Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 2.

Теретёнков Александр Евгеньевич

14 сентября 2020 г.

В прошлой серии...

- Среднее значение $X = X^\dagger$

$$\langle X \rangle = \operatorname{Tr} X \rho$$

- Пусть

$$X = \sum_x x \Pi_x$$

Вероятность получить значение x наблюдаемой равна

$$\mu_\rho(x) = \operatorname{Tr} \Pi_x \rho$$

Наблюдаемые

Селективные измерения (Коллапс волновой функции):
Апостериорное состояние, если прибор показал x

$$\frac{\Pi_x \rho \Pi_x}{\mathrm{Tr}\, \Pi_x \rho \Pi_x}$$

по предыдущему это состояние возникнет с вероятностью $\mathrm{Tr}\, \Pi_x \rho \Pi_x$ — проекционный постулат Людерса-фон Неймана. В случае диагональной матрицы плотности в собственном базисе наблюдаемой получим

$$\frac{p_i}{\sum_{j:x_j=x} p_j}, \qquad \forall i : x_i = x,$$

то есть также как и в классике.

Наблюдаемые

Неселективные измерения (если провели измерение, но не посмотрели на прибор):

$$\sum_x \operatorname{Tr} \Pi_x \rho \Pi_x \frac{\Pi_x \rho \Pi_x}{\operatorname{Tr} \Pi_x \rho \Pi_x} = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

Для диагональных (в базисе наблюдаемой) матриц плотности $\sum_x \Pi_x \rho \Pi_x = \rho$.

Наблюдаемые

В невырожденном случае ($\Pi_x = |i\rangle\langle i|$)

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{2n} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Таким образом, процесс измерения связан с распадом (стремлением к нулю) когеретностей. Такой процесс называется *декогерентностью* (иногда дефазировкой). В классическом случае (если ρ диагонально) такое неселективное измерение не оказывает влияния. В результате, процесс (чёткого) измерения помимо чисто классического эффекта селекции (отбора) приводит к квантовому влиянию на систему (декогеренции).
В вырожденном случае — блочно-диагональный вид.

Как задаётся динамика чистых состояний?

Динамика

Уравнение Шрёдингера

$$\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = -\frac{i}{\hbar}H|\Psi\rangle$$

мы положим постоянную Планка $\hbar$ равной 1

$$\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = -iH|\Psi\rangle$$

Его решение

$$|\Psi\rangle = e^{-iHt}|\Psi_0\rangle$$

Можно ввести эволюционную матрицу $U_t = e^{-iHt}$. Такая матрица является унитарной. Если разложить $H = \sum_i \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$, то $U_t = \sum_i e^{-i\varepsilon_i t}|i\rangle\langle i|$.

Динамика

Как задаётся динамика смешанных состояний?

Динамика

Уравнение фон Неймана

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho]$$

Его решение

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt}$$

Упражнение. Проверить.

Динамика

Динамика в собственном базисе $H = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$
(**Упражнение**. Проверить для матриц 2×2.)

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)e^{iHt} =$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_2)t} & \cdots & \rho_{1n}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_n)t} \\ \rho_{21}e^{-i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)t} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n}e^{-i(\varepsilon_2-\varepsilon_n)t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}e^{-i(\varepsilon_n-\varepsilon_1)t} & \rho_{n2}e^{-i(\varepsilon_n-\varepsilon_2)t} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix}$$

Динамика

Селективное измерение: получили значение ε_1

$$\rho \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Таким образом, унитарная динамика не способна описывать процесс селективного измерения энергии и декогеренцию. Кроме того, диагональные элементы матрицы плотности постоянны, поэтому невозможно описывать с помощью унитарной динамики и перенос населёностей. Отметим, также что процесс неселективного измерения являются необратимым.

Динамика

На самом деле верна **теорема Вигнера**: пусть Φ — взаимооднозначное аффинное отображение выпуклого множества матриц плотности, тогда $\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$ или $\Phi(\rho) = U\rho^T U^\dagger$.
Выпуклое множество: выпуклая комбинация $\sum_i p_i \rho_i$ — тоже матрица плотности. Аффинное отображение $\Phi(\sum_i p_i \rho_i) = \sum_i p_i \Phi(\rho_i)$.

Динамика

$$(U_t\rho^T U_t^\dagger)^T = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12}e^{i(\varepsilon_1-\varepsilon_2)t} & \cdots & \rho_{1n}e^{i(\varepsilon_1-\varepsilon_n)t} \\ \rho_{21}e^{i(\varepsilon_2-\varepsilon_1)t} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2n}e^{i(\varepsilon_2-\varepsilon_n)t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1}e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_1)t} & \rho_{n2}e^{i(\varepsilon_n-\varepsilon_2)t} & \cdots & \rho_{nn} \end{pmatrix} = \\ = U_{-t}\rho U_{-t}^\dagger$$

— обращение времени.

Однако каков смысл действия именно на состояния $\rho(\hat{p}) = \rho(-i\frac{d}{dx})$. $\rho^T(\hat{p}) = \rho(-\hat{p})$ — квантовый аналог отображения Лошмидта $p \to -p$.