

Научно-образовательный центр при МИАН, осень 2021

Г.Б. Шабат,
ДЕТСКИЕ РИСУНКИ И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Лекция 2 (13 сентября 2021)

Действие группы Галуа на плоские деревья

Эта лекция элементарна и оформлена так, что её содержание можно воспринимать независимо от предыдущей.

2.0. Уравнения на многочлены Шабата (уточнения).....	1
...2.0.0. Переобозначения.....	1
...2.0.1. Двудольная структура.....	1
...2.0.2. Валентности.....	1
...2.0.3. Уравнения.....	2
...2.0.4. Списки валентностей (паспорта).....	2
...2.0.5. Уточнённые уравнения.....	3
2.1. Примеры.....	3
...2.1.0. Ёжики.....	3
...2.1.1. Цепочки.....	3
...2.1.2. Пропеллеры.....	4
2.2. Введение в арифметику плоских деревьев.....	5
...2.2.0. О поле алгебраических чисел.....	5
...2.2.1. Башня полей алгебраических чисел.....	5
...2.2.2. Абсолютная группа Галуа.....	5
...2.2.3. Обратная задача Галуа.....	5
...2.2.4. Действие группы Галуа на плоских деревьях.....	6

2.0. Уравнения на многочлены Шабата (уточнения)

2.0.0. Переобозначения. Сегодня рассматриваем плоские деревья

$$\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbb{C}$$

с точностью до *изотопии*. Иначе говоря, переобозначаем

$$\mathbf{T} := \mathbf{X}_1.$$

Множества вершин сегодня обозначаем

$$\mathbf{X}_0 =: \mathbf{V} \subset \mathbf{T}.$$

Напомним, что дополнение $\mathbf{T} \setminus \mathbf{V}$ гомеоморфно несвязному объединению интервалов.

Подразумевается

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{P}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \coprod \{\infty\}.$$

2.0.1. Двудольная структура. Дерево $\mathbf{T}$ по определению не содержит циклов. Это позволяет осуществить разбиение

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^+ \coprod \mathbf{V}^-$$

Так, что соединяемые ребром вершины лежат в разных множествах. Это разбиение однозначно с точностью до замены

$$\mathbf{V}^\pm \leftrightarrow \mathbf{V}^\mp.$$

2.0.2. Валентности. Не будем теперь нумеровать вершины деревьев. Для каждого дерева определена функция

$$\text{val}_0 : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{N},$$

сопоставляющая каждой вершине количество рёбер, в замыкании которых она лежит. Её можно разбить на две функции

$$\text{val}_0^\pm : \mathbf{V}^\pm \longrightarrow \mathbb{N},$$

что иногда удобно, а иногда не нужно.

2.0.3. Уравнения. Как и в первой лекции, мы записываем их в виде

$$\boxed{\text{Ш} - c_\pm \equiv k \prod_{A \in \mathbf{V}_\pm} (z - A)^{\text{val}_0(A)}} \quad (\star)_\pm$$

Эта система алгебраических уравнений (по существу на вершины дерева $\mathbf{T}$) зависит только от набора валентностей (абстрактного!) дерева. Как мы увидим, и реализации этих наборов валентностей, и вложения деревьев в плоскость представляют собой орбиты *абсолютной группы Галуа*.

2.0.4. Списки валентностей (паспорта). Функции

$$\text{val}_0^\pm : \mathbf{V}^\pm \longrightarrow \mathbb{N}$$

определены на конечных неупорядоченных множествах. Их можно задать невозрастающими последовательностями значений; после соответствующей нумерации вершин $\mathbf{V}^\pm = \{A_1^\pm, \dots, A_{m^\pm}^\pm\}$ и обозначения

$$a_i^\pm := \text{val}_0^\pm(A_i^\pm)$$

с условием

$$a_1^\pm \geq a_2^\pm \geq \dots$$

мы будем собирать валентности в так называемый *паспорт* дерева¹

$$\left(a_1^+ \ a_2^+ \ \dots \ a_{m_+}^+ \ \middle| \ a_1^- \ a_2^- \ \dots \ a_{m_-}^- \right).$$

Предложение. *Если две последовательности натуральных чисел*

$$\left(a_1^+ \ a_2^+ \ \dots \ a_{m_+}^+ \ \middle| \ a_1^- \ a_2^- \ \dots \ a_{m_-}^- \right)$$

составляют паспорт некоторого дерева тогда и только тогда, когда имеют место соотношения

$$a_1^+ + a_2^+ + \dots + a_{m_+}^+ = a_1^- + a_2^- + \dots + a_{m_-}^- =: n \quad (2.0.4a)$$

и

$$m^+ + m^- = n + 1. \quad (2.0.4b)$$

Доказательство. "Тогда"-часть очевидна: она утверждает, что у дерева n рёбер и $n + 1$ вершина. Доказательство "только тогда"-части предлагается провести в задаче 2.1. ■

2.0.5. Уточнённые уравнения. Далее будем пользоваться обозначением паспорта

$$\Pi = \left(a_1^+ \ a_2^+ \ \dots \ a_{m_+}^+ \ \middle| \ a_1^- \ a_2^- \ \dots \ a_{m_-}^- \right)$$

и с помощью этого обозначения перепишем уравнения $(\star)_\pm$:

$$\boxed{\text{Ш}_\Pi - c_\pm \equiv k \prod_{i=1}^{m_\pm} (z - A_i^\pm)^{a_i^\pm}} \quad (\star')_\pm$$

Из этих уравнений изготавливается одно $\frac{\star'_+ - \star'_-}{k}$:

$$\boxed{c \equiv \prod_{i=1}^{m_+} (z - A_i^+)^{a_i^+} - \prod_{i=1}^{m_-} (z - A_i^-)^{a_i^-}}, \quad (\star)_\Pi$$

где $c := \frac{c_- - c_+}{k}$

Это – система из n скалярных уравнений (равенство многочленов степени n со старшим коэффициентом 1) на неизвестные

$$c; A_1^+, \dots, A_{m_+}^+; A_1^-, \dots, A_{m_-}^-$$

¹При рассмотрении общих пар Белого это понятие будет усложнено.

числом $1 + m_+ + m_- = n + 2$. Превышение на 2 количества неизвестных над количеством уравнений объясняется действием аффинной группы.

Деревьям (в истинной форме) и многочленам Шабата соответствуют *непаразитические* решения системы $(\star)_\Pi$, то есть удовлетворяющие условиям

$$A_i^\pm \neq A_j^\pm \text{ при } i \neq j \text{ и } A_i^+ \neq A_j^- \text{ при любых } i, j.$$

Рекомендуется задача 2.2.

Системы уравнений $(\star)_\Pi$ представляют собой системы полиномиальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{Z}$; их решения могут рассматриваться над любым коммутативным кольцом. Рекомендуется задача 2.3.

2.1. Примеры

Сегодня обсудим простейшие.

2.1.0. Ёжики. Здесь паспорта имеют простейший вид

$$\Pi = \left(n \mid 1 \dots 1 \right).$$

Ограничимся указанием решения системы $(\star)_\Pi$, задаваемой многочленом

$$\Pi = z^n.$$

2.1.1. Цепочки. Паспорта имеют вид

$$\Pi = \left(2 \ 2 \dots 2 \ 2 \ 1 \mid 2 \ 2 \dots 2 \ 2 \ 1 \right)$$

или

$$\Pi = \left(2 \ 2 \dots 2 \ 2 \ 2 \mid 2 \ 2 \dots 2 \ 1 \ 1 \right).$$

Решения системы $(\star)_\Pi$ задаются *многочленами Чебышёва*

$$\Pi(z) = T_n(z) := \cos(n \arccos z).$$

Рекомендуются задачи 2.4 и 2.5.

2.1.2. Пропеллеры. Паспорта состоят из одной 3, многих 2 и трёх 1 в нескольких вариантах. Наглядное изображение дерева: Υ_{abc} . Здесь паспорта имеют много реализаций. Рекомендуется задача 2.6.

Задача вычисления соответствующих многочленов Шабата во многом открыта.

2.2. Введение в арифметику плоских деревьев

2.2.0. О поле алгебраических чисел. О терминологии: имеется ли в виду поле всех алгебраических чисел? Поля $\mathbb{K} \supset \mathbb{Q}$ тоже называют *полем алгебраических чисел*.

Поле $\overline{\mathbb{Q}}$ можно понимать как (абстрактное) алгебраическое замыкание поля $\mathbb{Q}$, а можно – как подполе поля $\mathbb{C}$:

$$\overline{\mathbb{Q}} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \exists r_1, \dots, r_n \in \mathbb{Q}, \alpha^n + r_1 \alpha^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0\}.$$

2.2.1. Башня полей алгебраических чисел. Всевозможные промежуточные поля $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ образуют частично упорядоченное относительно вложений множество.

На нижних этажах расположены квадратичные и кубические расширения, понимание которых относится соответственно к нескольким древним цивилизациям и к Возрождению. Дальше – чем ”выше”, тем сложнее, а полная картина симметрий этой башни до сих пор не прояснена – см. ниже.

2.2.2. Абсолютная группа Галуа. В её названии сходятся все авторы, а обозначения разнятся. Мы будем пользоваться обозначением Гротендика

$$\Gamma := \text{Aut}(\overline{\mathbb{Q}})$$

и не будем пользоваться распространёнными $G_{\mathbb{Q}}$ и т. п.

Группа Γ – континуальная группа, снабжённая *проконечной* топологией; понимать точный смысл этого слова сейчас не обязательно. Как топологическое пространство Γ *вполне несвязна* – как канторово множество.

2.2.3. Обратная задача Галуа. Группа Галуа наблюдаема через свои конечные фактор-группы. Согласно теории Галуа, каждая такая группа $G = \frac{\Gamma}{\Gamma}$ является группой автоморфизмов некоторого поля алгебраических чисел:

$$G = \text{Aut}(\mathbb{K}),$$

где $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K} \subset \overline{\mathbb{Q}}$ и $(\mathbb{K} : \mathbb{Q}) < \infty$.

Обратная задача Галуа представляет собой вопрос:

Всякая ли конечная группа изоморфна фактору абсолютной группы Галуа?

Ответ на сегодняшний день (октябрь 2021) неизвестен.

Для широких классов конечных групп утвердительный ответ был получен выдающимися математиками начиная с 19-го века. Интересно отметить, что работа [Белый1979], в которой была доказана теорема Белого, по существу положившая начало теории детских рисунков (см. последующие лекции) была посвящена именно обратной задаче Галуа.

Надежда на то, что эта теория внесёт свой вклад в решение задачи, сохраняется, хотя пока и не оправдалась.

2.2.4. Действие группы Галуа на плоских деревьях. Введённые в начале лекции уравнения на многочлены Шабата представляют собой полиномиальные уравнения с целыми коэффициентами; поэтому абсолютная группа Галуа Γ действует на множестве их решений.

Это даёт возможность визуализации группы Γ с помощью её действия на плоских деревьях. Соответствующие конструкции и проблемы будут обсуждаться в последующих лекциях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[Белый1979] Г.В. Белый, *О расширениях Галуа максимального кругового поля*. Известия АН СССР, серия математическая. — 1979. — Т. 43, вып. 2. — С. 267–276.