ON STRUCTURE GRAPHS AND STRUCTURAL FORMULAS OF THE MECHANISMS THEORY

M.D. Kovalev

Two descriptions of structure of the hinged mechanisms are compared. Using the example of hinge-lever mechanisms, the field of applicability of the so-called structural formulas of the mechanisms theory, expressing the number of degrees of freedom of a mechanism through the number of its links and kinematic pairs, is investigated.

Keywords: hinge-link mechanism, structural graph, structural formula, number of degrees of freedom.

УДК 514.172.4+514.177.2

О ТЕОРЕМАХ БРУННА И БРУННА–МИНКОВСКОГО

Ф.М. Малышев[1]

1 *malyshevfm@mi-ras.ru*; Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Случай равенства в теореме Брунна–Минковского представляет наибольшую трудность по той причине, что до сих пор доказательства проводились не для трёх параллельных сечений выпуклых тел, как у Брунна, а для сумм Минковского. Используемых Брунном рассечений достаточно для элементарного (доступного школьникам) доказательства теоремы. Приписывать случай равенства Минковскому не правомерно.

Ключевые слова: выпуклые тела, многогранники, неравенство Брунна–Минковского.

Теорема (Брунна, 1887)**.** *Пусть в двух параллельных гиперплоскостях L_0, L_1 в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, $n \geqslant 1$, содержатся выпуклые тела P_0, P_1 одинакового n-мерного объёма $v > 0$, P_1 не получается из P_0 параллельным переносом, и пусть P – сечение выпуклой оболочки их объединения гиперплоскостью L, параллельной L_0, L_1 и находящейся строго между ними. Тогда n-мерный объём v' тела P будет строго больше v.*

Теорема (Брунна–Минковского)**.** *Пусть P_0, P_1 два выпуклых тела в $\mathbb{R}^n$ одинакового объёма $v > 0$, не получающиеся одно из другого параллельным переносом, и пусть $0 < t < 1$. Тогда объём v'' тела $P = (1-t)P_0 + tP_1$ строго больше v.*

Утверждения этих теорем эквивалентны, поскольку $v' = v''$ при некотором t. Основные приложения связаны со второй формулировкой теоремы. Первоначально, как заметил Минковский, Брунном было доказано неравенство $v' \geqslant v$ [1]. Позже Брунн устранил пробел в доказательстве. Доказательство Минковского неравенства $v'' > v$ появилось через год после его смерти [2]. Подробней см. в [3]. Новые доказательства многих авторов данных простых утверждений появляются до настоящего времени, но только в условиях второй формулировки теоремы, в условиях особенности: $L_0 = L = L_1$, из-за чего и сформировалось представление, что исключение равенства $v'' = v$ представляет наибольшую сложность, преодоление которой потребовало новых идей, в частности, симметризации Штейнера, основанной на принципе Кавальери. При $L_0 \neq L \neq L_1$, когда больше возможностей для геометрической интуиции, возможны элементарные доказательства неравенства $v' > v$, доступные при $n = 2$ школьникам. До работы [3] таких доказательств не было.

Приведём план доказательства неравенства $v' > v$, используя неравенства $v' \geqslant v$. Напомним приём рассечения Брунна. Пусть M – гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, разбивающая тела P_0 и P_1 на части P_0', P_0'' и P_1', P_1'', $P_0 = P_0' \cup P_0''$, $P_1 = P_1' \cup P_1''$, причём $V_n(P_0') = V_n(P_1')$ и P_0', P_1' находятся по одну сторону от гиперплоскости M. Если теорема верна для пар тел P_0', P_1' и P_0'', P_1'', причём со строгим неравенством хотя бы только по одну из сторон M, то она будет верна и для тел P_0, P_1.

Приближая тело P_0 вписанным многогранником и применяя рассечения Брунна по граням этого многогранника, доказательство сведётся к случаю, когда P_0 многогранник. Если и новое P_1 приближать многогранником, то результирующие P_0 и P_1 оба будут многогранниками, несовпадающими при параллельных сдвигах.

Последовательными рассечениями Брунна многогранник P_0 разбивается на симплексы. Используя индукцию по n и выделяя в многограннике P_0 какую-либо вершину A, можно считать P_0 "пирамидой" с вершиной A и неровным "основанием", состоящим из нескольких его $(n-1)$-граней (несодержащих A). Гиперплоскость M, содержащая вершину A и одну из $(n-2)$-граней, общую для двух $(n-1)$-граней "основания", разбивает P_0 на 2 "пирамиды", в каждой из которых число граней по крайней мере на 1 меньше, чем в "основании" у P_0. Дальнейшие независимые разбиения частей P_0 гиперплоскостями $M \ni A$ оставят во всех "основаниях" по одной $(n-1)$-грани, которые по предположению индукции разбиваются на $(n-1)$-симплексы, а значит и P_0 разбивается на n-симплексы.

Когда P_0 симплекс с вершиной A, многогранник P_1 вписываем в минимальный симплекс Δ, гомотетичный P_0. Многогранник P_1 расширяем до многогранника $\widetilde{P}_1$ так, что пересекающиеся с P_0 опорные гиперплоскости в $\mathbb{R}^{n+1}$ с любой заданной нормалью, несодержащие A или содержащие A и хотя бы ещё одну вершину P_0, у $P_0 \cup P_1$ и $P_0 \cup \widetilde{P}_1$ одинаковы. Затем гиперплоскостью в $\mathbb{R}^{n+1}$, опорной для P_0 и содержащей ребро P_0, отсечём от $\widetilde{P}_1$ такой многогранник, что оставшийся многогранник $\widehat{P}_1$ будет иметь объём v. В результате по сравнению с P объём соответствующего $\widetilde{P}$ увеличится на одну величину, а объём $\widehat{P}$ уменьшится по сравнению с $\widetilde{P}$ на большую величину, поэтому $v' > \widehat{v} \geqslant v$.

Многогранник P_1 считаем особенным порядка $i = 0, 1, \ldots, n-1$, если опорные гиперплоскости Δ с нормалями как у граней P_1 содержат более i вершин Δ, причём хотя бы в одной из этих гиперплоскостей $i+1$ вершина Δ. Рассуждение предыдущего абзаца возможно только для многогранников P_1 общего положения, когда $i = 0$. Для $i > 0$ имеем $\widetilde{P}_1 = P_1$. Но если $i \leqslant n-2$, когда $P_1 \subsetneq \Delta$, рассечения Брунна с P_0' и P_0'' в виде симплексов позволяют порядок особенности либо у P_1' либо у P_1'' делать меньше i. Это позволяет завершать доказательство теоремы Брунна индукцией по i.

Литература

1. Brunn, H. "Uber Ovale und Eiflachen." Inag. Diss., Munchen, 1887, 86 pp.

2. Minkowski, H. "Geometrie der Zahlen." Leipzig-Berlin, 1896, 1910, 278 pp.

3. Малышев Ф.М. Завершение доказательства теоремы Брунна элементарными средствами. *Чебышевский сборник*, **22**:2 (2021), 160–182.

ON THE BRUNN AND BRUNN–MINKOWSKI THEOREMS

F.M. Malyshev

The case of equality in the Brunn - Minkowski theorem presents the greatest difficulty for the reason that so far the proofs have been carried out not for three parallel sections of convex bodies, as in Brunn's, but for Minkowski sums. The cuts used by Brunn are sufficient for an elementary (accessible to schoolchildren) proof of the theorem. Scribe the case of equality to Minkowski.

Keywords: convex bodies, polyhedra, Brunn-Minkowski inequality

УДК 514.764

ПОВОРОТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ «В ЦЕЛОМ» И ПРОЕКЦИИ СФЕРЫ

Й. Микеш[1], Н.И. Гусева[2], П. Пешка[3], Л. Рыпарова[4]

1 *josef.mikes@upol.cz*; Ун-т им. Ф. Палацкого, г. Оломоуц, Чешская Республика
2 *ngus12@mail.ru*; Московский педагог. гос. ун-т, ВИНИТИ, г. Москва, РФ
3 *patrik.peska@upol.cz*; Ун-т им. Ф. Палацкого, г. Оломоуц, Чешская Республика
4 *ryparova@vutbr.cz*; Технический ун-т, г. Брно, Чешская Республика

В статье обсуждается вопросы поворотных отображений «в целом». Показано, что параллельные и центральные проекции плоскости на сферу являются поворотными отображенимии. Тоже самое верно для центральной проекции сферы на другую сферу. Когда первая сфера находится во второй и их центры не совпадают, получим поворотное отображение «в целом». Эти отображения аналитичны.

Ключевые слова: поворотное отображение, проекция, сфера, поверхность, изопериметрическая экстремаль поворота.

Эта статья посвящена изучению отображений поворота «в целом». Это одно из прямых обобщений геодезических отображений и преобразований поверхностей.

Лейко ввел понятие *изопериметрической экстремали вращения* на поверхностях $\mathscr{S}_2$ и двумерных римановых пространствах $\mathbb{V}_2$ с метрикой g, см. [1]. Эти кривые определяются как решение специальной вариационной задачи на римановых пространствах:

Кривая ℓ: $x = x(t)$ на поверхности или двумерном (псевдо) римановом пространстве называется *изопериметрической экстремалью вращения*, если ℓ является экстремалью функционалов $\theta[\ell]$ и $s[\ell] = \mathrm{const}$ с фиксированными концами. Здесь $s[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} |\lambda|\, \mathrm{d}t$ и $\theta[\ell] = \int_{t_0}^{t_1} k(t)\, \mathrm{d}t$, где $k(t)$ – кривизна и $|\lambda|$ – длина касательного вектора λ кривой ℓ.

В [1] Лейко доказал, что кривая ℓ является изопериметрической экстремалью вращения тогда и только тогда, когда ее кривизна Френе k и гауссова кривизна K пропорциональны, т.е. $k = c \cdot K$, где c – постоянная. При $c = 0$ – эти уравнения определяют геодезическую.

Микеш, Степанова и Сохор [2] нашли новую более простую форму уравнения изопериметрической экстремали вращения: $\nabla_s \lambda = c \cdot K \cdot F\lambda$, где c – постоянная, s – длина дуги, F – тензор типа $\binom{1}{1}$, который удовлетворяет условиям $F^2 =$