учетом порядка.

• Или, что соответствовало бы исходному вопросу самого Гольдбаха, ряд

$$f_1(z) = z + z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + z^{11} + \dots$$

[48] В действительности им достаточно более слабого предположения о нулях L-рядов Дирихле $L(s,\chi)$, но оно должно выполняться не только для ζ-функции, а для рядов с произвольным характером Дирихле.

являющийся производящей функцией для характеристической функции множества, состоящего из простых чисел и единицы. Тогда коэффициент $f_1(z)^s$ при z^n выражает количество представлений натурального числа n как суммы *ровно* s простых чисел и *единиц*.

• Или, как это происходит в доказательстве Шнирельмана, ряд

$$f_{01}(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^5 + z^7 + z^{11} + \ldots$$

являющийся производящей функцией для характеристической функции множества, состоящего из простых чисел, нуля и единицы. Тогда коэффициент $f_{01}(z)^s$ при z^n равен количеству представлений натурального числа n как суммы *не более* s простых чисел и *единиц*.

5.2. Теорема Харди—Литтлвуда

Однако, если мы интересуемся не явной формулой для количества представлений, а только вопросом о *существовании* такого представления, то можно вместо эйлеровской производящей функции рассматривать какую-то другую функцию с теми же номерами ненулевых коэффициентов, которую проще изучать.

• По обычным в **аналитической теории чисел** техническим причинам фактически вместо ряда $f(z)$ Харди и Литтлвуд рассматривают ряд

$$F(z) = \ln(2)\, z^2 + \ln(3)\, z^3 + \ln(5)\, z^5 + \ln(7)\, z^7 + \ln(11)\, z^{11} + \ldots$$

Мотивацией здесь служит желание перейти от суммирования по простым числам к суммированию по натуральным числам. *Морально*, выбор логарифма в качестве коэффициента объясняется, разумеется, **асимптотическим законом распределения простых**[49],[50]. Как функция комплексного аргумента $z \in \mathbb{C}$ этот ряд сходится при $|z| < 1$,

Как и раньше, s-я степень этого ряда имеет вид

$$F(z)^s = \sum_{n=1}^{\infty} R_s(n) z^n,$$

причем теперь

$$R_s(n) = \sum_{p_1+\ldots+p_s=n} \ln(p_1) \ldots \ln(p_s),$$

где, как и выше, сумма берется по всем представлениям n в виде суммы s простых. Таким образом, чтобы доказать, что $r_s(n) \neq 0$, нам достаточно доказать, что $R_s(n) \neq 0$. В действительности Харди и Литтлвуд не вычисляют $R_s(n)$, а изучают его асимптотику при $n \to \infty$.

При нечетном n им удается выделить главную часть $R_3(n)$ и доказать, что $R_3(n)$ растет примерно как n^2, с коэффициентом, который отделен от нуля. Однако, это *условный*

[49]*Технически*, эти причины очевидны каждому, кто видел доказательство асимптотического закона распределения простых или теоремы Дирихле о простых в арифметической прогрессии. Ключевые слова здесь — **функция Чебышева** ψ и формула для логарифмической производной L-функции Дирихле. В терминах функции π асимптотический закон распределения простых выражается как $\pi(x) \sim x/\ln(x)$, но в терминах функции Чебышева ψ он означает просто, что $\psi(x) \sim x$, что не только выглядит проще, но и правильнее идейно. Замена f на F в работе Харди—Литтлвуда [200] производится ровно по тем же причинам.

[50]Илан Варди сформулировал [338] этот принцип следующим образом: “the primes should be counted using their logarithms” и “you should consider primes and prime powers together”. Вместе две эти максимы служат определением **функции фон Мангольдта** Λ.

результат, он зависит от некоторого предположения о нулях L-функций Дирихле $L(s,\chi)$ — т.е. по существу от некоторой ослабленной формы обобщенной гипотезы Римана.

• Фактически, конечно, поскольку нас интересует только необращение каких-то коэффициентов в 0, по обычным в **гармоническом анализе** техническим причинам они вводят в качестве дополнительного коэффициента *сглаживающую функцию* быстро убывающую на бесконечности, что-нибудь типа $t \mapsto e^{-t}$. Хельфготт [214, 217] очень понятно объясняет, в чем состоит основная трудность получения хороших асимптотик на пути Харди—Литтлвуда. Для этого нам нужны сглаживающие функции, которые сами очень быстро убывают при $t \mapsto \infty$, и для которых результат применения к ним преобразования Фурье (в данном случае преобразования Меллина) также очень быстро убывает. Как известно, **принцип неопределенности** утверждает ровно, что таких функций не существует. Поэтому приходится идти на компромиссы.

Стоит упомянуть, что в 1937 году на пути Харди—Литтлвуда Теодор Эстерман [176] доказал следующий *безусловный* результат: любое достаточно большое нечетное натуральное число представимо в виде $p_1 + p_2 + p_3 p_4$. Этот аналог результата Чэнь Джинжуна для нечетной проблемы Гольдбаха несомненно был бы значительно более известен, если бы в том же 1937 году Виноградов не решил полностью нечетную проблему Гольдбаха в асимптотическом смысле. Это, несомненно, огромный прогресс по сравнению с предыдущими работами. Кроме собственно метода Харди—Литтлвуда Эстерман использовал некоторые ранние элементарные результаты Виноградова и теорему Зигеля—Вальфиша. Апостериори утверждается, что Виноградов *мог* доказать этот результат в 1934 методами работы [347].

5.3. Теорема Виноградова

В 1937 году Виноградов сумел применить свою технологию оценки тригонометрических сумм для доказательства нечетной гипотезы Гольдбаха в асимптотическом смысле. *Морально*, основная идея здесь такая же, как в его работах по проблеме Варинга. А именно, рассмотреть вместо формального степенного ряда *многочлен*

$$f_N(z) = z^2 + z^3 + z^5 + \ldots + z^P,$$

где P — наибольшее простое, не превосходящее N. Как и раньше, s-я степень этого многочлена

$$f_N(z)^s = \sum_{n=1}^{\infty} r_s^N(n) z^n$$

имеет следующий смысл: $r_s^N(n)$ — количество представлений n в виде суммы простых чисел $p \leq N$ в количестве $\leq s$ штук. Как и раньше, доказательство гипотезы Гольдбаха сводится к тому, что $r_2^N(N) \neq 0$ или $r_3^N(N) \neq 0$

Фактически, конечно, Виноградов работает не с многочленами, а с конечными экспоненциальными (или, как он сам их называет, “тригонометрическими”) суммами вида

$$S_N = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i \alpha p}$$

где p пробегает все простые числа $\leq N$. Как обычно,

$$S_N^s = \sum_{n \leq sN} r_s^N(n) e^{2\pi i \alpha n},$$

где $r_s^N(n)$ имеет тот же смысл, что и выше, С точки зрения теории Харди—Литтлвуда это *примерно* то же самое, что делают они, но только теперь вместо бесконечно дифференцируемой сглаживающей функции используется **брутальная отсечка** (= troncature brutale) посредством ступенчатой функции типа функции Хевисайда.

Внешне ситуация похожа на ситуацию в проблеме Варинга, но теперь нужно научиться оценивать экспоненциальные суммы по простым, что намного сложнее. И здесь Виноградову удается придумать вторую ключевую идею — "сглаживание" для замены сумм по простым суммами по последовательным натуральным числам.

Основной прием состоит в том, чтобы выразить характеристическую функцию множества простых как линейную комбинацию сверток Дирихле известных арифметических функций. Морально архетипичным тождеством такого вида является применение формулы обращения Мебиуса для выражения функции фон Мангольда через логарифм, $\Lambda = \mu * \log$, но, конечно, здесь нам нужны какие-то чуть более изощренные тождества[51]

Ясно, что, как все подобные идеи, сглаживание работает тем лучше, чем с большим количеством переменных мы имеем дело. В частности, технически сглаживание в тернарных задачах работает *гораздо* лучше, чем в бинарных.

На этом пути в 1937 Виноградову удается снять в первой теореме Харди—Литтлвуда зависимость от гипотезы Римана и, тем самым, полностью решить *асимптотическую* тернарную проблему Гольдбаха, т.е. доказать, что всякое *достаточно большое* натуральное число является суммой трех простых — то, что в советской литературе называлось теоремой Гольдбаха—Виноградова.

5.4. Решил ли Виноградов проблему Гольдбаха?

В советское время было принято утверждать, что нечетную проблему Гольдбаха решил Виноградов в 1937 году. Для этого, конечно, приходилось прямо фальсифицировать формулировку проблемы Гольдбаха, что и начало *систематически* происходить начиная примерно с 1947 года — и, уже совсем беззастенчиво, с 1951 года. В 1937 году все еще были в курсе того, что именно спрашивали Гольдбах и Эйлер. Эта историческую аномалию подробно обсуждает Успенский в [92].

Вот, например, что пишет Гельфонд: "В теории чисел наиболее крупные и блестящие результаты, полученные за последние тридцать лет, принадлежат, несомненно, И. М. Виноградову. ... Этот же глубокий метод позволил И. М. Виноградову [69] доказать, что всякое нечётное целое число представляется в виде суммы трёх простых чисел, и решить тем самым знаменитую проблему Гольдбаха. ... Гольдбах в 1742 г. высказал предположение, что всякое *достаточно большое* нечётное число может быть представлено в виде суммы трёх простых нечётных слагаемых. Все попытки доказать это предположение до работ И. М. Виноградова были безуспешны. Любопытно отметить, что Харди и Литльвуду, которые пользовались методом особых рядов, послужившим им для доказательства теоремы Гильберта—Варинга, удалось построить доказательство для предположения Гольдбаха, но это доказательство опирается на правильность так называемой обобщённой гипотезы Римана в теории L-рядов, которая и до сегодняшнего дня ещё не доказана", [27], с. 52–53.

[51] Современным воплощением основной идеи Виноградова является **тождество Вона** [343], в котором фигурируют отсечки функций фон Мангольдта и Мебиуса и которое стало де факто стандартом современного изложения работы Виноградова. Однако в действительности, в дальнейшем было открыто много тождеств такого типа более высокой степени, которые используются, например, во всех "элементарных" доказательствах асимптотического закона распределения простых, начиная с работ Сельберга, Эрдеша и Бомбьери.

А вот, для разноообразия, Марджанишвили: “В том же 1937 году И. М. Виноградов не только решил знаменитую проблему Гольдбаха о представимости всякого *достаточно большого* нечётного N в виде $N = p_1 + p_2 + p_3$, где p_1, p_2, p_3 – простые, но и …”, [72].

Но, конечно, всех превзошла анонимная “юбилейная комиссия”, созданная для празднования 60-летия Ивана Матвеевича: “И. М. Виноградовым был создан очень общий, глубокий и весьма плодотворный метод в аналитической теории чисел, силу которого Иван Матвеевич блестяще продемонстрировал, решив этим методом стоявшую нерешенной столетия проблему Гольдбаха. Гольдбах в 1742 г. высказал предположение, что всякое *достаточно большое* нечетное число может быть представлено суммой трех простых чисел. Все попытки крупнейших математиков решить эту проблему до 1937 г., когда она была решена И. М. Виноградовым, оканчивались неудачами”, [76].

Замечу, что сам Иван Матвеевич был в курсе того, как именно возникла проблема Гольдбаха, и в чем она состояла: “В 1742 г. из переписки Гольдбаха с Эйлером возникла «проблема Гольдбаха», представляющая собою гипотезу, согласно которой *всякое* четное число, не меньшее шести, есть сумма двух нечетных простых чисел (бинарная проблема Гольдбаха), а *всякое* нечетное число, не меньшее девяти, есть сумма трех нечетных простых чисел (тернарная проблема Гольдбаха) “, [25].

В чрезвычайно интересной и в других отношениях статье Карацубы [40] воспроизводится рисунок Виноградова на тему “die reine und angewandte Goldbachsche Vermutung”. Технически как художник Виноградов, конечно не дотягивает до Васи Ложкина и свою роль в решении проблемы Гольдбаха несколько преувеличивает. Но подходы Харди и Шнирельмана к проблеме Гольдбаха его рисунок сравнивает довольно точно.

Чудаков считал работу Виноградова *выдающимся продвижением* в направлении проблемы Гольдбаха, НО НЕ ЕЕ РЕШЕНИЕМ. Вот, например, что он пишет в своем обзоре: “Недавно советская математика праздновала свою крупную победу — академику И. М. Виноградову удалось *почти* полностью решить старую и знаменитую проблему — проблему Гольдбаха”. И, чуть далее: “Работа Виноградова, без сомнения, является самым крупным шагом вперед в решении проблемы Гольдбаха. Со времени опубликования этой работы можно считать, что полное решение проблемы Гольдбаха уже *не за горами*”, [99]. Не изменил он эту точку зрения и в 1950-е и 1960-е годы.

5.5. Эффективизация доказательства Виноградова

Первое доказательство Виноградова не только не решало проблему Гольдбаха, но и вообще не было эффективным, т.е. не позволяло дать *никакой* оценки того места C, начиная с которого каждое число есть сумма трех простых.

Вот, что, например, пишет по этому поводу в своем обзоре Чудаков: “Другой вопрос, который в этой проблеме стоит на очереди дня, — это численный подсчет той границы, начиная с которой a_n заведомо отлично от нуля. Трудности здесь связаны с вышеупомянутыми проблемами распределения простых чисел в арифметических прогрессиях: там встречаются доказательства „неэффективного"характера, т. е. такие, которые не содержат указания на способы численного расчета встречающихся в них постоянных”, [99].

Довольно часто встречается упоминание, что доказательство Виноградова было эффективизировано тогда же, в 1939, в [неопубликованной] кандидатской диссертации его ученика Бороздина[52]. Вот, например, примечание Андрея Николаевича Колмогорова в книге Куранта и Роббинса: “Неэффективный характер теоремы Виноградова устранен

[52] В разных источниках я видел несколько других написаний его фамилии: Бороздкин, Бородзин,…

в 1939 г. К. Г Бороздиным, показавшим, что в виде (*) представимо любое нечетное $n > C = e^{e^{e^{41,96}}}$; в 1956 г. ему же удалось снизить эту оценку до $C = e^{e^{17}}$. Конечно, уменьшение константы C до разумных пределов позволило бы решить гипотезу о представимости в виде (*) нечетных n, $6 < n < C$, — и тем самым любого нечетного $n > 6$ — посредством прямой вычислительной проверки.”

Успенский в [92, 93] приводит расшифровку инициалов, Константин Григорьевич Бороздин[53]. Чудаков и Климов [102] (и в дальнейшем Касимов [42]), которые, казалось бы, должны знать лучше, поскольку сами непосредственно этим занимались, пишут К. Г. Бороздкин[54] и ссылаются на труды Всесоюзного Математического Съезда 1956 года, содержащие оценку $C = e^{e^{16.038}}$, однако, насколько мне известно, доказательство этого результата также не было опубликовано, что вызывает уже *серьезные* вопросы.

Я не смог найти *никаких* публикаций того времени, содержащих подобный результат. Здесь может быть много разных объяснений. Возможно, такая эффективизация действительно была тогда получена, но не опубликована по условиям предвоенного и военного времени. Возможно, она содержалась в диссертации, где позднее была обнаружена ошибка. Возможно, сразу было осознано, что оценку можно значительно улучшить. Возможно, к 1941 стало ясно, что эффективизацию следует проводить по-другому. Возможно, кто-то из вождей по каким-то причинам был против публикации этих результатов. Например, чтобы не подчеркивать неэффективный характер исходного результата. Как бы то ни было, ЗАГАДКА ОСТАЕТСЯ: “и кто кого под ноготь, и кто кого за локоть — об этом знает только подземный Моссовет.” Чтобы узнать, что именно произошло, необходимо обращение к архивам и серьезное историческое исследование.

В любом случае, доказательство Марджанишвили [256] 1941 года фактически могло бы быть записано как эффективное — хотя удивительным образом он сам об этом ничего не говорит. А в 1947 году Чудаков опубликовал эффективное доказательство [330]. Разумеется, доказательство в книге Виноградова [25] уже эффективно, хотя все еще не дает явной оценки. Фактические оценки обсуждаются в § 8.

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПО ЧЕТНОЙ ПРОБЛЕМЕ ГОЛЬДБАХА

В отношении четной проблемы Гольдбаха мы сегодня продолжаем находиться примерно в том же месте, где находились исследования по нечетной проблеме Гольдбаха до 1937 года. Более того, один из двух рекордных результатов, теорема Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана, и был доказана в 1937 году. Второй рекордный результат, теорема Чэнь Джинжуна, был *опубликован* в 1973 году.

6.1. Теорема Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана

Четная гипотеза Гольдбаха не доказана даже в асимптотическом смысле. Однако третья теорема Харди—Литтлвуда утверждала, все еще ПО МОДУЛЮ ОБОБЩЕННОЙ ГИПОТЕЗЫ РИМАНА, что *почти все* четные n являются суммами двух простых чисел.

В том же 1937 году этот условный результат был превращен в *безусловный*. А именно,

[53] Очевидно, это не может быть Константин Васильевич Бороздин, который защитил кандидатскую диссертацию в 1962 году.

[54] В обзоре Бредихина К. В. Бороздкин...

теорема Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана [151, 180**?**][55] утверждает, что *почти все* в смысле натуральной плотности четные n являются суммами двух простых чисел.

Обратите внимание, что в то время как в теореме Харди—Литтлвуда—Виноградова почти все означает все, кроме конечного числа, в теореме Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана почти все используется в гораздо более слабом смысле — все, кроме множества плотности 0.

Разумеется, следующий вопрос теперь состоит в том, насколько велико множество исключительных четных чисел, не представимых в виде суммы двух простых. Первоначальная оценка Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана состояла в том, что количество исключительных чисел, не превосходящих x растет не быстрее, чем $x/\ln(x)^a$, для *любого* фиксированного $a>0$.

Позже были получены гораздо более точные оценки. В частности, в 1975 году Хью Монтгомери и Роберт Вон [262] показали, что для достаточно больших x количество исключительных чисел, не превосходящих x растет не быстрее, чем x^{1-a}, для *некоторого* фиксированного $a>0$. В 1980 году Чэнь Джинжун и Пань Чэндонг [140] доказали, что в качестве a здесь можно взять $a=0.01$, с тех пор эта оценка многократно улучшалась.

Воспроизведу без комментариев последний абзац книги Николая Григорьевича Чудакова: “Что касается старой гипотезы Эйлера о том, что $\nu(x)\equiv 0$, т. е. что всякое четное число равно сумме двух простых, то в настоящее время не известны пути оправдания этой гипотезы. Наоборот, некоторые факты вызывают опасение, что она не отвечает действительности (см. Линник, [61]). Историю вопроса см. Чудаков, [99].”, см. [100].

6.2. Результаты полученные методом решета

В отличие от довоенных результатов по нечетной проблеме Гольдбаха все послевоенные результаты по четной проблеме Гольдбаха учитывают предложенные Линником, Сельбергом и Бомбьери варианты большого решета. Морально, отличие состоит в том, что теперь количество вычеркиваемых классов зависит от p, но есть и другие важные технические отличия, которые делают большое решето много более эффективным, чем решето Бруна.

- $p+p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, Альфред Реньи, [80, 81], 1947–1948.
- $p_1p_2p_3+p_4p_5p_6$, Акийо Тогаси и Сабуро Учияма, [334], 1964.
- $p_1+p_2p_3p_4p_5$ или $p_1p_2+p_3p_4p_5$, Сабуро Учияма, [335], 1964.
- $p_1p_2+p_3p_4p_5$, Аскольд Иванович Виноградов, [16, 17], 1964.
- $p_1+p_2p_3p_4p_5$, Марк Борисович Барбан[56], [3], 1963, и независимо Пань Чэндонг, [273, 274], 1963 (см. по этому поводу обзор [4]); Мийоко Учияма и Сабуро Учияма [337], 1964.

[55] Дэвид Бёртон [131] приписывает теорему Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана *лично* товарищу Ивану Матвеевичу Виноградову: “Vinogradov showed that if $A(x)$ is the number of even integers $n\le x$ that are not the sum of two primes, then $\lim_{x\to\infty} A(x)/x=0$. This allows us to say that “almost all” even integers satisfy the conjecture. As Edmund Landau so aptly put it, “The Goldbach conjecture is false for at most 0% of all even integers; this at most 0% does not exclude, of course, the possibility that there are infinitely many exceptions.””. Т.е. не “методом Виноградова” или что-то в таком духе, а “Виноградов доказал”.

Эта цитата *буквально* воспроизведена в статье Садеха Назардоняви [267], специально посвященной *истории* проблем Ландау. Там этот результат тоже приписывается лично Ивану Матвеевичу Виноградову. Причем в эпоху постправды сам факт появления такого текста в интернете является для многих *доказательством* — или, как это теперь называется, **пруфом** — истинности содержащихся в нем утверждений.

[56] Некролог [21] начинается словами “17 июля 1968 г. в возрасте 33 лет трагически погиб один из выдающихся представителей советской школы теории чисел Марк Борисович Барбан.” Трех из авторов этого некролога я близко знал и хорошо понимаю, какой смысл они вкладывали в эти слова. Разумеется, некро-

• $p_1 + p_2p_3p_4$, Александр Адольфович Бухштаб, [10], 1965. С другой стороны, Аскольд Иванович Виноградов, [18], 1965, заметил, что с учетом его результатов о нулях L-рядов Дирихле этот результат фактически вытекает уже из работы Ванг Юаня [358], 1960. Еще более простое доказательство предложил Сабуро Учияма [336], 1967.

• $p_1+p_2p_3$, Чэнь Джинжун [135], анонсировано в 1966, полное доказательство опубликовано в 1973; более простое доказательство, учитывающее улучшения, предложенные Робертом Воном, опубликовал Хайни Хальберштам [196], 1974; еще более простое доказательство предложил ученик Вона Питер Росс [302, 303], 1975, потом были предложены и другие доказательства.

Чэнь Джинжун это, разумеется, тот самый Чэнь Джинжун, который фигурировал в части, посвященной проблеме Варинга в связи с вычислением $g(5)$ и $g(4)$. По общему признанию, это одна из абсолютных вершин в использовании методов решета, основные идеи этого доказательства очень детально и выпукло изложены в книге Хальберштама и Рихерта [197].

Наряду с теоремой Чудакова—ван дер Корпута—Эстермана этот результат Ченя продолжает оставаться лучшим приближением к четной гипотезе Гольдбаха. С другой стороны, из предшествующего описания видно, что сам этот результат является естественным итогом многих десятилетий работы многих выдающихся специалистов.

6.3. Верхняя граница в проблеме Гольдбаха

Ясно, что наибольшее количество представлений n в виде суммы двух простых $n = p+q$ равно количеству простых между $n/2$ и $n-2$. Как показали Жан-Марк Дезуйе, Эндрю Гранвилл, Владыслав Наркевич и Карл Поммеранс [166], наибольшее значение n, для которого эта верхняя оценка фактически достигается, равно 210.

Ясно, что особая роль 210 здесь связана с тем. что $210 = 2\cdot3\cdot5\cdot7$, так что если $105 \le p \le 208$ простое, то $2 \le 210-p \le 105$ тоже простое — кстати, почему такое же рассуждение не работает для $2310 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ и для $30030 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13$?

Чрезвычайно забавно, как это делается. При помощи метода решета довольно просто доказать, что для $n \ge 2\cdot10^{24}$ здесь имеет место строгое неравенство. Таким образом, остается лишь проверить, что и для всех $210 < n < 2\times10^{24}$ также имеет место строгое неравенство. Человеку, далекому от научных вычислений, может показаться, что достаточно найти для каждого такого n простое число p, $n/2 \le p \le n-2$, такое, что $n-p$ не является простым. Однако в действительности провести такой поиск $2\cdot10^{24}$ раз немыслимо дорого даже сегодня. В 1993 году — next to impossible.

Поэтому авторы [166] предлагают критерий того, что строгое неравенство здесь выполняется для довольно длинных интервалов натуральных чисел (лемма 2 цитированной работы). После этого требуемые интервалы строятся с помощью классического **критерия простоты Прота** 1878 года.

Напомним, что **числами Прота** называются числа вида $p = m\cdot2^k+1$, где $2^k > \sqrt{p}$. Если найдется a такое, что $a^{(p-1)/2} \equiv -1 \mod p$, то число Прота p простое. Заметим, что лестница простых в работе Хельфготта и Платта [219] также строится именно с помощью простых Прота.

лог в УМН ограничен официальными рамками. Чуть больше информации дает письмо Аскольда Ивановича Виноградова [16] от 2 августа 1968 года, адресованное Алексею Андреевичу Ляпунову. Заметим, что на сайте СО РАН это письмо атрибутировано *ошибочно*.

После этого остается только превратить это в фактическое вычисление. Вот как это описывается в [166]: "Enrico Bombieri kindly programmed the above in C for us ... using a multiprecision routine. For simplicity's sake he applied Lemma 2, using the first construction above, nineteen times, to rule out all n in the range $210 < n < 9,330,712$. Then he used the second construction above (that is, using Proth's test) for all remaining n, which took a further sixty-three applications of Lemma 2. In all cases the set $\mathscr{P}$ contained at most 465 elements (which corresponds to searching for primes through about $5\log^2 x$ numbers around x), and we had $z \geq 67$. The total run time on a Sparc 2 was just under 75 minutes. A copy of the computer code is available upon request from the second-named author".

7. НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ЧУДАКОВ

Эта статья — как и все остальные статьи этой серии — никогда не была бы написана, если бы два человека в 1967–1969 годах не изменили линию моей жизни.

Первым из них был Иосиф Яковлевич Веребейчик, который взял меня в свой класс, когда я перешел в 30-ю школу. Осенью 1967, когда мы пришли в 9-й класс, он прочел с нами "Основы анализа" Эдмунда Ландау[57] [58]: аксиомы Пеано, сечения Дедекинда, комплексные числа, вот это все, с полными доказательствами, с проверкой всех корректностей, всех тождеств и т.д. Но весной 1968 после изучения пределов не продолжил по Ландау [59], а соскочил на "Основы современного анализа" Жана Дьедонне [36], правда, уже не так подробно, пропуская некоторые более сложные доказательства, и не целиком, без последних глав. Когда он рассказал нам канторовский диагональный процесс, я понял, что буду заниматься не естествознанием[58], а математикой.

Вторым был отец одного из моих ближайших школьных друзей, Саши Анфертьева[59], Николай Григорьевич Чудаков — вот тот самый Чудаков, которому принадлежит легендарный результат по четной проблеме Гольдбаха [97, 98], автор классической книги по L-функциям [100][60]. В 1962–1972 годах Николай Григорьевич жил в Петербурге и работал в ПОМИ (в те годы ЛОМИ) и в 1968–1972 годах я имел возможность с ним постоянно общаться. С осени 1967 или зимы 1968 я стал все чаще бывать дома у Чудаковых—Анфертьевых. Кстати, Сашина мама, Елена Александровна Анфертьева, тоже была совершенно замечательным специалистом по теории чисел и работала на кафедре математики Политехнического Института[61].

[57] "Bitte vergiß alles was Du auf der Schule gelernt hast; denn Du hast es nicht gelernt". Предисловие к русскому переводу начинается словами "Умерший в эмиграции в Голландии в годы войны крупный немецкий математик Эдмунд Ландау..." На самом деле, как известно, Ландау умер в феврале 1938 года в Берлине. Понятно, что сегодня проверять нужно *все*, потому что во *всех* книгах *все* неправильно. Но, оказывается, и в советское время тоже.

[58] Я вырос среди физиков и инженеров и лет до пяти, а может и дольше, вообще не знал, что бывают другие профессии: "Ты физик? — Нет. Химик? — Нет. Инженер? — Нет. Так что же ты делаешь???" Много лет спустя, это ко мне вернулось. В Германии мы много общались с музыкантами, и сын наших друзей как-то спросил меня: "Ты танцуешь? — Нет. Поешь? — Нет. Играешь на рояле? — Нет. Так что же ты делаешь???"

[59] В разные периоды своей жизни Саша использовал обе фамилии своих родителей. В описываемый здесь период он был, конечно, Саша Чудаков. Однако все его опубликованные работы подписаны Александр Анфертьев.

[60] Полный список его работ приведен в [101], см. также [2].

[61] В [1], стр. 158, и [88], стр. 17, есть фотография кафедры математики Политехнического института в 1939 году. В центре первого ряда Родион Осиевич Кузьмин, Николай Максимович Гюнтер, Сергей Натанович Бернштейн. Елена Александровна в третьем ряду, рядом с Михаилом Александровичем Гельбке, работа которого упоминалась в [12]. На этой фотографии ей 23–24 года. Серьезная кафедра, кстати, более чем.

Когда Саша нас познакомил, он, видимо, сказал, что я увлекаюсь математикой и Н.Г. начал со мной *беседовать*. Вначале я задавал какие-то вопросы, на которые он отвечал, потом увлекался и начинал просто рассказывать. После этого я бывал у них дома на Торжковской 2 много десятков раз, мне трудно даже вспомнить, сколько именно. И почти каждый раз минут 30–40, иногда больше, Н.Г. рассказывал мне что-то о математике. Вот так, без доски и бумаги, без формул, в основном чисто мистический и астральный план. Мне конечно, не восстановить без записей того времени все темы его рассказов, но общее ощущение было СОВЕРШЕННО ВОЛШЕБНЫМ[62].

Чаще всего Н.Г. рассказывал, конечно, что-то про теорию чисел. Вот несколько тем, которые я точно помню в его исполнении: асимпотический закон распределения простых, теорема Дирихле, L-ряды, гипотеза Римана, гипотеза Артина, совершенные и дружественные числа, проблема Гольдбаха с вариациями, диофантовы уравнения,… Кстати, я почему-то не помню, чтобы Н.Г. рассказывал мне про проблему Варинга — не может быть, чтобы не рассказывал, просто я не помню. Он подчеркивал вещи необходимые для понимания, например, использование кванторов:

- для всех натуральных чисел;
- для всех натуральных чисел, начиная с некоторого места;
- для *почти* всех натуральных чисел, в смысле плотности — какой именно!

Это *теперь* я понимаю, почему он так настаивал на аккуратности в этом месте [102].

Одна из тем, к которой он постоянно возвращался в те годы, я не помню, сколько раз, десятки раз, наверное, это трансцендентные числа, диофантовы приближения, линейные формы от логарифмов, проблема десятого дискриминанта, теоремы Лиувилля, Гельфонда, Шнайдера, Зигеля, Туэ, Рота, вплоть до почти современных тогда работ Бейкера, Старка, Шидловского и Фельдмана[63]. В результате эту часть теории чисел я определенно знал в 10-м классе школы лучше, чем сейчас, по крайней мере на фактическом уровне. Это *теперь* я понимаю, что Н.Г. просто тренировался на мне рассказывать в популярной форме то, над чем он *сам* думал в тот момент, [94]. Но от этого мой долг по отношению к нему не становится меньше.

Впрочем, мы обсуждали не только теорию чисел. С такой же легкостью Н.Г. отвечал на все мои вопросы, относившиеся к алгебре, алгебраической геометрии, топологии, анализу, логике,… Он всерьез изучал вещи типа теории схем, абелевых многообразий и т.д. и рассказывал мне про гипотезы Вейля и многое другое в таком духе. Но что меня тогда поразило больше всего, он прекрасно знал, и очевидно читал с доказательствами вещи типа теоремы Сколема, теорем Геделя, работы Дэвиса, Робинсон, Матиясевича по решению 10-й проблемы Гильберта и все с этим связанное, *казалось бы* весьма далекое от его

[62] Вот представьте себе, что автор [96], настоящий, живой, *великий* математик рассказывает это в таком же стиле не толпе школьников, а ЛИЧНО ВАМ, и умеет при этом выставлять фокус в произвольном месте, от общих философских вещей, до любой сколь угодно мелкой технической детали.

[63] С Наумом Ильичом Фельдманом я познакомился уже много позже, когда стал секретарем специализированного совета. Меня поразило в нем трудно вербализуемое, но совершенно очевидное сходство с Н.Г., он тоже целиком жил в мире духа. Для будущих историков математики задокументирую один штрих, который, видимо, теперь помню только я. Оппонентам в те годы был положен небольшой гонорар, рублей 15, что ли. Но, чтобы его получить, нужно было заполнить страницы 3 бумаг, указав номера паспорта, докторского диплома и т.д. Наум Ильич сказал, что номеров не помнит, а брать с собой бумаги в Москву не будет. Его почти буквальные слова были, что они живут вдвоем с женой, детей у них нет, сами они не бедствуют, и поэтому он будет рад подарить эти деньги своему родному университету (до войны Н.И. учился в Петербурге), и вполне достаточно того, что университет оплатил его приезд в Петербург.

непосредственных научных интересов. Про геделевскую нумерацию и нестандартные модели я тоже парадоксальным образом впервые услышал от Чудакова.

Помню, мы как-то встретились с Н.Г. на станции метро Гостиный двор, но поскольку мы дальше продолжили эту беседу на Среднем, это был год 1970 или 1971, когда я уже был не в школе, а на младших курсах мат-меха. В ожидании поезда Н.Г. начал рассказывать про теорему Морделла и теорему Зигеля, подчеркивая при этом разницу между родом 1 и родом ≥ 2, между целыми и рациональными решениями, между конечностью и конечной порожденностью. Так что минут через 15–20 я понимал, в чем состоит проблема Морделла и почему это один из самых важных вопросов во всей математике.

Но, конечно, я тогда не все понимал из его рассказов, кое-что заведомо шло поверх головы даже в студенческие годы. Я со стыдом вспоминаю, как году в 1971 или 1972 у них дома на Торжковской (в выходившей во двор комнате с балконом) Н.Г. довольно долго рассказывал мне про L-ряды Артина и их связь с законами взаимности. После чего я задал совсем глупый вопрос, из которого Н.Г. стало ясно, что в тот раз я вообще не следил за его мыслью[64]. Опять же, это *сегодня* я знаю, что в те годы в связи с формулировкой программы Ленглендса это стало горячей темой [20] и Н.Г. несомненно сам незадолго до этого освежил в голове детали всех этих конструкций.

После этого мы встречались каждый его приезд в Петербург, а в 1977 году я останавливался у него дома в Саратове, когда приезжал делать доклад по своей кандидатской диссертации[65]. Жил Н.Г. один в трехкомнатной квартире. Одна комната была его спальней, вторая — кабинетом и одновременно столовой, третья — библиотекой. В кабинете по стенкам стояли семь письменных столов (и большой обеденный стол посередине). Сменяя род деятельности Н.Г. не перекладывал бумаги, а просто перебирался за другой стол. Один из столов был астрономический. Н.Г. увлекался историей календаря и любительской астрономией, каждый день рассчитывал восход и заход Солнца и Луны и тому подобные вещи и систематически находил ошибки в соответствующих разделах газет. В библиотеке все стены были заставлены книжными шкафами, целиком заполненными математической и естественнонаучной литературой[66], все свои лингвистические и исторические книги он оставил в Петербурге Саше. Посередине стояла раскладушка, на ней я, собственно, и спал[67]. Но я не жаловался, у Н.Г. там было и много западных книг, например, все тома EGA, и много всего другого, что я *in corpore* до этого никогда не видел.

Обсуждались и персоналии математиков, в особенности советских, в Москве Н.Г. знал, разумеется, всех, начиная с 1920-х годов. Как-то раз у них на кухне зашла речь о самоубийстве Шнирельмана. Чувствовалось, что за всем этим стоят события и обстоятельства, вспоминать которые Н.Г. крайне тягостно. Он начинал фразы и внезапно останавливался. Я не буду даже пытаться реконструировать сегодня то, что тогда мог уловить из его полунамеков. Обсуждались на той кухне и более легкомысленные вещи, типа личной жизни Юрия Владимировича Линника, с которым Н.Г. и Е.А близко дружили. Во многие обстоятельства меня по малолетству, естественно, не посвящали, думаю, однако, что внезапная смерть Линника от инфаркта летом 1972 года и возвращение Н.Г.

[64] Что меня несколько оправдывает, это был чей-то день рождения или что-то в таком духе, Н.Г сидел на диване, я стоял рядом, потому что свободных мест на диване не было, и в комнате было довольно шумно.

[65] Саратовский университет был у меня ведущей организацией и Валентин Евгеньевич Воскресенский уже тогда ввел правило, что для получения отзыва необходимо лично приехать и рассказать свою диссертацию на семинаре.

[66] По моей прикидке вместе с журналами, диссертациями и всем таким примерно 5000 единиц хранения.

[67] Незадолго до этого я возил диссертацию в Минск своему первому оппоненту Дмитрию Алексеевичу Супруненко, и тоже останавливался у него в библиотеке, правда, на диванчике.

в Саратов осенью того же года, это не просто совпадение[68].

Я не знаю, почему Н.Г тратил на меня столько времени. Потому ли, что я был близким другом Саши и стал *другом семьи*? Или потому, что он относился ко мне как к ученику и будущему коллеге? Или потому, что рассказывал то, что было интересно ему самому? Или он просто скучал без преподавания?[69] В любом случае, для меня возможность близко общаться с математиком такого класса на столь раннем этапе была огромным бустом[70]. До этого я не мог себе даже представить, что можно владеть столь гигантским количеством разнородного материала на фактическом уровне и с такой легкостью им оперировать[71].

Впрочем, математика, это не единственное, в чем на меня повлияла эта семья. У них дома были тысячи книг. Ну, тысячи книг были тогда во всех образованных семьях. Но это были *другие* книги, а не стандартные собрания сочинений и "Библиотека фантастики". В комнате Е.А. многие сотни книг на английском и французском, fiction and nonfiction. А в кабинете Н.Г., кроме *части* его математической библиотеки (большая часть, как я понимаю, так и оставалась в Саратове), огромное количество классических книг на самые разные темы.

Кроме, (например!) собственно греческих и латинских классиков, я как-то заметил там изрядное количество грамматик, хрестоматий и учебников древних и восточных языков, причем не только арабского и санскрита, но и довольно экзотических (ну там, всякие "Koptische Grammatik", "Lehrbuch des Akkadischen", usw.). В недоумении я спросил Сашу, его ли это книги. Саша ответил, что нет, их покупал Николай Григорьевич. В ответ на мой прямой вопрос, учил ли Н.Г. сам все эти языки, Саша ответил, что нет, но покупал эти книги потому, что ПОНИМАЛ ИХ ОБЪЕКТИВНУЮ ЦЕННОСТЬ[72].

Именно это, понимание долговременных исторических ценностей, не зависящих от наших текущих взглядов, вкусов, возможностей, интересов и предпочтений, стало мощным контрапунктом императиву научного и технического прогресса, с которым я рос до

[68] Косвенным, но веским подтверждением этого служит фраза "...работая с 1962 по 1972 г. по приглашению Ю. В. Линника в ЛОМИ..." из некролога [7]. Ну и, конечно, взгляд на список тех кто подписал, и кто не подписал этот некролог.

[69] В Петербурге Н.Г. работал в ПОМИ на научной ставке, а в университете лишь изредка читал спецкурсы на темы далекие от тогдашних интересов кафедры, которые никто особенно не рекламировал и на которые приходило буквально несколько человек.

[70] В принципе, сформировать математика из любого ребенка и даже подростка чрезвычайно легко. Нужно просто выдать ему такого учителя математики, как Иосиф Яковлевич и живого профессора математики, который будет с ним разговаривать, такого как Николай Григорьевич. Ну, разговаривать-то мы все горазды, но где же взять столько школьных учителей?

[71] Сейчас я знаю, что никакого секрета здесь нет. Математика, как редко какое другое дело, затачивает под себя личность человека и создает у него новые органы чувств: "gli occhi nella fronte e nella mente". Это ровно то, что говорится по поводу "le sentiment du fer" в повести "El maestro de esgrima" Артуро Переса-Реверте: "Esa cualidad consiste en una especie de sexto sentido, que permite prolongar hasta la punta del arma la sensibilidad táctil de los dedos que sostienen el florete... — También me gustaría aprender eso — dijo la joven. — Imposible. Eso ya es sólo cuestión de práctica. No hay en ello ningún secreto; nada que pueda adquirirse con dinero. Para tenerlo, es necesaria toda una vida. Una vida como la mía" — "Это качество своего рода шестое чувство, которое позволяет продлить до острия оружия тактильную чувствительность пальцев, держащих рапиру, ... — Мне тоже хотелось бы этому научиться, — сказала девушка. — Невозможно. Это исключительно вопрос опыта. В этом нет никакого секрета; ничего, что можно было бы приобрести за деньги. Чтобы овладеть этим, нужна вся жизнь. Такая жизнь, как моя." — Ну или такая, как Николая Григорьевича.

[72] Думаю, однако, что был и еще один мотив. Несомненно, увлекаясь историей астрономиии Н.Г. читал ван дер Вардена [15] и Нейгебауэра [75]. Ну а поскольку имел привычку проверять все сам, то решил выучить и клинопись, ну, может не до уровня свободного чтения, но чтобы иметь возможность сверять переводы. По годам все сходится.

этого[73]. Главное, чему я научился у Саши, состояло в понимании того, что знание в области истории и филологии носит столь же точный и определенный характер, как знание в области физики и математики, а все, кто ссылается на какую-то невероятную сложность языковых, исторических или социальных явлений, просто неучи, шарлатаны или халтурщики.

8. ОКОНЧАТЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НЕЧЕТНОЙ ПРОБЛЕМЫ ГОЛЬДБАХА

Полное решение проблемы Гольдбаха, как и других подобных проблем, требует перекрытия асимптотической границы, начиная с которой результат доказан, и экспериментальной границы, до которой он может быть проверен чисто вычислительными средствами.

8.1. Экспериментальные подтверждения

Мое глубокое убеждение состоит в том, что проблема Гольдбаха не могла бы быть решена без фантастического прогресса в вычислительной области. Если этому аспекту не уделяется должного внимания, то только потому, что большинство людей, не занимавшихся научными вычислениями — в том числе и большинство профессиональных математиков! — не представляют себе разницу между 10^8 и 10^{30}.

8.1.1. Четный Гольдбах

Перечислим основные этапы этой экспериментальной проверки.

• $n < 33 \cdot 10^6$, Шень Мок-Конг, 1964. В этой статье предложен метод проверки гипотезы Гольдбаха при помощи решета по таблицам простых чисел, который использовался в дальнейшем.

• $n < 10^7$, Майрин Стайн и Поль Стайн, [325], 1965. При этом они использовали компьютер `MANIAC II` Лос Аламоской Лаборатории.

• Ян Боман, Карл-Эрик Фрёберг [117], 1975 — *количество* представлений чисел ≤ 350000 как суммы двух простых.

• $n < 10^8$, Уильям Лайт[74] и ученики, [245], 1980.

• $n < 2 \cdot 10^{10}$, Эндрю Гранвилл, Ян ван де Луне, Херман те Риле, [191], 1989. При этом использовался векторный компьютер `CDC Cyber 205`.

• $n < 4 \cdot 10^{11}$. Матти Синисало [319], 1993. При этом тоже использовался векторный мейнфрейм `IBM 3083`.

В проблеме Мерсенна примерно в это время динозавры проиграли эволюционную гонку млекопитающим [13] — а здесь, как мы увидим, не до конца. Это связано с тем, что быстрая проверка гипотезы Гольдбаха требует хранения *огромных* таблиц простых чисел и, тем самым, предъявляет чрезмерные требования к памяти компьютера.

• $n < 10^{13}$, Жан-Марк Дезуйе и Херман те Риле [167], 1997. Около 53 часов вычисления на `Cray C98`.

[73] “Mas no tengo la pretensión de hacerle creer que haya en ello un móvil moral. Limitémo nos, se lo ruego, a considerar el asunto como una cuestión de pura estética.”

[74] Вот многих местах смешная опечатка, в качестве первого автора этой статьи указывается некий Уильям Ланкастер — явный намек на адрес авторов, University of Lancaster.

• $n < 10^{14}$, Жан-Марк Дезуйе, Херман те Риле, Янник Сауте, [169], 1998. Основная часть вычисления была проведена на суперкомпьютере Cray C916 в SARA (= Stichting Academisch Rekencentrum Amsterdam) и на серверном кластере Power Challenge Array R10000 в INRIA (= Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique).

• $n < 4 \cdot 10^{14}$, Йорг Рихштайн, [299], 2001. Вычисление распределялось между семью рабочими станциями Sun Ultra 1 и шестью рабочими станциями Sun-4, проверявшими около 10^7 четных чисел в секунду. Общее время, потребовавшееся для этого вычисления составило около 130 дней [в бэкграунде], из которого больше половины заняло порождение самих списков простых чисел в требуемых интервалах.

• $n < 4 \cdot 10^{18}$, Томас Оливейра е Сильва[75], Зигфрид Херцог и Сильвио Парди, [271], 2014. Кроме двух десятков университетских и других исследовательских ресурсов в Италии (включая, *например*, INFN =L'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare), Португалии, Испании, Германии и Франции[76], этот огромный вычислительный проект 2005–2013 годов потребовал участия двух крупных специализированных систем: суперкомпьютера Cray XT5 Kraken в NICS (= National Institute of Computational Sciences) и кластера процессоров Xeon в NCSA (= National Centre for Supercomputer Applications).

8.1.2. Нечетный Гольдбах

Проверка нечетной гипотезы Гольдбаха производится при помощи четной гипотезы Гольдбаха и построения лестниц простых чисел, как описано во введении. Морально, это примерно та же идея, что метод подъема Диксона, подробно изложенный в [12].

• $n < 10^{20}$, Жан-Марк Дезуйе, Гоув Еффингер, Херман те Риле и Дмитрий Зиновьев, [167], 1997, *условно*, по модулю GRH.

• $n < 10^{20}$, Янник Сауте [305], 1998. Вычисление распределялось между сорока рабочими станциями Sun и заняло в общей сложности приблизительно 4 дня.

• $n < 8.37 \cdot 10^{26}$, Томас Оливейра е Сильва, Зигфрид Херцог и Сильвио Парди, [271], 2014.

• $n < 8.875 \cdot 10^{30}$, Харальд Хельфготт и Дэвид Платт, [219], 2013. Фактически проверка доведена до

$$8\,875\,694\,145\,621\,773\,516\,800\,000\,000\,000.$$

При этом использовались *три* кластера, 48-ядерный AMD Magny Cours в Warwick University, и два кластера PowerPC в Université de Paris VI/VII. Собственно построение лестницы из простых при помощи программ на C и C++ потребовало примерно 400000 часов процессорного времени. Кроме того, дополнительно 139917 чисел проверялись на простоту при помощи Pari.

Поскольку используемый при этом алгоритм довольно близок к использовавшимся ранее (хотя есть и важные отличия, слишком специальные, чтобы обсуждать их здесь), Хельфготт и Платт задаются вопросом, с чем может быть связано улучшение на множитель $8 \cdot 10^{10}$, по сравнению с [305]. Множитель 10^7 проистекает из того, что они берут

[75]Томас Оливейра э Сильва профессор факультета электроники, телекоммуникации и информатики университета Авейру http://sweet.ua.pt/tos/ Он опубликовал больше дюжины совершенно нетривиальных компьютерных вычислений в теории чисел и теории дискретных динамических систем — не только гипотеза Гольдбаха, но и оценки для L-рядов, гипотеза Артина, гипотеза близнецов, prime gaps, уравнение Пелля, гипотеза Коллатца и ее обобщения, полиомино и т.д., при том, что его основная область интересов все же относится к теории управления, адаптивным фильтрам, signal processing и анализу спектров!

[76]См., например, http://sweet.ua.pt/tos/goldbach.html#w

результат [271] вместо [319] в качестве базы. Кроме того, их вычисление использовало в 10 раз больше CPU time. После этого все еще остается множитель 800, который трудно объяснить и который может быть связан, по крайней мере отчасти, с возросшей тактовой частотой и длиной слова современных процессоров, а также более быстрой памятью значительно большего объема, что позволяло эффективнее организовать решето, и, возможно, с какими-то программными факторами.

• $n < 10^{27}$, Эдуард Роуре, Артур Травеса, [304], 2016. В этой работе произведено независимое подтверждение части вычисления Хельфготта и Платта, необходимое для доказательства тернарной гипотезы Гольбдаха. Вычисление проводилось буквально в `Mathematica 7.0` на вычислительном кластере `Hipatia` в Universitat de Barcelona.

Обратите внимание, насколько нечетный Гольдбах проще четного как *вычислительная* задача. https://atlas.mat.ub.edu/personals/roure/stairway/

8.2. Асимптотическая граница

Первоначальное доказательство Виноградова не давало никакой оценки того места V, начиная с которого каждое нечетное число есть сумма трех простых — обычно V называется **константой Виноградова**. С этой точки зрения доказательства асимпототических результатов можно разделить на следующие пять типов.

• **Неэффективные**, с помощью которых нельзя получить *никаких* явных оценок возникающих констант.

• **Эффективные**, но **неявные**, с помощью которых можно было бы в принципе получить какие-то оценки, но это не сделано — например, потому, что получающиеся при этом оценки все равно будут совершенно нереальными.

• **Явные**, но **нереальные** — речь идет об оценках типа $10 \uparrow\uparrow\uparrow 3$ или что-нибудь в таком духе, заведомо out of this world.

• **Реальные**, но **недоступные** — для проблемы Гольдбаха оценки типа $V \leq 10^{1000}$, не выглядящие слишком фантастическими, но находящиеся далеко за пределами наших фактических вычислительных возможностей в любом обозримом будущем.

• **Доступные** — вот примерно такие как $V \leq 10^{30}$, до которых мы можем фактически надеяться досчитать на наших сегодняшних компьютерах.

В § 5 мы уже упоминали, что в 1939 году [легендарный] Бороздин[к]ин дал первую [легендарную] оценку V, а потом в 1956 году понизил эту оценку до чего-то в духе $V < 10^{4008660}$, все еще совершенено умозрительного.

8.2.1. Безусловные результаты

С тех пор оценки константы V многократно улучшались. Вот несколько типичных *безусловных* результатов — были и другие, например, результаты, дававшие чуть худшие оценки, и условные результаты, о которых пойдет речь далее.

• $V \leq e^{e^{11503}} \approx 10^{43001}$, Чэнь Джинжун, Ванг Тьяндзе, [141], 1989.

• $V \leq e^{e^{9715}} \approx 10^{7194}$, Чэнь Джинжун, Ванг Тьяндзе, [142], 1996.

• $V \leq e^{3100} \approx 10^{1347}$, Лью Мингчит, Ванг Тьяндзе, [254], 2002.

Однако, в таком виде все эти оценки, очевидно, все еще относятся к категории совершенно недоступных и путей дальнейшего существенного их улучшения на пути Харди—Литтлвуда—Виноградова не видно.

8.2.2. Условные результаты

В отличие от результатов предыдущего подпункта перечисленные ниже результаты зависят от справедливости GRH.

- $V \leq e^{114} \approx 3 \cdot 10^{49}$, Ванг Тьяндзе, Чэнь Джинжун, [352], 1993.
- $V \leq 10^{20}$, Дмитрий Зиновьев, [368], 1997.

В сочетании с упомянутым в предыдущем пункте проверкой нечетной гипотезы Гольдбаха до 10^{20} (также по модулю GRH!) это дает следующий окончательный результат.

- Нечетная гипотеза Гольдбаха справедлива по модулю GRH, Жан-Марк Дезуйе, Гоув Эффингер, Херман те Риле и Дмитрий Зиновьев, [167], 1997.

Таким образом, проблема, которую проставил перед собой Хельфготт, состояла в том, чтобы получить такого же типа оценки без предположения справедливости GRH.

8.3. Работа Хельфготта

Если смотреть только на формулировку результата, Хельфготт сделал по отношению к работе Дезуйе, Эффингера, те Риле и Зиновьева то же, что Виноградов сделал по отношению к работе Харди и Литтлвуда, убрал зависимость от гипотезы Римана. Но на самом деле, как и Виноградов в 1937 году, он сделал гораздо гораздо больше.

А именно, в работах [212, 213, 215][77] он переделал большие куски аналитической теории чисел с тем, чтобы понизить границы в асимптотических результатах настолько, чтобы остающиеся случаи можно было проверить на компьютере с помощью изощренных элементарных методов, что само по себе является совершенно грандиозным достижением.

В мае 2013 года он понизил границу на V до $V \leq 10^{29}$, а в декабре 2013 года — до $V \leq 10^{27}$. Вот как он сам комментирует это продвижение: “…the distance between $2 \cdot 10^{1346}$ and 10^{27} is such that we cannot hope to get to 10^{27} (or any other reasonable constant) by fine-tuning previous work. Rather, we must work from scratch…”

Для этого ему пришлось принять несколько принципиальных решений. Перечислю некоторые из них, по поводу деталей и дальнейших инноваций см. [214, 216, 217].

- Другой, чем во всех предшествующих работах, исходный выбор замены гипотезы Римана, Использование конечной проверки вместо областей, свободных от нулей L-функций.
- Связанное с этим другое разбиение на большие и малые дуги, в результате которого большие дуги стали еще меньше.
- Выбор гауссова сглаживания $t \mapsto e^{-t^2/2}$ вместо экспоненциального сглаживания $t \mapsto e^{-t}$ у Харди и Литтлвуда[78].
- Новые асимптотики на больших дугах.
- Новые оценки на малых дугах (что для меня выглядит как самая *технически* трудная часть доказательства).

[77] Прямые ссылки на тексты всех этих работ, а также популярных изложений [214, 217] и книги [216] можно найти на его странице `https://webusers.imj-prg.fr/~harald.helfgott/anglais/publications.html`

[78] “Cela m’ha pris du temps, mais le résultats devrait être applicables dans un cadre général et le lissage gaussien deviendra, j’espère, un peu plus populaire dans le travaux explicites en théorie des nombres”, [214].

Так как теперь асимптотическая и экспериментальная области перекрываются (на три порядка), каждое нечетное число $n \geq 5$ является суммой трех простых чисел, что и доказывает нечетную гипотезу Гольдбаха в исходной формулировке.

9. ЗОЛОТЫЕ ЯБЛОКИ АФРОДИТЫ

As a side note, раз уж это personal account, в 2016 году Universidad Nacional de Córdoba — той Кордовы, которая в Аргентине, а не той, которая в Андалусии — присудил Харальду Хельфготту степень доктора Honoris Causa. Я как раз оказался там по приглашению своего друга Николаса Андрюшкевича и присутствовал при награждении. Поскольку до этого я много общался с Харальдом, когда он занимал у нас кафедру Ламе[79] и уже слышал два его доклада с рассказом о доказательстве (летом 2014 года в Сеуле и потом осенью 2014 года в Петербурге), то мог следить за математикой вполуха и сосредоточиться на форме — доклад, естественно, был на испанском. Никогда ни до этого, ни после я не слышал столь нормативной и рафинированной испанской речи, напомнившей мне по стилю тексты Борхеса[80]. Как говорит по этому поводу классическая индийская пословица, “Шиву в мешке не утаишь”.

Книга Харальда [216], содержащая полное решение нечетной проблемы Гольдбаха[81], начинается со следующего эпиграфа:

ἐγγύσ δ ΄ ἦ̇ν τέλεο ὅ δέ τό τριτον ἦ̇κε ξ[αμᾶζἐ̇
σύν τῶι δ ΄ ἐξέφυγεν θάνατον καί κῆ[ρα μέλαιναν

Нет, понятно, мы все учились *понемногу*, и либерал и коммунист, и умением процитировать пару строк по-гречески в Петербурге никого не удивишь. В первой половине 1970-х воодушевление (= Begeisterung) греческим языком — подчеркиваю, не столько греческой классикой, как именно *языком* — было среди математиков общим местом. Из тех, с кем я был близко лично знаком, Борис Борисович Венков и Александр Федорович Иванов уже владели, до того, как это стало мейнстримом, греческим на уровне свободного чтения, все остальные учили, в разной степени и с разными результатами. Марк Иванович как раз в то время дочитал “Анабасис” и принялся за “Киропедию”.

Тогда это воспринималось как нечто абсолютно естественное, а сегодня трудно восстановить, была ли это просто форма эскапизма, ухода от все более гнетущих, начиная с 1968–69 годов, советских реалий, или нечто гораздо более фундаментальное, имевшее не только очевидную терапевтическую, но и чисто ноэтическую компоненту. Во всяком случае, насколько я могу судить, в отличие от других синхронных увлечений, типа буддизма, носивших повальный характер, изучению [древне]греческого языка были наиболее подвержены именно адепты core mathematics. У меня нет *очевидного* ответа. Будущему историку математики стоит, однако, попробовать осознать, почему бум изучения греческого столь тесно коррелировал с распространением теории категорий, гомологической алгебры и алгебраической геометрии[82].

[79] `https://chebyshev.spbu.ru/harald-helfgott/`

[80] Литературный стиль Харальда можно оценить по записям его лекций в Перу и Аргентине [211, 218, 220], но тут дело еще и в исполнительском мастерстве.

[81] `https://webusers.imj-prg.fr/h̃arald.helfgott/anglais/book.html`

[82] Вероятно, это была комбинация многих разноплановых факторов, совместное действие которых и произвело столь мощный кумулятивный эффект. Небольшим, но влиятельным фрагментом этой картины был эпиграф из Эсхила в вышедшей в 1972 году книге Андре Вейля “Основы теории чисел” [362]. Видимо, более эссенциально то, что набиравшее тогда силу изучение текстов Гротендика носило преимущественно чисто филологический характер, и изучение греческой грамматики выступало мощным контрапунктом.

Дома у Анфертьевых—Чудаковых собирался кружок, где филологи, историки и математики читали Платона. Я сходил на некоторое количество занятий, но после того, как несколько раз не удавалось за вечер дочитать один абзац, так как час обсуждались форма и/или функция аориста или причастия, внезапно утратил интерес. К тому моменту я уже проникся диктумом братьев Гримм (“ich weiß den Weg — ich kenne den Weg”) и ценил истинное внутреннее знание гораздо выше того внешнего знания, которое возникает при заучивании парадигм. Поэтому мне пришлось переключиться на изучение более простых языков типа фарси и вэньяня и ограничиться изучением корпуса текстов Платона во французских переводах (собственно, с тех пор я воспринимаю его легкомысленно, как французского философа: “c’est par la science et non par le nombre qu’il faut juger”). А карманы невежества собственно в греческом ликвидировать уже много позже, the easy way, работая в 1989–1990 годах профессором университета Крита в Ираклионе.

И Гесиода тоже все читали в детстве — еще не по-гречески, конечно, а в пересказах Гаспарова и Вересаева. Ну, типа, про примордиальную Ночь (Нюкс, alias Нюкта), которая родила Мороса с черной Керой, Танатоса, Гипноса, — а также Эроса, Эриду, Гераса, Момуса, Немезиду, Стикса, Харона, Мойр и кого-то там еще в количестве, Онейроса, что ли (у самого Гесиода, разумеется, всюду во множественном числе, Oneiroi = сны). Но в “Теогонии”, конечно, именно в таком порядке, вначале насильственная смерть, смерть в бою или от ран, Кера, и только потом мирная смерть от старости, Танатос.

Поэтому увидев этот отрывок в книге Харальда я удивился, что Танатос предшествует Кере. Я не помню, чтобы “Gynaikôn Katálogos” входил в мой детский круг чтения. Поэтому, чтобы понять смысл этого эпиграфа, мне пришлось заглянуть не только в греческий текст [221], но и в современный филологический комментарий [270], чтобы найти ту строку, с которой начинается приведенный Харальдом фрагмент

καί δή ἔχεν δύο μῆλα ποδώκης δῖ Ἀτ[αλάντη

и восстановить контекст.

Если опустить анализ греческих обычаев и греческих причастий, речь здесь идет о сватовстве Гиппомена к дочери Схенея. Чтобы избежать брака [быстроногая] [богоподобная] Аталанта вызывает женихов на состязание в беге, в котором она, вооруженная копьем, их преследует и, настигнув, убивает. И только Гиппомену удалось победить, воспользовавшись подарком Афродиты — тремя золотыми яблоками, которые он поочередно бросает на землю, чтобы отвлечь и задержать Аталанту. В результате он приходит к финишу первым.

Вот как комментирует этот фрагмент текста Кирк Орманд: “the prize was not equal for them both: for she, swift-footed godlike Atalanta ran refusing the gifts of golden Aphrodite but for him the race was a matter of life, either to be taken or to escape ... Remarkably, however, when the race has these elements of hunt, it is always Atalanta who is hunting, and the suitor who is the hunted” [270] — или, в версии Юрия Ивановича Манина, “не мы выбираем математику, а она выбирает нас”.

Параллельная тема, с небольшими вариациями, известна нам из рассказов Марко Поло про правнучку Угэдэй-кагана, Хутулун [= Аталанта], alias Ай-Ярук. С тем, конечно, что она заявила, что выйдет замуж только за того, кто победит ее в монгольской борьбе (Үндэсний бөх). Кроме того, проигравший не рисковал быть убитым, но должен был пригнать ее отцу Хайду табун из 100 лошадей. Если верить Марко Поло, in half no time Хайду стал владельцем десятков тысяч лошадей. Как известно, именно с этим связана традиционная одежда монгольских борцов — короткие рубашки-распашонки с открытой грудью, демонстрирующие, что борец мужчина.

Воспроизведу теперь перевод эпиграфа целиком, вместе с *отсутствующей* в [216] первой строкой:

Теперь у быстроногой Аталанты было *два* яблока.
Но цель была близка, он бросил на землю *третье*
И этим спасся от Танатоса и черной Керы

— избежал как забвения, так и непосредственной угрозы насильственной смерти. Кроме прямого упоминания четной и нечетной проблем Гольдбаха, здесь есть еще несколько более или менее очевидных отсылок к содержанию и структуре текста и внешних аллюзий, некоторые из которых я считал. Не сомневаюсь, однако, что выбирая этот эпиграф Харальд имел в виду и что-то еще, что от меня ускользнуло. Впрочем, вряд ли эти скрытые смыслы были рассчитаны на объяснение. If this is not beautiful, I don't know, what is.

10. ДЕШЕВ ЛИ ЭКСПЕРИМЕНТ В МАТЕМАТИКЕ?

10.1. Другие адитивные задачи

Сама по себе проблема Гольдбаха предоставляет мало интересного материала для эксперимента на *бытовом* компьютере. Однако есть огромное количество близких по типу аддитивных задач, которые предоставляют большой простор для составления заданий учебного характера, см. [14] и содержащиеся там ссылки.

Напомним, например, что знаменитая **гипотеза Харди—Литтлвуда** утверждает, что любое достаточно большое натуральное число n, само не являющееся квадратом, представимо в виде суммы $p+m^2$ простого и квадрата.

• В том же 1937 году тем же методом Эстерман [178] получил следующее совместное приближение к бинарной гипотезе Гольдбаха и гипотезе Харди—Литтлвуда. Любое достаточно большое натуральное число представимо в виде суммы $p_1+p_2+m^2$ *двух* простых и квадрата.

• В 1959 году Юрий Владимирович Линник [68] получил еще одно важное продвижение в направлении этой гипотезы. Любое достаточно большое натуральное число представимо в виде суммы $p+m_1^2+m_2^2$ простого и *двух* квадратов.

Задача. Найдите те числа $n \leq 100$, которые не представляются в виде m^2+p, Повторите этот эксперимент для $n \leq 1000$. Появляются ли при этом новые исключения, не являющиеся квадратами?

Задача. Найдите те числа $n \leq 100$, которые не представляются в виде l^2+m^2+p, Повторите этот эксперимент для $n \leq 1000$. Появляются ли при этом новые исключения?

В 1849 году де Полиняк сформулировал весьма сомнительное утверждение, что *любое* нечетное число $n>1$ представимо в виде 2^k+p, для некоторой степени двойки и некоторого p, которое либо просто, либо равно 1. Романов [301] доказал, что числа, представимые в таком виде, имеют положительную плотность и уточнил гипотезу де Полиняка следующим образом: верно ли, что *начиная с некоторого места* каждое нечетное натуральное число представляется в виде 2^k+p, для некоторой степени двойки и некоторого простого p?

Задача. Каких чисел среди нечетных $n \leq 10^6$ больше, тех, которые представляются в виде 2^k+p, или тех, которые в таком виде не представляются?

Как заметил в 1950 году Эрдеш, существует бесконечно много нечетных чисел, не представимых в виде 2^k+p. В 1960 году Крокер построил следующий простой контрпример к **гипотезе Романова**.

Задача. Убедитесь, что ни одно из чисел вида $2^{2^m}-5$ при $m \geq 3$ не представимо в виде 2^k+p.

10.2. Роль компьютеров в решении проблемы Гольдбаха

В первой части я уже цитировал мнение Харальда, что его работа была бы невозможна без компьютеров. Воспроизведу еще раз этот фрагмент: “The present work would most likely not have been possible without free and publicly available software: `PARI`, `Maxima`, `Gnuplot`, `VNODE-LP`, `PROFIL/BIAS`, `SAGE`, and, of course, LaTeX, `Emacs`, the `gcc` compiler and `GNU/Linux` in general. Some exploratory work was done in `SAGE` and `Mathematica`. Rigorous calculations used either D. Platt’s interval-arithmetic package (based in part on `Crlibm`) or the `PROFIL/BIAS` interval arithmetic package underlying `VNODELP`”.

Кроме собственно проверки четной гипотезы Гольдбаха до $4\cdot 10^{18}$ и нечетной гипотезы Гольдбаха до 10^{30}, которые подробно обсуждались выше, полное решение нечетной проблемы Гольдбаха включало еще несколько нетривиальных вычислительных аспектов, два из которых стоит упомянуть специально.

Прежде всего, это численная проверка Обобщенной Гипотезы Римана для L-функций $L(s,\chi)$ до высоты порядка $10^8/q$, где q — кондуктор χ. Эта проверка оказалась весьма серьезной вычислительной задачей. Она была целиком проведена Дэвидом Платтом и потребовала около 400000 часов работы CPU. В действительности, здесь происходит некоторая игра, можно было бы обойтись меньшим объемом вычислений, ценой увеличения асимптотической оценки $V \leq 10^{29}$ до $V \leq 10^{30}$. Мне кажется, подобная игра, когда решения относительно доказательства и вычисления являются взаимообусловленными и должны приниматься *одновременно*, будет встречаться в математике все чаще.

Другой важнейший философский вывод этой работы состоит в следующем. Поскольку нас интересуют точные математические ответы, нам нужны принципиально новые процессоры! Дело в том, что большинство существующих процессоров — в частности, `Intel` — созданы в эпоху *приближенных* вычислений и трансцендентные функции вычисляются ими неверно. Это значит, что все безошибочные вычисления должны имплементироваться непосредственно на уровне программ, а не на уровне железа. Но программная реализация, скажем, интервальной арифметики замедляет вычисления примерно в 100 раз.

Ну и, наконец, часть собственно *аналитических* неравенств в работе Хельфготта тоже доказаны с помощью компьютера! Вот, что пишет по этому поводу Харальд в своей книге: “It may be interesting to note that one of the inequalities used to estimate (1.30) was proven with the help of automatic quantifier elimination [224]. Proving this inequality was a very minor task, both computationally and mathematically; in all likelihood, it is feasible to give a human-generated proof. Still, it is nice to know from firsthand experience that computers can nowadays (pretend to) do something other than just perform numerical computations — and that this is already applicable in current mathematical practice.”

10.3. Theorems for a price

Владимир Игоревич Арнольд любил повторять, что “математика, это часть физики, где эксперименты дешевы”. Если математика и является частью физики, то только в том смысле, в котором сознание Будды находится в руках Аллаха.

Это, конечно, так, но ведь и физика является частью математики — в том смысле, что руки Аллаха все равно существуют только в сознании Будды. Этот дуализм подробно обсуждает Миша Громов в [193].

Мне кажется, Владимир Игоревич экстраполировал опыт XVII–XIX веков и пропустил очевидную тенденцию к росту стоимости эксперимента в математике. Между тем, сегодня мы уже отчетливо видим тот момент, когда математические эсперименты сравняются по стоимости с натурными. На самом деле это уже давно так во многих областях. Можно рассчитать форму крыла, но *дешевле* построить аэродинамическую трубу.

В первой статье этой серии [11] я уже цитировал Дорона Зайльбергера, который 30 лет назад упоминал гипотезу Гольдбаха как эталонную ПРОБЛЕМУ ТЫСЯЧЕЛЕТИЯ, с несколько другим бюджетом: “We show in a certain precise sense that the Goldbach conjecture is true with probablity larger than 0.99999 and that its complete truth could be determined with a budget of $10 billion”, [365]. Стоимость экспериментальной проверки математических результатов может быть СКОЛЬ УГОДНО ВЫСОКА, что очень скоро приведет нас к ограничениям, накладываемым конечностью физического мира.

Проблема с применениями математики в биологии [122] и некоторых других областях состоит ровно в этом. Требующаяся при этом математика слишком велика для индивидуального человеческого ума, а компьютерный эксперимент необходимого масштаба слишком дорог.

10.4. Благодарности

Я благодарен Сергею Позднякову, который убедил меня написать этот цикл статей, за чрезвычайно полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Антонов В. И., Васильев Ю. С.* Кафедра высшей математики Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. История и современность. Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки (2014), no. 3(201), 154–166.
2. *Архипов Г. И., Чубариков В. Н.* О работах по теории чисел Н. Г. Чудакова (к 100-летию со дня рождения), Чебыш. сб., **5** (2004), no. 3, 4–14.
3. *Барбан М. Б.* “Плотность” нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и “почти” простых чисел, Докл. АН УзССР, (1963), no. 6, 9–10.
4. *Барбан М. Б.* Метод “большого решета” и его применения в теории чисел, УМН, **21** (1966), no. 1, 51–102.
5. *Бороздкин К. Г.*, К вопросу о постоянной И. М. Виноградова, Труды III Всесоюзного матем. съезда, т. I, М., Изд-во АН СССР, 1956, 3.
6. *Бредихин Б. М.* К тернарной проблеме Гольдбаха Исследования по Теории Чисел, Саратов, вып. 6 (1975), 5–18.
7. *Бредихин Б. М., Воскресенский В. Е., Карацуба А. А., Лаврик А. Ф., Малышев А. В., Постников А. Г., Спринджук В. Г.* Николай Григорьевич Чудаков (некролог), Успехи Мат. Наук, **42** (1987), no. 5, 189–190.
8. *Бредихин Б. М., Яковлева Н. А.* Применения дисперсионного метода к проблеме Гольдбаха. Acta Arith. **27** (1975), 253–263.
9. *Бухштаб А. А.* Теория чисел, М., Учпедгиз, 1960.
10. *Бухштаб А. А.* Новые результаты в исследовании проблемы Гольбаха—Эйлера и проблемы простых чисел близнецов, Докл. АН СССР, **162** (1965), no. 4, 735–738.

11. *Вавилов Н. А.* Компьютеры как новая реальность математики: I. Personal account. Компьютерные инструменты в Образовании, 2020, no. 2, 5–26.
12. *Вавилов Н. А.* Компьютеры как новая реальность математики: II. Проблема Варинга. Компьютерные инструменты в Образовании, 2020, no. 3, 5–55.
13. *Вавилов Н. А.* Компьютеры как новая реальность математики: III. Числа Мерсенна и суммы делителей. Компьютерные инструменты в Образовании, 2020, no. 4, 5–58.
14. *Вавилов Н. А., Халин В. Г., Юрков А. В.* `Mathematica` для нематематика, 2021, М., МЦНМО, 484с.
15. *ван дер Варден Б. Л.* Пробуждающаяся наука. Математика Древнего Египта, Вавилона и Греции. ГИФМЛ, М., 1959. 460с.
16. *Виноградов А. И.* Метод решета в алгебраических полях. Оценки снизу. Матем. сб., **64** (1964), no. 1, 52–78.
17. *Виноградов А. И.* Оценки снизу методом решета в алгебраических числовых полях, Докл. АН СССР, **154** (1964), no. 1, 13–15.
18. *Виноградов А. И.* О плотностной гипотезе для L-рядов Дирихле, Изв. АН СССР. Сер. матем., **29** (1965), no. 4 , 903–934.
19. *Виноградов А. И.* Письмо А. А. Ляпунову от 02.08.1968, `http://odasib.ru/OpenArchive/DocumentImage.cshtml?id=Xu1_pavl_635513015734375000_20882&eid=L3_0003_0114`
20. *Виноградов А. И.* Гипотезы Артина и закон взаимности, Тр. МИАН СССР, **132** (1973), 35–43
21. *Виноградов А. И., Левин Б. В., Малышев А. В., Романов Н. П., Чудаков Н. Г.* Марк Борисович Барбан (некролог), УМН, **24** (1969), no. 2, 213—216.
22. *Виноградов И. М.* Некоторые теоремы аналитической теории чисел, Докл. АН СССР, **4** (1934), no. 4, 185–187.
23. *Виноградов И. М.* Представление нечетного числа суммою трех простых чисел, Докл. АН СССР, **15** (1937), no. 6–7, 291–294.
24. *Виноградов И. М.* Новый метод в аналитической теории чисел, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **10**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1937, 222 с.
25. *Виноградов И. М.* Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Тр. МИАН СССР, **23**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1947, 3—109.
26. *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. В.* Введение в теорию чисел, Изд-во МГУ, М., 1995.
27. *Гельфонд А.О.* Теория чисел. с.52–80, в кн. Математика в СССР за тридцать лет 1917–1947, ОГИЗ М.–Л., 1948, 1044с.
28. *Гельфонд А.О., Линник Ю.В.* Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., Физматгиз, 1962.
29. *Гельфонд А. О., Шнирельман Л. Г.* Э. Кольман, “Предмет и метод современной математики”, УМН, 1938, 4, 334–336.
30. *Гольдбаха проблема* БСЭ, изд. 2, т. 12 (1952), 8.
31. *Граве Д. А.* Про задачу Гольдбаха. Журн. інст. матем. АН УРСР. Київ, 1938, no. 1, 77–79.
32. Дело академика Николая Николаевича Лузина. Демидов С.С., Левшин Б.В. (ред.), РХГИ, СПб, 1999, 311с.
33. *Делоне Б. Н.* Петербургская школа теории чисел. Изд. АН СССР, 1947, 421с.
34. *Делоне Б. Н.* К шестидесятилетию Ивана Матвеевича Виноградова, Изв. АН СССР. Сер. матем., **15** (1951), no. 5, 385–394
35. *Доксиадис А.* Дядя Петрос и проблема Гольдбаха. АСТ, М., 2002, 205с.
36. *Дьёдонне Ж.* Основы современного анализа. М„ Мир, 1964, 630с.
37. *Дьёдонне Ж.* О деятельности Бурбаки, Успехи Мат. Наук **28** (1973), no. 3, 205–216.
38. Иван Матвеевич Виноградов. Материалы к биобиблиографии ученых СССР. Состав. Т. Б. Яриной, вступительная статья А. А. Карацубы. Наука, М., 1978, 54с.
39. *Йин Вэньлинь* О представлении больших целых чисел в виде суммы простых, Бюлл. Польской АН, отд. 3–4, (1956) no. 12, 793–795.
40. *Карацуба А. А.* И. М. Виноградов и его метод тригонометрических сумм, Теория чисел и анализ, Сборник статей. Труды Международной конференции по теории чисел, посвященной 100-летию со дня рождения академика И. М. Виноградова, Тр. МИАН, **207**, Наука, М., 1994,

3–20.
41. *Касимов А. М.* О константе И. М. Виноградова в тернарной проблеме Гольдбаха, Узбекский Мат. Ж., (1992), no. 3–4, 55–65.
42. *Касимов А. М.* К решению аддитивных задач с простыми числами, Чебышевский сб., **13** (2012), no. 2, 71–76.
43. *Кириллов И. А.* Христиан Гольбах — математик, лингвист, криптограф, Вестник Моск. Госуд. Лингвистического Ун-та (2018), вып. 4 (793), 46–62.
44. *Климов Н. И.* Комбинирование элементарного и аналитического методов в теории чисел, УМН, **13** (1958), no. 3, 145–164.
45. *Климов Н. И.* Постоянная Шнирельмана и проблема Гольдбаха—Эйлера. Исслед. по теории чисел. Межвузовск. научн. сб., Изд. Саратовск. ун-та, вып. 2 (1968), 80–89.
46. *Климов Н. И.* По поводу вычислений постоянной Шнирельмана. Волжский Мат. Сб., Вып. 7 (1969), 32–40
47. *Климов Н. И.* О простых числах в арифметической прогрессии. Исслед. по теории чисел. Межвузовск. научн. сб., Изд. Саратовск. ун-та, вып. 5 (1975), 44–55.
48. *Климов Н. И.* Применение решета Сельберга к оценке числа близнецов. Исслед. по теории чисел. Межвузов, научн. сб., вып. 6, изд. Саратовск. ун-та, (1975), 67–82.
49. *Климов Н. И.* Новая оценка абсолютной постоянной в проблеме Гольдбаха—Шнирельмана, Изв. вузов. Матем., **1** (1978), 25–35.
50. *Климов Н. И.* Улучшение оценки абсолютной постоянной в проблеме Гольдбаха—Шнирельмана. Научн. тр. Куйбышевск. гос. пед. ин-та, **158** (1975), 14–30.
51. *Климов Н. И., Пильтяй Г. З., Шептицкая Т. А.* Представление натуральных чисел суммами ограниченного числа простых чисел. Исслед. по теории чисел. Куйбышев, вып. 1 (1971), 44–47.
52. *Климов Н. И., Пильтяй Г. З., Шептицкая Т. А.* Оценка абсолютной постоянной в проблеме Гольдбаха—Шнирельмана. Исслед. по теории чисел. Изд. Саратовск. ун-та, вып. 4 (1972), 35–51.
53. *Кондакова Л. Ф., Климов Н. И.* О некоторых аддитивных задачах. Волжск, матем. сб., вып. 7 (1969), 41–44.
54. *Копелевич Ю. Х.* Основание Петербургской Академии Наук, Л., Наука, 1977, 210с.
55. *Кузяшев А. А., Чечуро Е. Ф.* О представлении больших целых чисел суммами простых чисел Исслед. по теории чисел. Межвузовск. научн. сб., Изд. Саратовск. ун-та, вып. 3 (1969), 46–50.
56. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? МЦНМО, 2019, 563с.
57. *Лаврик А. Ф.* О представлении чисел в виде суммы простых по методу Л. Г. Шнирельмана. Изв. АН Узб.ССР, сер. физ.-мат наук, (1965), no. 3, 5–10.
58. *Ландау Э.* Основы анализа: действия над целыми, рациональными, иррациональными, комплексными числами. М., ИЛ, 1947, 184с.
59. *Ландау Э.* Введение в дифференциальное и интегральное исчисление. М., ИЛ, 1948, 458с.
60. Лев Генрихович Шнирельман (фотография), УМН, (1939), no 6, 2.
61. *Линник Ю. В.* Пример одной последовательности, не образующей бинарного базиса, Докл. АН СССР, **36** (1942), no. 6, 122–124.
62. *Линник Ю. В.* О возможности единого метода в некоторых вопросах аддитивной и дистрибутивной теории простых чисел, Докл. АН СССР, **49** (1945), no. 1, 3–7.
63. *Линник Ю. В.* Новое доказательство теоремы Гольдбаха—Виноградова, Матем. сб., **19** (1946), no. 1, 3–8. (перепечатано в Избранные труды, II, 23–27, Наука, Л. 1980.)
64. *Линник Ю. В.* Простые числа и степени двойки, Тр. МИАН СССР, **38** (1951), 152–169.
65. *Линник Ю. В.* Некоторые условные теоремы, касающиеся бинарной проблемы Гольдбаха, Изв. АН СССР. Сер. матем., **16** (1952), no. 6, 503–520.
66. *Линник Ю. В.* Складывание простых чисел со степенями одного и того же числа, Матем. сб., **32** (1953), no. 1, 3–60.
67. *Линник Ю. В.* Все большие числа – суммы простого и двух квадратов (О проблеме Гарди–Литтльвуда). I, Матем. сб., 52(94):2 (1960), 661–700. II, Матем. сб., 53(95):1 (1961), 3–38. (перепечатано в Избранные труды, II, 217–284, Наука, Л. 1980.)

68. *Линник Ю. В.* Асимптотическая формула в аддитивной проблеме Гарди–Литтльвуда, Изв. АН СССР. Сер. матем., **24** (1960), no. 5, 629–706
69. *Линник Ю. В.* Дисперсионный метод в бинарных аддитивных задачах, Изд. Ленингр. ун-та, Л., 1961.
70. *Майер Х., Рассиас М.*, Тернарная проблема Гольдбаха с простым и двумя изолированными простыми числами, Аналитическая и комбинаторная теория чисел, Сборник статей. К 125-летию со дня рождения академика Ивана Матвеевича Виноградова, Тр. МИАН, **296** МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2017, 192–206.
71. *Марджанишвили К. К.* Исследования по применению метода тригонометрических сумм к аддитивным задачам, Успехи Мат Наук, **5** (1950), no. 1, 236–240
72. *Марджанишвили К. К.* Иван Матвеевич Виноградов (к шестидесятилетию со дня рождения), Успехи Мат Наук, **6** (1951), no. 5, 190–196.
73. *Михелович Ш. Х.* Теория чисел, М., Высшая школа, 1962.
74. *Михелович Ш. Х.* Из истории теории чисел (вклад русских и советских математиков в развитие теории чисел). М. Знание, 1970, 31с.
75. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. М., Наука, 1968. 224с.
76. От юбилейной комиссии, Тр. МИАН СССР, 1951, том 38, 3–4
77. *Пань Ченгдонг* О представлении четных чисел суммой простого и почти простого. Sci. Sinica **11** (1962), 873–888.
78. *Пинаев В. Н.*, Четвертьфинальные соревнования студенческого командного первенства мира по программированию. Центральный регион России. РГАТА, Рыбинск, 1999, 1–30.
79. *Понтрягин Л. С.* Жизнеописание Льва Семёновича Понтрягина, математика, составленное им самим. Рождения 1908 г., Москва. М. 1998
80. *Реньи А. А.* О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, Докл. АН СССР, **56** (1947), no. 5, 455–458.
81. *Реньи А. А.* О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа", Изв. АН СССР. Сер. матем., **12** no. 1 (1948), 57–78.
82. *Романов Н. П.* О двух теоремах аддитивной теории чисел, Матем. сб., **40** no. 4 (1933), 514–520.
83. *Романов Н. П.* К проблеме Гольдбаха, Известия Научно-иссл. института математики и механики при Томском университете, **1**, стр. 34–38, 1935. 2.
84. *Романов Н. П.* О некоторых теоремах аддитивной теории чисел, УМН, 1940, no. 7, 47–56.
85. *Романов Н. П.* Теория чисел и функциональный анализ, сб. трудов, Изд. Томского унив. 2013, 476с.
86. *Сегал Б. И.* Н. Г. Чудаков, "Введение в теорию L-функций Дирихле" (рецензия), Успехи Мат. Наук, **3** (1948), no. 5, 193–195.
87. *Серпинский В.* Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, М.,Физматгиз, 1963.
88. *Смирнов Е. М.* К истории математики и механики в Политехническом институте в первой половине 20-го века. Семинар по истории математики, 4 апреля 2019, `http://www.mathnet.ru/php/seminars.phtml?option_lang=rus&presentid=23505`
89. *Стюарт Й.* Величайшие математические задачи. Альпина нон-фикшн, М., 2019, 460с.
90. *Тихомиров В. М., Успенский В. В.* Советская математика 30-х годов (II): А. О. Гельфонд и Л. Г. Шнирельман, Матем. просв., 2000, вып. 4, 33–48.
91. *Трост Э.* Простые числа, М., Физматгиз, 1959.
92. *Успенский В. А.* К истории проблемы Гольдбаха. В кн.: Историко-математические исследования. Вторая серия. РАН, Ин-т естествознания и техники им. С. И. Вавилова. Вып. 13 (48). М.: Янус-К, 2009, с. 273–283.
93. *Успенский В. А.* Апология математики. Альпина-Диджитал, 2017, 346с.
94. *Фельдман Н. И., Чудаков Н. Г.* О теореме Старка, Матем. заметки, **11** (1972), no. 3, 329–340.
95. *Чанга М. Е.* Метод тригонометрических сумм, Лекционные курсы НОЦ, Выпуск 13, МИАН, М., 2009, 46с.
96. *Чудаков Н. Г.* Что известно в настоящее время о простых числах?, Матем. просв., сер. 1, **6** (1936), 16–22.
97. *Чудаков Н. Г.* О проблеме Гольдбаха. Докл. АН СССР. Нов. Сер. **17** (1937), no. 7, 331-334.

98. *Чудаков Н. Г.* О плотности совокупности четных чисел, непредставимых как сумма двух нечетных простых, Изв. АН СССР. Сер. матем., **2** (1938), no. 1, 25–40.
99. *Чудаков Н. Г.* О проблеме Гольдбаха, Успехи Мат Наук, **4** (1938), 14–33
100. *Чудаков Н. Г.* Введение в теорию L-функций Дирихле. ОГИЗ, М.–Л., 1947, 203с.
101. *Чудаков Н. Г.* Биобиблиографический указатель (сост. Г. Я. Палагина), Саратов, 2004, 24с.
102. *Чудаков Н. Г., Климов Н. И.* По поводу постоянной Шнирельмана, УМН, **22** (1967), no. 1, 212–213.
103. *Чудаков Н. Г., Родосский К. А.* Новые методы в теории L-функций Дирихле, Успехи Мат. Наук, **4** (1949), no. 2, 22–56.
104. *Хуа Локен* Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел Москва : Мир, 1964. 188с.
105. *Шанин А. А.* Определение констант в методе Бруна—Шнирельмана Волжский Мат. Сб. **2** (1964), 261–265.
106. *Шнирельман Л. Г.* Об аддитивных свойствах чисел, УМН, **6** (1939), 9–25; Впервые опубликовано в Изв. Донского Политехн. Инст. Новочеркасск, **14** (1930), 3–27.
107. *Шнирельман Л. Г.* Об аддитивных свойствах чисел, УМН, **7** (1940), 7–46. Впервые опубликовано в Über additive Eigenschaften von Zahlen. Math. Annalen, **107** (1933), 649–690.
108. *Шнирельман Л. Г.* Простые числа, ГИТТЛ, М.–Л., 1940, 60с.
109. *Юшкевич А. П., Копелевич Ю. Х.* Христиан Гольдбах, 1690–1764. М.: Наука, 1983. 224с.
110. *Anuja A.* If any numbers genius can prove a centuries-old theorem, Faber the publisher, promises to pay $1m. The Times, March 16, 2000, `https://www.math.tugraz.at/~elsholtz/WWW/papers/papers14faber.html`
111. *Archibald R. G.* Goldbach's theorem. I, II. Scripta Math. **3**, 44–50, 153–161 (1935).
112. *Bamberg J., Cairns G., Kilminster D.* The crystallographic restriction, permutations, and Goldbach's conjecture. Amer. Math. Monthly **110** (2003), no. 3, 202–209.
113. *Bender A. O.* Decompositions into sums of two irreducibles in $\mathbb{F}_q[t]$, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **346** (17–18) (2008) 931–934.
114. *Bender A. O.* Representing an element in $\mathbb{F}_q[t]$ as the sum of two irreducibles in $\mathbb{F}_{q^s}[t]$, preprint (2008); arXiv:0809.4381vl [math.NT].
115. *Bhowmik G., Halupczok K.* Asymptotics of Goldbach representations. Mishou, Hidehiko (ed.) et al., Various aspects of multiple zeta functions — in honor of Professor Kohji Matsumoto's 60th birthday. Proceedings of the international conference, Nagoya University, Nagoya, Japan August 21–25, 2020. Tokyo: Mathematical Society of Japan. Adv. Stud. Pure Math. **84** (2020), 1–21.
116. *Bohman J., Fröberg C.-E.* Numerical results on the Goldbach conjecture. Numerical results on the Goldbach conjecture. Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT) **15** (1975), no. 3, 239–243.
117. Bohman J., Fŕoberg C.-E. Generalized Goldbach problems. (Swedish) Normat **45** (1997), no. 4, 167–177.
118. *Bombieri E.* Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel "Primzahlsatz". Riv. Mat. Univ. Parma (2) **3** (1962), 393–440.
119. *Bombieri E.* On the large sieve, Mathematika, **12** (1965), 201–225.
120. *Booker A. R.* Finite connected components of the aliquot graph. Math. Comput. **87** (2018), no. 314, 2891–2902.
121. *Borel É.* Applications du calcul des probabilités aux problèmes concernant les nombres premiers. Théoreme de Goldbach. C. R. Acad. Sci., Paris **212** (1941), 317–320.
122. *Borovik A.* A mathematician's view of the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology, BioSystems 205 (2021) 104410, 1–11.
123. *Bratus S., Pak I.* Fast constructive recognition of a black box group isomorphic to S_n or A_n using Goldbach's conjecture. J. Symb. Comput. **29** (2000), no. 1, 33–57.
124. *Bruckman P. S.* A proof of the strong Goldbach conjecture. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. **39** (2008), no. 8, 1102–1109. Retraction: A proof of the strong Goldbach conjecture. Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech. **51** (2020), no. 2, 325.
125. *Brun V.* Über das Goldbachsche Gesetz und die Anzahl der Primzahlpaare, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab (Christiania), **34** (1915), no. 8, 3–19.

126. *Brun V.* Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach. C. R. Acad. Sci. Paris **168** (1919), 544–546.
127. *Brun V.* Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach. Christiania Vidensk. Selsk. Skr. (1920), no. 3, 36s.
128. *Brun V.* Das Sieb des Eratosthenes. (5. Kongreß Skandinav. Mathematiker in Helsingfors vom 4. bis 7. Juli 1922, 197–203). Helsingfors: Akadem. Buchh. (1923).
129. *Brun V.* Untersuchungen über das Siebverfahren des Eratrosthenes. Jahresber. Deutsch. Math. Vereinig. **33** (1924), 81–96.
130. *Buchstab A. A.* Sur la décomposition des nombres pairs en somme de deux composantes dont chacune est formée d'un nombre borné de facteurs premiers. C. R. Acad. Sci. URSS (2) **29** (1940), 544–548.
131. *Burton D. M.* Elementary number theory. 7th ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. New York, NY: McGraw-Hill. 2011, xiv, 440 p.
132. *Cai Tianxin* The book of numbers 2016, 368p
133. *Cantor G.* Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach. Assoc. Franç. Caen **23** (1894), 117–134.
134. *Carlitz L.* A problem in additive arithmetic. Quart. J. Math., Oxford. Ser. **2** (1931), 97–106.
135. *Chen Jing Run* On the representation of a large even integer as a sum of a prime and a product of at most two primes. I, II. Sci. Sinica., **16** (1973), 157–176; **21** (1978), 421–430.
136. *Chen Jing Run* On the Goldbach's problem and the sieve methods. Sci. Sinica **21** (1978), no. 6, 701–739.
137. *Chen Jing Run* The exceptional set of Goldbach numbers, II. Sci. Sinica, 26 (1983), 714–731.
138. *Chen Jing Run* The exceptional set of Goldbach numbers, III. Chinese Quart. J. Math., 4 (1989), 1–15.
139. *Chen Jing Run, Liu Jianmin* The exceptional set of Goldbach-numbers. III. Chinese Quart. J. Math. **4** (1989), no. 1, 1–15.
140. *Chen Jing Run, Pan Cheng Dong* The exceptional set of Goldbach numbers. Sci. Sinica, 23 (1980), 416–430.
141. *Chen Jing Run, Wang Tian Ze* On the odd Goldbach problem (Chinese) Acta Math. Sinica **32** (1989) no. 5, 702–718.
142. *Chen Jing Run, Wang Tian Ze* A study on the Goldbach problem in the case of odd numbers. (Chinese) Kexue Tongbao **34** (1989), no. 20, 1521–1522.
143. *Chen Jing Run, Wang Tian Ze* A note on the Goldbach problem (Chinese). Acta Math. Sinica, **34** (1991), 143–144.
144. *Chen Jing Run, Wang Tian Ze* Estimation of the second main term in odd Goldbach problem. Acta Math. Sci. (English Ed.) **11** (1991), no. 3, 241–250.
145. *Chen Jing Run, Wang Tian Ze* The Goldbach problem for odd numbers. Acta Math. Sinica (Chin. Ser.), **39** (1996), no. 2, 169–174.
146. *Chen Ming* Can the Goldbach conjecture be proved by elementary means? (Chinese) Sci. Exploration **2** (1982), no. 3, 171–172.
147. *van der Corput J. G.* Sur la démonstration de l'hypothèse de Goldbach pour les nombres impairs donnée par M. Vinogradow. Confér. Réun. internat. Math., Paris, 1937, 14p (1937).
148. *van der Corput J. G.* Sur l'hypothése de Goldbach pour presque tous les nombres pairs, Acta Arith. **2** (1937) 266–290.
149. *van der Corput J. G.* Sur le théorème de Goldbach—Vinogradow. C. R. Acad. Sci., Paris, **205** (1937), 479–481.
150. *van der Corput J. G.* Une nouvelle généralisation du théorème de Goldbach—Vinogradow. C. R. Acad. Sci., Paris, **205** (1937), 591–592.
151. *van der Corput J. G.* Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs. Acta arith., Warszawa, **2** (1937), 266–290.
152. *van der Corput J. G.* Sur l'hypothèse de Goldbach. Proc. Akad. Wet. Amsterdam **41** (1938), 76–80.
153. *van der Corput J. G.* Über eine Vermutung von de Polignac. (Dutch) Simon Stevin, Wis. Natuurk. Tijdschr. **27** (1950), 99–105.
154. *Cojocaru A. C., Murty M. R.* An introduction to sieve methods and their applications. London Mathematical Society Student Texts, **66**. Cambridge University Press, Cambridge, 2006. xii+224 p
155. *Cramér H.* Nombres premiers et équations indéterminées. (Swedish) Ark. för Mat., Astron. och Fys.

14 (1920), no. 13, 11p.
156. *Cugiani M.* Commemorazioner di Giovanni Ricci. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **53** (1983), 11–15.
157. *Cugiani M.* Giovanni Ricci (1904–1973). Acta Arith. **46** (1986), no. 4, 303–311.
158. *Cunningham A.* Evidence of Goldbach's theorem. Messenger (2) **36** (1906), 17–30.
159. *Davenport H., Halberstam H.* Primes in arithmetic progressions , Michigan Math. J., **13** (1966), 485–489, corrigendum, ibid. **15** (1968), 505.
160. *Décaillot A.-M.* Cantor et la France. Correspondance du mathématicien allemand avec les Francais a la fin du XIX siecle. Kimé, Paris, 2008. 347p.
161. *Décaillot A.-M.* Cantor und die Franzosen. Mathematik, Philosophie und das Unendliche. Translated from the 2008 French original by Klaus Volkert. Mathematik im Kontext. Springer, Heidelberg, 2011. xiv+230p.
162. *Desboves A.* Sur un théorème de Legendre et son application à la recherche de limites qui comprennent entre elles des nombres premiers, Nouv. Ann. Math., **14** (1855), 281–295.
163. *Descartes R.* Oeuvres, tome 10, ed. Charles Adam et Paul Tannery, Paris, Cerf, 1908.
164. *Deshouillers J.-M.,* Amélioration de la constante de Šnirelman dans le problème de Goldbach. Séminaire Delange—Pisot—Poitou (14e année: 1972/73), Fasc. 2, Exp. No. 17, 4pp. Secrétariat Mathématique, Paris, 1973.
165. *Deshouillers J.-M.,* Sur la constante de Šnirel'man. In Séminaire Delange—Pisot—Poitou, 17e année: (1975/76), Théorie des nombres: Fasc. 2, Exp. No. G 16, page 6. Secrétariat Math., Paris, 1977.
166. *Deshouillers J.-M., Granville A., Narkiewicz W., Pomerance C.* An upper bound in Goldbach's problem. Math. Comput. **61** (1993), no. 203, 209–213.
167. *Deshouillers J.-M., Effinger G., te Riele H., Zinoviev D.* A complete Vinogradov 3-primes theorem under the Riemann hypothesis. Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc. **3** (1997), 99–104.
168. *Deshouillers J.-M., te Riele H. J. J.* On the probabilistic complexity of numerically checking the binary Goldbach conjecture in certain intervals, Number Theory and Its Applications (S. Kanemitsu and K. Gÿory, eds.), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht—Boston—London, 1999, p.89–99.
169. *Deshouillers J.-M., te Riele H. J. J., Saouter, Y.* New experimental results concerning the Goldbach conjecture. Algorithmic number theory (Portland, OR, 1998), 204–215, Lecture Notes in Comput. Sci., 1423, Springer, Berlin, 1998.
170. *Dickson L. E.* History of the theory of numbers. Vol. I: Divisibility and primality. Reprint of the 1919 original published by Carnegie Institution, Washington, DC; Mineola, NY: Dover Publications, 2005, 486p.
171. *Doxiadis A.* Zio Petros e la congettura di Goldbach. 2000 RCS Libri S.p.A., Milano, 97p.
172. *Dubois R.* Connaissance des nombres premiers. Essai de mise au point d'une méthode rapide de discernement des nombres premiers. Démonstration de l'existence d'une infinité de doublets et résolution du problème de Goldbach. Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris 1969 31 pp. (11 tables + xxv).
173. *Dufner G.* Binares Goldbachproblem mit Einschrankung an die Summanden. Period. Math. Hungar., **30** (1995), 105–134.
174. *Echeverría J.* Empirical methods in mathematics. a case study: Goldbach's conjecture. In G. Munévar, ed., Spanish Studies in the Philosophy of Science. Kluwer, Boston, 1996, 19–55.
175. *Effinger G.* Some numerical implications of the Hardy and Littlewood analysis of the 3-primes problem. Ramanujan J., **3** no. 3 239–280, 1999.
176. *Estermann T.* On the representations of a number as the sum of a prime and a quadratfrei number. J. Lond. Math. Soc. **6**, 219–221 (1931).
177. *Estermann T.* Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo-Brunschen Methode. J. Reine Angew. Math. **168**, 106–116 (1932).
178. *Estermann T.* Proof that every large integer is the sum of two primes and a square. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **42**, 501–516 (1937).
179. *Estermann T.* A new result in the additive prime-number theory. Q. J. Math., Oxf. Ser. **8**, 32–38 (1937).
180. *Estermann T.* On Goldbach's problem: proof that almost all even positive integers are sums of two primes, Proc. London Math. Soc. **44** (1938) 307–314.
181. *Euler L.*, Lettre XVIV, Euler à Goldbach. Berlin 30 Juni 1742. http://eulerarchive.maa.org//corres-

pondence/letters/OO0766.pdf
182. *Evelyn C. J. A., Linfoot E. H.* On a problem in the additive theory of numbers. II. J. Reine Angew. Math. **164** (1931), 131–140.
183. *Farrugia J. A.* Brun's 1920 theorem on Goldbach's Conjecture Master Thesis, Utah State Univ., 2018, 1–87, `https://digitalcommons.usu.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=8262&context=etd`
184. *Fouvry É.* Un résultat nouveau en théorie additive des nombres premiers. Sem. Delange—Pisot—Poitou, (1975/76), exp. 7, 1–11.
185. *Fouvry É., Grupp F.* Weighted sieves and twin prime type equations. Duke Math. J., **58** (1989), 731–748.
186. *Fuß P.-H.* Correspondance mathématique et physique de quelques celebres geometres du XVIIIème siecle. New York and London: Johnson Reprint Corporation. I: CXXI, 673 p.; II: XXIII, 713 p. (1968).
187. *Goldbach Chr.*, Lettre XVIII, Goldbach à Euler. Moscau 7 Juni 1742. http://eulerarchive.maa.org/correspondence/letters/OO0765.pdf
188. *Goldston D. A.*, On Hardy and Littlewood's contribution to the Goldbach conjecture, in Proc. Amalfi Conf. Analytic Number Theory, Maiori, 1989 (University of Salerno, Salerno, 1992), pp. 115–155
189. *Gourdon X., Demichel P.* The first 10^{13} zeros of the Riemann Zeta function, and zeros computation at very large height, `http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf`, 2004.
190. *Granville A.* Refinements of Goldbach's conjecture, and the generalized Riemann hypothesis. Funct. Approx. Comment. Math. **37** (2007), part 1, 159–173.
191. *Granville A., van de Lune J., te Riele H. J. J.* Checking the Goldbach conjecture on a vector computer. In: Number theory and applications (Banff, Alberta, 1988), 423–433. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 265 , ed. R.A. Mollin, Publ. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1989).
192. *Greaves G.* Sieves in number theory. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3. Folge). **43**. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xii+304 pp.
193. *Gromov M.* Great circle of mysteries. Mathematics, the world, the mind. Birkh́auser/Springer, Cham, 2018. vii+202 pp.
194. *Guy R. K.* Unsolved problems in number theory, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
195. *Hadamard J.* Un travail de Jean Merlin sur les nombres premiers. Bull. Sci. Math., 50 (1915), 121–136.
196. *Halberstam H.* A proof of Chen's theorem. Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf., Univ. Bordeaux, 1974), 281–293. Astérisque, no. 24–25, Soc. Math. France, Paris, 1975.
197. *Halberstam H., Richert H.-E.* Sieve methods. London Mathematical Society Monographs, No. 4. Academic Press London—New York, 1974. xiv+364 pp.
198. *Hardy G. H.* Goldbach's theorem. (A lecture to the Math. Soc. of Copenhague on 6. October 1921.) Mat. Tidsskr. B 1922, 1–16 (1922).
199. *Hardy G. H.* Trois problèmes célèbres de la théorie des nombres. La partition des nombres. Le problème de Waring. Le problème de Goldbach. Résumé des travaux de Hardy, Hilbert, Kempner, Landau, Littlewood et Wieferich. État actuel de ces trois questions. Traduit de l'anglais par A. Sallin. Paris: Presses Universitaires de France. 32 S. (1931).
200. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes, Acta Math. **44** (1923), no. 1, 1–70.
201. *Hardy G. H., Littlewood J. E.* Some Problems of 'Partitio Numerorum' (V): A Further Contribution to the Study of Goldbach's Problem. Proc. London Math. Soc. (2) **22** (1924), 46–56.
202. *Haußner R.* Über das Goldbach'sche Gesetz. Deutsche Math. Ver. **5** (1897), no. 1, 62–66.
203. *Haußner R.* Tafeln für das Goldbach'sche Gesetz. Abh. Kais. Leopold. Carol. Deutsch Akad. Naturforscher, **1** Halle (1899), 214S.
204. *Haußner R.* Über die Stäckelschen Lückenzahlen und den Goldbachschen Satz. Deutsche Math.-Ver. **31** (1922), 115–124.
205. *Haußner R.* Untersuchungen über Lückenzahlen und den Goldbachschen Satz. J. f. M. **158** (1927), 173–194.
206. *Hayes D. R.* A polynomial analog of the Goldbach conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 115–116.
207. *Hayes D. R.* Correction to "A polynomial analog of the Goldbach conjecture", Bull. Amer. Math. Soc.

69 (1963), 493.
208. *Hayes D. R.* The expression of a polynomial as a sum of three irreducibles, Acta Arith. **11** (1966) 461–488
209. *Heath-Brown D. R.* The ternary Goldbach problem. Rev. Mat. Iberoamericana, **1** (1985), 45–59.
210. *Heilbronn H., Landau E., Scherk P.* Alle grossen ganzen Zahlen lassen sich als Summe von hochstens 71 Primzahlen darstellen. Casopis pro pestovani Matematiky a Fysiky, **65** (1936), 117–140.
211. *Helfgott H. A.* Azar y aritmética, Un capítulo de la teoría probabilística de números, Monografías del Instituto de Matemática y Ciencias Afines, v. 50, IMCA, Lima, Perú, arXiv:0909.0922v2 [math.PR], 10 Sept 2009, 72p.
212. *Helfgott H. A.* Minor arcs for Goldbach's problem , arXiv:1205.5252v4 [math.NT] 30 Dec 2013, 1–79.
213. *Helfgott H. A.* Major arcs for Goldbach's problem, arXiv:1305.2897v4 [math.NT] 14 April 2014, 1–79.
214. *Helfgott H. A.* La conjetura débil de Goldbach. Gac. R. Soc. Mat. Esp. **16** (2013), no. 4. Есть французский перевод: La conjecture de Goldbach ternaire. Traduit par M. Bilu, revue par l'auteur. Gaz. Math. **140** (2014), 5–18.
215. *Helfgott H. A.* The Ternary Goldbach Conjecture is true, arXiv:1312.7748v2 [math.NT] 17 Jan 2014, 1–79.
216. *Helfgott H. A.* The ternary Goldbach problem, arXiv:1501.05438v2 [math.NT] 27 Jan 2015, 1–327.
217. *Helfgott H. A.* The ternary Goldbach problem. Proceedings of the International Congress of Mathematicians — Seoul 2014. Vol. II, 391–418, Kyung Moon Sa, Seoul, 2014.
218. *Helfgott H. A.* Crecimiento y expansion en SL_2. Universidad S. Antonio Abad, Cusco, Perú, Agosto 2015, arXiv:1810.00703 [math.GR], 01 Oct 2018, 48p.
219. *Helfgott H. A., Platt D. J.* Numerical verification of the ternary Goldbach conjecture up to $8.875 \cdot 10^{30}$, Exp. Math. **22** (2013), no. 4, 406–409.
220. *Helfgott H. A., Ubis A.* Primos, paridad y análisis. Actas de la escuela AGRA 2018, (Aritmética, grupos y análisis), Córdoba, Argentina, arXiv:1812.08707v4 [math.NT] 12 Dec 2019, 71p.
221. *Hesiodos* Gynaikon katalogos (Greek), https://www.hs-augsburg.de/˜harsch/graeca/Chronologia/S_ante08/Hesiodos/hes_ka03.html
222. *Hilbert D.* Mathematische Probleme. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress zu Paris 1900. Gött. Nachr. 1900, 253–297.
223. *Hoffmann D. W.* Die Gödel'schen Unvollständigkeitssätze. Eine geführte Reise durch Kurt Gödels historischen Beweis. 2nd rev. Aufl., Heidelberg: Springer Spektrum 356 p. (2017).
224. *Hong H., Brown Ch. W.* QEPCAD B — Quantifier elimination by partial cylindrical algebraic decomposition, May 2011. version 1.62.
225. *Hooley Chr.* Applications of sieve methods to the theory of numbers. Cambridge University Press. 1976.
226. *Hua Loo-keng* A direct attempt to Goldbach problem. A Chinese summary appears in Acta Math. Sinica **33** (1989), no. 2, 286. Acta Math. Sinica (N.S.) **5** (1989), no. 1, 1–8.
227. *Iwaniec H.* Almost-primes represented by quadratic polynomials. Invent. Math. **47** (1978), no. 2, 178–188.
228. *Iwaniec H., Kowalski T.* Analytic number theory, **53**, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., Providence, RI, 2004.
229. *Jackson A.* Uncle Petros and Goldbach's Conjecture, and the Wild Numbers. — Notices Amer. Math. Soc. **47** (2000), no. 10, p.1274–1275.
230. *James R. D.* Recent progress in the Goldbach problem. Bull. Am. Math. Soc. **55** (1949), 246–260.
231. *Kaniecki L.* On Šnirelman's constant under the Riemann hypothesis. Acta Arith. **72** (1995), no. 4, 361–374.
232. *Laisant C. A.* Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach. S. M. F. Bull. **25** (1897), 209–211.
233. *Landau E.* Über die zahlentheoretische Function $\phi(n)$ und ihre Beziehung zum Goldbach'schen Satz, Gött. Nachr. 1900, 177–186 (1900).
234. *Landau E.* Gelöste und ungelöste Probleme aus der Theorie der Primzahlverteilung und der Riemannschen Zetafunktion. Jahresber. Deutsche Math. Ver. **21** (1912), 208–228. [Proc. 5th Internat. Congress of Math., I, 93–108, Cambridge 1913; Collected Works, Bd. 5, 240–255, Thales Verlag.]

235. *Landau E.* Zur additiven Primzahltheorie. Rend. Circ. Mat. Palermo **46** (1922), 349–356.
236. *Landau E.* Vorlesungen über Zahlentheorie. I: Aus der elementaren und additiven Zahlentheorie. II: Aus der analytischen und geometrischen Zahlentheorie. III: Aus der algebraischen Zahlentheorie und über die Fermatsche Vermutung. Leipzig: S. Hirzel. I: xii, 360 S.; II: viii, 308 S.; III: viii, 342 S. (1927).
237. *Landau E.* Die Goldbachsche Vermutung und der Schnirelmannsche Satz. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1930, 255–276.
238. *Landau E.* Verscharfung eines Romanoffschen Satzes. Acta Arithmet. **1** (1935), 43–61.
239. *Landau E.* Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie. (Cambridge tracts in mathematics and physics, No. 35.) London: Cambridge University Press, 1937. 94p.
240. *Languasco A., Pintz J., Zaccagnini A.* On the sum of two primes and k powers of two. Bull. London Math. Soc. **39** (2007), no. 5, 771–780.
241. *Li Hongze* The exceptional set of Goldbach numbers. I, II. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **50**, no. 200 (1999), 471–482; Acta Arith. **92** (2000), no. 1, 71–88.
242. *Li Hongze* The number of powers of 2 in a representation of large even integers by sums of such powers and of two primes. II. Acta Arith. **92** (2000), 229–237; **96** (2001), 369–379.
243. *Li Huixi* On the representation of a large integer as the sum of a prime and a square-free number with at most three prime divisors. Ramanujan J. **49** (2019), no. 1, 141–158.
244. *Li Jinjiang, Zhang Min* Hua's theorem with the primes in Piatetski-Shapiro prime sets. Int. J. Number Theory **14** (2018), no. 1, 193–220.
245. *Light W. A., Forest J., Hammond N., Roe S.* A note on Goldbach's conjecture. BIT, **79** (1980), 525.
246. *Linnik Yu. V.* On a sequence which does not form the binary basis. Докл. АН СССР, no. 37 (1942), 122–124.
247. *Linfoot E. H., Evelyn C. J. A.* On a problem in the additive theory of numbers. Math. Z. **30** (1929), 433–448.
248. *Lionnet E.* Note sur la question: Tout nombre pair est-il la somme des deux impairs premiers? Nouv. Ann. (2) **18** (1879), 356–361.
249. *Liu Jianya, Liu Ming-Chit, Wang Tianze* The number of powers of 2 in a representation of large even integers. I, II. Sci. China Ser. A **41** (1998), 386–397; 1255–1271.
250. *Liu Jianya, Liu Ming-Chit, Wang Tianze* On the almost Goldbach problem of Linnik. J. Théor. Nombres Bordeaux **11** (1999), 133–147.
251. *Liu Jianya, Zhan Tao* The ternary Goldbach problem in arithmetic progressions. Acta arith. **82** (1997), no. 3, 197–227.
252. *Liu Jianya, Zhan Tao* The Goldbach—Vinogradov theorem. Győry, Kálmán (ed.) et al., Number theory in progress. Proceedings of the International Conference Organized by the Stefan Banach International Mathematical Center in Honor of the 60th Birthday of Andrzej Schinzel, Zakopane, Poland, June 30-July 9, 1997. Volume 2: Elementary and Analytic Number Theory. Berlin: de Gruyter. 1005–1023 (1999).
253. *Liu Ming-Chit* The two Goldbach conjectures. (Chinese) J. Shandong Univ. Nat. Sci. **48** (2013), no. 2, 1–14.
254. *Liu Ming-Chit, Wang Tianze* On the Vinogradov bound in the three primes Goldbach conjecture. Acta Arith., **105** (2002), no. 2, 133–175.
255. *Maillet E.* Sur le théorème de Goldbach (question 4215, de J. Svoboda). Interméd. des math. **26** (1919), 81.
256. *Mardjanichvili C.* Sur la démonstration du théorème de Goldbach—Vinogradoff. Докл. АН СССР, **30** (1941), 687–689.
257. *Merlin J.* Sur quelques théorèmes d'arithmétique et un énoncé qui les contient. Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **153** (1911), 516–518.
258. *Miech R. J.* On the equation $n = p + x^2$. Trans. Amer. Math. Soc, 130 (1968), 494–512.
259. *Mikawa H.* On the exceptional set in Goldbach's problem. Tsukuba J. Math. **16** (1992), 513–543.
260. *Mollin R. A.* An overview of sieve methods. Int. J. Contemp. Math. Sci. **5** (2010), no. 1–4, 67–80.
261. *Montgomery H. L., Vaughan R. C.* The large sieve, Mathematika **20** (1973), 119–133.
262. *Montgomery H. L., Vaughan R. C.* The exceptional set in Goldbach's problem, Acta Arith. **27** (1975),

353–370
263. *Narkiewicz W.* Some recent developments in three classical problems of number theory. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **77** (1975), no. 2, 55–65.
264. *Narkiewicz W.* The development of prime number theory. From Euclid to Hardy and Littlewood. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000. xii+448 pp.
265. *Narkiewicz W.* Rational number theory in the 20th century. From PNT to FLT. Springer Monographs in Mathematics. Springer, London, 2012. xiv+654 pp.
266. *Nathanson M. B.* Additive Number Theory, The Classical Bases, Graduate Texts in Mathematics, 164 (Springer, New York, 1996).
267. *Nazardonyavi S.* Some history about twin prime conjecture arXiv:1205.0774 [math.HO], 3 May 2012, 26p.
268. Obituary: Salomon Lubelski. Acta Arith. **4** (1958), 1–2.
269. *Oblàth R.* Sur le problème de Goldbach. Mathesis **61** (1952), 179–183.
270. *Ormand K.* The Hesiodic Catalogue of Women and Archaic Greece, Cambridge University Press, 2014, 265p.
271. *Oliveira e Silva T., Herzog S., Pardi S.* Empirical verification of the even Goldbach conjecture, and computation of prime gaps, up to $4 \cdot 10^{18}$. Math. Comput., **83** (2014), 2033–2060.
272. *Pall G.* On sums of squares. Amer. Math. Monthly, **40** (1933), 10–18.
273. *Pan Cheng Dong* On the representation of even numbers as the sum of a prime and a product of not more than 4 primes. Sci. Sinica **12** (1963), 455–473.
274. *Pan Cheng Dong* On the representation of an even integer as the sum of a prime and an almost prime, Chinese Math. **3** (1963), no. 1, 101–112.
275. *Pan Cheng Dong, Pan Chen Biao* Goldbach's Conjecture, Science Press, Beijing, 1992.
276. *Petrovitch M.* Le Postulatum de Bertrand comme conséquence du théorème de Goldbach. Sphinx, Bruxelles, **8** (1938), 19–20.
277. *Pintz J.* A note on the exceptional set in Goldbach's problem. Colloque Théorie Analytique des Nombres "Jean Coquet 101–115. Orsay 1988.
278. *Pintz J.* Recent results on the Goldbach conjecture, in: Elementare und Analytische Zahlentheorie (Tagungsband). Proceedings ELAZ-Conference, May 24–28, 2004, Steiner Verlag, Stuttgart, 2006, 220–254.
279. *Pintz J.* Landau's problems on primes, J. Théor. Nombres Bordeaux **21** (2009), no. 2, 357–404.
280. *Pintz J., Ruzsa, I. Z.* On Linnik's approximation to Goldbach's problem. I. Acta Arith. **109** (2003), 169–194.
281. *Piotrowski W.* Przyczynek do biografii Salomona Lubelskiego, Wiad. Mat. **49** (2013), no. 2, 61—63.
282. *Pipping N.* Über Zwillingsprimzahlen und Goldbachsche Spaltungen. Commentationes Helsingfors **3** (1926), no. 2, 14S.
283. *Pipping N.* Neue Tafeln für das Goldbachsche Gesetz nebst Berichtigungen zu den Haussnerschen Tafeln. Commentationes Helsingfors **4** (1927), no. 4, 28S.
284. *Pipping N.* Über Goldbachsche Spaltungen großer Zahlen. Commentationes Helsingfors **4** (1927), no. 10, 1–16.
285. *Pipping N.* Die Goldbachschen Zahlen $G(x)$ für $x = 120072$–120170. Commentationes Helsingfors **4** (1929), no. 25, 6S.
286. *Pipping N.* Die Goldbachsche Vermutung und der Goldbach—Vinogradowsche Satz. Acta Acad. Aboensis, Math. Phys. **11** (1938), no. 4, 1–25.
287. *Pipping N.* Goldbachsche Spaltungen der geraden Zahlen x für $x = 60000$–99998. Acta Acad. Abo. **12** (1940), no. 11, 1–18.
288. *Pollack P.*, A polynomial analogue of the twin prime conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), no. 11, 3775–3784.
289. *Rademacher H.* Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **3** (1923), no. 1, 12–30.
290. *Rademacher H.* Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. I: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositivon Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper. II: Über die Darstellung von Körperzahlen als Summe von Primzahlen im imaginär-quadratischen

Zahlkörper. III: Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper. Hamb. Math. Abh. **3** (1924), 109–163; **3** (1924), 331–378. Math. Z. **27** (1928), 321–426.
291. *Rademacher H.* Über eine Erweiterung des Goldbachschen Problems, Math. Z. **25** (1926), 627–657.
292. *Ramaré O.*, On Šnirel'man's constant. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **22** (1995), 645–706.
293. *Rassias M. T.* Goldbach's problem. Selected topics. With forewords by Jörg Brüdern and Preda Mihăilescu. Springer, xv, 122 p. (2017).
294. *Ricci G.* Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann. Boll. Unione Mat. Ital. **15** (1936), 183–187.
295. *Ricci G.* Alcuni recenti risultati intorno alla congettura di Goldbach. Atti primo Congr. Un. mat. Ital., Firenze, 1937, 158–160 (1937).
296. *Ricci G.* Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann, I, II. Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, Serie II, **6** (1937) no. 1, стр. 71–90; no. 2, 91–116.
297. *Ricci G.* Recenti risultati nel campo dell'aritmetica. Il problema di Goldbach. Rend. Sem. mat. fis. Milano **13** (1939), 204–226.
298. *Richert H.-E.* Über Zerfallungen in ungleiche Primzahlen. Math. Zeitschr., **52** (1949), 342–343.
299. *Richstein J.* Verifying the Goldbach conjecture up to $4 \cdot 10^{14}$, Math. Comput. **70** (2001), 1745–1749.
300. *H. Riesel and R. C. Vaughan,* On sums of primes, Ark. Mat. **21** (1983), no. 1, 46–74.
301. *Romanoff N. P.* Über einige Sätze der additiven Zahlentheorie. Math. Ann., **109** (1934), 668–678.
302. *Ross P. M.* On Chen's theorem that each large even number has the form $p_1 + p_2$ or $p_1 + p_2 p_3$. J. London Math. Soc. (2) **10** (1975), no. 4, 500–506.
303. *Ross P. M.* On linear combinations of primes and numbers having at most two prime factors. Ph. D. Thesis, Imperial College, 1976, 103p.
304. *Roure E., Travesa A.* Two independent checkings of the weak Goldbach conjecture up to 10^{27}. Exp. Math. **25** (2016), no. 1, 79–82.
305. *Saouter Y.* Checking the odd Goldbach conjecture up to 10^{20}. Math. Comput. **67** (1998), 863–866.
306. *Schinzel A.* Teoria liczb i algebra w pracach Salomona Lubelskiego. Dzieje matematyki polskiej. I. 237–248, ed. Witold Więsław. Inst. Mat. Uniw. Wrocławskiego, Wrocław, 2012. 311s.
307. *Selberg A.* An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions, Canad. J. Math. **2** (1950), 66–78.
308. *Selmer E. S., Nesheim G.* Die Goldbachschen Zwillingsdarstellungen der durch 6 teilbaren Zahlen 196302–196596. Norske Vid. Selsk. Forhdl. **15** (1942), 107–110.
309. *Selmer E. S.* Eine neue hypothetische Formel für die Anzahl der Goldbachschen Spaltungen einer geraden Primzahl und eine numerische Kontrolle. Arch. Math. Naturvid., **46** (1943), no. l, 1–18.
310. *Shah N. M., Wilson B. M.* On an empirical formula connected with Goldbach's Theorem. Cambr. Phil. Soc. Proc. **19** (1919), 238–244, 245–254.
311. *Shah N. M., Wilson B. M.* Numerical data connected with Goldbach's theorem. Lond. Math. Soc. Proc. (2) **18** (1920), VIII.
312. *Shao Xuancheng* An L-function-free proof of Vinogradov's three primes theorem. Forum Math. Sigma **2** (2014), Paper No. e27, 26p.
313. *Shao Xuancheng* A density version of the Vinogradov three primes theorem, Duke Math. J. **163** (2014), no. 3, 489–512.
314. *Shapiro H. N., Warga J.* On the representation of large integers as sums of primes, I. Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), 153–176.
315. *Shen Mok-kong* On checking the Goldbach conjecture. Nordisk Tidskr. Informationsbehandling (BIT) **4** (1964), 243–245.
316. *Shen Quanli* The ternary Goldbach problem with primes in positive density sets. J. Number Theory **168** (2016), 334–345.
317. *Siebert H.* Montgomery's weighted sieve for dimension two. Monatsh. Math., **82** (1976), no. 4, 327–336
318. *Sierpiński W.* Elementary theory of numbers. 2nd edition. Edited and with a preface by Andrzej Schinzel. North-Holland Mathematical Library, 31. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; PWN—Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1988. xii+515 pp.

319. *Sinisalo M. K.* Checking the Goldbach conjecture up to $4 \cdot 10^{11}$. Math. Comput., **61** (1993), 931–934.
320. *Stäckel P.* Ueber Goldbachs empirisches Theorem: Jede gerade Zahl kann als Summe von zwei Primzahlen dargestellt werden. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1896, 292–299.
321. *Stäckel P.* Die Darstellung der geraden Zahlen als Summen von zwei Primzahlen. Heidelb. Akk. Sitzber. 1916, 10. Abhandlung (1916).
322. *Stäckel P.* Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen. I, II. Heidelb. Ak. Sitzber. 1917, 15. Abhandlung; 1918, 2. Abhandlung.
323. *Stäckel P., Weinreich W.* Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen. Abh. Heidelb. Akad. Wiss. Nr. 10. Berlin: Ver. Wiss. Verl. 55 S. (1922).
324. *Stanley G. K.* On the representation of a number as a sum of squares and primes. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **29**, 122–144 (1929).
325. *Stein M. L., Stein D. R.* New experimental results on the Goldbach conjecture. Math. Mag., **38** (1965), 72–78.
326. *Studnička F. J.* Poznámka o číslech sudých. Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky, 26 (1897), no. 2–3, 207–208.
327. *Svoboda J.* Sur le théorème de Goldbach. Interméd. des math. **22** (1915), 132–133.
328. *Sylvester J. J.* On the partition of an even number into two primes. Proc. of L. M. S. **4** (1872), 4–6. [Collected Math. Papers, 2, 709–711, Cambridge, 1908.]
329. *Sylvester J. J.* On the Goldbach—Euler theorem concerning prime numbers. Nature **55** (1896), 196–197.
330. *Tchudakoff N.* On Goldbach—Vinogradov's theorem. Ann. Math. (2) **48** (1947), 515–545.
331. *Tao T.* Every odd number greater than 1 is the sum of at most five primes. Math. Comput., **83** (2014), 997–1038.
332. *Tao T., Vu V.* Additive Combinatorics, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 105 (Cambridge University Press, Cambridge, 2006).
333. *Teissier B* Crible de Brun. Séminaire Delange—Pisot—Poitou. Théorie des nombres, 7, (1965–1966), no. 2, exp. 11, 1–13.
334. *Togashi A., Uchiyama S.* On the representation of large even integers as sums of two almost primes. I. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **18** (1964), 60–68.
335. *Uchiyama S.* On the representation of large even integers as sums of two almost primes. II. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **18** (1964), 69–77.
336. *Uchiyama S.* On the representation of large even integers as sums of a prime and an almost prime. II. Proc. Japan Acad. **43** (1967), 567–571.
337. *Uchiyama M., Uchiyama S.* On the representation of large even integers as sums of a prime and an almost prime. Proc. Japan Acad. **40** (1964), 150–154.
338. *Vardi I.* Computational recreations in `Mathematica`. Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, Redwood City, CA, 1991. xviii+286p.
339. *Vaserstein L. N.* Noncommutative number theory. Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), 445–449, Contemp. Math., **83**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
340. *Vaughan R. C.* On Goldbach's problem. Acta Arith. **22** (1972), 21–48.
341. *Vaughan R. C.* A note on Šnirel'man's approach to Goldbach's problem, Bull. London Math. Soc. **8** (1976), 245–250.
342. *Vaughan R. C.* On the estimation of Schnirelman's constant, J. Reine Angew. Math. **290** (1977), 93–108.
343. *Vaughan R. C.* Sommes trigonométriques sur les nombres premiers. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B, **285** (1977) no. 6, A981–A983.
344. *Vaughan R. C.* The Hardy—Littlewood method. Second edition. Cambridge Tracts in Mathematics, 125. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xiv+232 pp.
345. *Vaughan R. C.* Hardy's legacy to number theory. J. Austraila Math. Soc., series A, **65** (1998).
346. *Vecchi M.* Un nuovo aspetto dato al teorema di Goldbach. Rom. Acc. L. Rend. (5) **22** (1913), no. 2, 654–659.
347. *Vinogradow I.* Some theorems concerning the theory of primes, Мат. сборник, **2 (44)** (1937), no. 2, 179–194.

348. *Vinogradov I. M.*, Representation of an odd number as a sum of three primes, C. R. Acad. Sci. URSS **15** (1937), 6–7.
349. *Walfisz A.* Zur additiven Zahlentheorie. II. Math. Z. **40** (1935), 592–607.
350. *Wang Tianze* On Linnik's almost Goldbach theorem. Sci. China Ser. A **42** (1999), 1155–1172.
351. *Wang Tianze* The Goldbach problem for odd numbers under the generalized Riemann hypothesis. II. (Chinese) Adv. in Math. (China) **25** (1996), no. 4, 339–346.
352. *Wang, Tian Ze; Chen, Jing Run* On odd Goldbach problem under general Riemann hypothesis. Sci. China Ser. A **36** (1993), no. 6, 682–691.
353. *Wang Yuan* On the representation of a large even integer as a sum of a product of at most 3 primes and a product of at most 4 primes. Acta Math. Sin. **6** (1956), 500–513 (Chinese).
354. *Wang Yuan* On the representation of large even integer as a sum of a prime and a product of at most 4 primes. (Chinese) Acta Math. Sin. **6** (1956), 565–582.
355. *Wang Yuan* On the representation of large even as a sum of two almost primes. Science Record, n. Ser. **1** (1957), 291–295.
356. *Wang Yuan* On sieve methods and some of their applications, I. Acta Math. Sinica 8 (1958), 413–429 (Chinese). English translation: Sci. Sinica **8** (1959), 357–381.
357. *Wang Yuan* On sieve methods and some of their applications. (Chinese. English summary) Zbl 0152.03502 Acta Math. Sin. **9** (1959), 87–100.
358. *Wang Yuan* On the representation of large integer as a sum of a prime and an almost prime. (Chinese) Acta Math. Sin. **10** (1960), 168–181; multiple English translations in Chin. Math. **1** (1962), 181–195; Sci. Sin. **11** (1962), 1033–1054. Appendix Sci. Sin. **11** (1962), 1050–1054.
359. *Wang Yuan* The Goldbach Conjecture, 2nd Edition, 1964.
360. *Ward M.* A generalization of a familiar theorem concerning prime numbers. Journal L. M. S. **5** (1930), 106–107.
361. *Waring E.* Meditationes Algebraicae, https://archive.org/details/bub_gb_1MNbAAAAQAAJ, English translation by Dennis Weeks of the 1782 edition. Amer. Math. Soc., Providence, 1991,
362. *Weil A.* Number theory. An approach through history from Hammurapi to Legendre. Reprint of the 1984 edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. xxii+377 pp
363. *Yang Sh., Togbé A.* A note of three prime representation problems. Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) **32** (2016), no. 1, 23–31.
364. *Yin Wen-Lin* Note of the representation of large integers as sums of primes. (Chinese), Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis **3** (1956), 323–326. reprinted as Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. **4** (1956), 793–795.
365. *Zeilberger D.* Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture. Notices Amer. Math. Soc. **40** (1993), no. 8, 978–981; reprinted in Math. Intelligencer **16** (1994), no. 4, 11–14.
366. *Zhang M. Y., Ding P.* An improvement to the Schnirelman constant. J. China Univ. Sci. Techn. **13** (1983), Math. Issue, 31–53.
367. *Zhang Zhen Feng, Wang Tian Ze* The ternary Goldbach problem with primes in arithmetic progressions. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **17** (2001), no. 4, 679–696; Chinese translation: Acta Math. Sinica (Chin. Ser.) **46** (2003), no. 5, 965–980.
368. *Zinoviev D.* On Vinogradov's constant in Goldbach's ternary problem. J. Number Theory **65** (1997), no. 2, 334–358.
369. *Zulauf A.* Beweis einer Erweiterung des Satzes von Goldbach—Vinogradov. J. Reine Angew. Math. **190** (1952), 169–198.
370. *Zulauf A.* Über den dritten Hardy—Littlewoodschen Satz zur Goldbachschen Vermutung. J. Reine Angew. Math. **192** (1953), 117–128.

ГРНТИ 00000

Поступила в редакцию 2 января 2014, окончательный вариант 24 января 2016 г.

Computer tools in education, 2020
№ -: 2–59
http://ipo.spb.ru/journal
doi:10.1000/182

Computers as new mathematical reality. IV. Goldbach problem

N. A. Vavilov
SPbU

Abstract

In this part I pursue the discussion of the role of computers in additive number theroy. Here I sketch the definitive solution of the ternary = odd Goldbach problem, not in one of its XX century asymptotric reformulations, but in its *original* XVII century form. Namely, that *every* odd number $n > 5$ is a sum $n = p_1 + p_2 + p_3$ of three positive rational primes. A solution of this problem was only completed by Harald Helfgott in 2013–2014 and there is no chance that it could be obtained without the use of computers. Apart from that, I discuss the status of the binary = even Goldbach problem, partial results towards its solution, as well as some further related proiblems.

Keywords: *Ternary Goldbach problem, binary Goldbach problem, Brun—Schnirelmann method, Schnirelmann constant, Hardy—Litllewood—Vinogradov method*

Citation: N. A. Vavilov. Computers as new mathematical reality. IV. Goldbach problem. Computer tools in education, 2020. № -. P. 2–59 : DOI: http://dx.doi.org/10.1000/182.

Acknowledgements: *here we may thank everybody who helped authors with this paper, and name grants that supported the research and the paper.*

Received October 7, 2001, The final version: December 28, 2015

Nikolai Alexandrovich Vavilov, Dr. Sci., Professor SPbU nikolai-vavilov@yandex.ru

Николай Александрович Вавилов,
д.ф.-м.н, профессор математики
Факультета МКН СПбГУ
nikolai-vavilov@yandex.ru