О некоторых нелинейных интегральных уравнениях с монотонным оператором Гаммерштейна на всей прямой

Х.А. Хачатрян

Ереванский Государственный Университет
Институт Математики НАН РА
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

2021

Введение

Рассмотрим следующий класс нелинейных интегральных уравнений:

$$f(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(f(t)) + H(t, f(t)))dt, x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

относительно искомой измеримой неотрицательной и ограниченной на $\mathbb{R}$ функции $f(x)$. В уравнении (1) ядро K – определенная на множестве $\mathbb{R}$ суммируемая и ограниченная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

a) $K(x) > 0, x \in \mathbb{R}, \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1, \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|K(x)dx < +\infty,$

b) $K(-\tau) = K(\tau)$, $\tau > 0$, $K(x) \downarrow$ по x на множестве $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$.

Нелинейность G обладает следующими свойствами:

1) $y = G(u)$ – непрерывная и монотонно возрастающая функция на множестве $\mathbb{R}^+$, $G(0) = 0$,
2) функция $y = G(u)$ выпукла вверх на множестве $\mathbb{R}^+$,
3) число $\eta > 0$ является первым положительным корнем уравнения $G(u) = u$ (рис. 1).

$H(t, u)$ – определенная на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ измеримая функция, принимает вещественные значения и удовлетворяет определенным условиям (см. ниже).

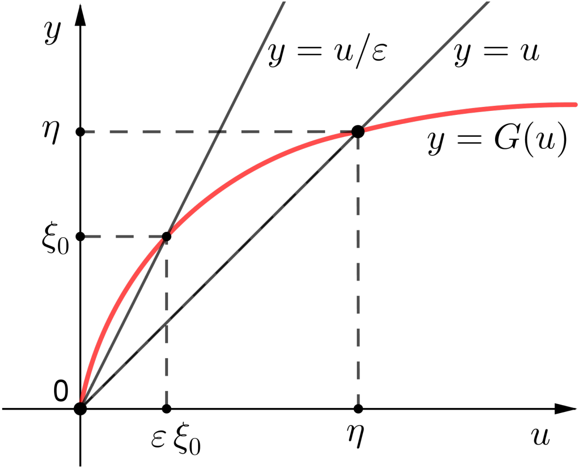

Рис.: 1

Уравнение (1), кроме математического интереса, имеет интерес в различных направлениях математической физики и математической биологии. В частности, при конкретных представлениях ядра K и нелинейностей G, H уравнение (1) возникает в динамической теории p-адических открыто-замкнутых струн, в математической теории пространственно-временного распространения пандемии (в рамках известной модели Дикмана - Капера), в физической кинетике (например, в задаче плоской ударной волны в рамках модифицированной нелинейной модели Бхатнагара-Гроса-Крука). В том частном случае, когда $H \equiv 0$ уравнение (1) при определенных ограничениях на G и K исследовалось в работах [В.С. Владимиров, Я.И. Волович, ТМФ (2004), И.Я. Арефьева, Тр. МИАН (2004), Х.А. Хачатрян, Изв. РАН. Сер. матем.(2018),(2020)].

В несимметричном случае, когда первый момент ядра K положителен и экспоненциально возрастает на отрицательной части числовой оси, уравнение (1) подробно изучалось в работах [O. Dikmann, H. Kaper, Nonlinear Analysis, Theory, Meth. and Appl.(1978), O. Diekmann, J.Math. Biology (1978), Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян, Труды МИАН (2020)].

В настоящей работе мы займемся изучением и решением уравнения (1) при общих и естественных ограничениях на ядро и на нелинейность. В частности будут доказаны теоремы существования и асимптотического поведения построенного решения. При дополнительных ограничениях на H мы докажем также теорему единственности решения в определенном классе непрерывных и ограниченных функций. В конце работы приведем примеры прикладного характера для функций G, H и K, удовлетворяющие всем условиям доказанных теорем.

Вспомогательные факты. Основные условия на функцию $H(t, u)$

Прежде чем накладывать соответствующие условия на функцию $H(t, u)$, приведем некоторые обозначения и вспомогательные факты. Сперва заметим, что из свойств 1) – 3) сразу следует существование числа $\varepsilon \in (0, 1)$, при котором уравнение $G^{-1}(u) = \varepsilon u$ имеет положительное решение ξ_0 (здесь $G^{-1}(u)$ обратная функция к функции $G(u)$). Зафиксируем число $\varepsilon \in (0, 1)$ (и, следовательно, решение ξ_0). Рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$\int_0^\infty K(x)e^{-px}dx = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

относительно переменной $p \geq 0$. Из свойств $a) - b)$ в силу теоремы Больцано - Коши следует, что характеристическое уравнение (2) имеет единственное решение $p = p_\varepsilon > 0$.

Введем следующее обозначение:

$$B(x) := \xi_0(1 - e^{-p_\varepsilon |x|}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Из результатов работы [Х.А. Хачатрян, Изв. РАН. Сер. матем. (2020)] следует, что имеет место следующая оценка снизу:

$$\int_0^\infty (K(x-t) - K(x+t))B(t)dt \geq \varepsilon B(x), \quad x \in \mathbb{R}^+, \tag{4}$$

причем в (4) равенство достигается только при $x = 0$. Заметим, что $\xi_0 < \eta$. Действительно, если предполагать, что $\xi_0 \geq \eta$ и обозначить через $Q = G^{-1}$, то в силу выпуклости вниз функции $y = Q(u)$ на $\mathbb{R}^+$ получим

$$\varepsilon = \frac{Q(\xi_0)}{\xi_0} \geq \frac{Q(\eta)}{\eta} = 1.$$

Последнее неравенство противоречит принадлежности ε интервалу $(0, 1)$.

Пусть $c_0 > 0$ – произвольное число. Рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$G(u) = u - c_0 \tag{5}$$

на множестве $\mathbb{R}^+$. Из свойств 1) – 3) немедленно следует, что уравнение (5) имеет положительное решение ξ. Так как $c_0 > 0$, то $\xi \neq \eta$. С другой стороны, учитывая выпуклость (вверх) и монотонность функции G заключаем, что $\xi > \eta$. Ниже убедимся, что число ξ определяется из уравнения (5) единственным образом. Действительно, если предполагать, что существует также число $\tilde{\xi} \neq \xi$, такое, что $G(\tilde{\xi}) = \tilde{\xi} - c_0$, то получим

$$G(\xi) - G(\tilde{\xi}) = \xi - \tilde{\xi}. \tag{6}$$

Так как $\xi, \tilde{\xi} > \eta$, то учитывая условия 1)−3) будем иметь (см. рис. 2)

$$\frac{G(\xi) - G(\tilde{\xi})}{\xi - \tilde{\xi}} < \frac{G(\eta)}{\eta} = 1,$$

а последнее противоречит соотношению (6).

$$\alpha < \psi < 45^\circ \Rightarrow$$

$$tg\,\alpha = \frac{G(\tilde{\xi}) - G(\xi)}{\tilde{\xi} - \xi} <$$

$$< \frac{G(\xi)}{\xi} \equiv tg\,\psi <$$

$$< \frac{G(\eta)}{\eta} = tg\,\rho = 1$$

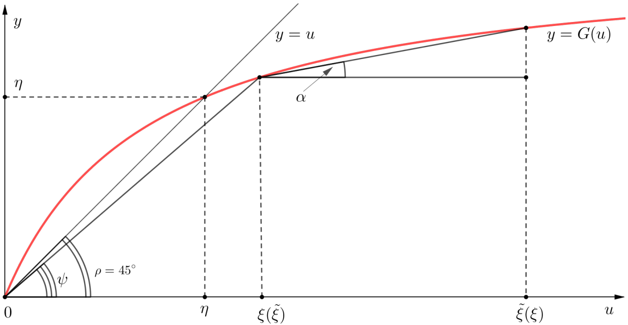

Рис.: 2

Таким образом, уравнение (5) имеет единственное решение ξ, причем

$$\xi > \eta > \xi_0. \tag{7}$$

Теперь мы готовы накладывать соответствующие условия на функцию $H(t, u)$:

I) при всяком фиксированном $t \in \mathbb{R}$ функция $H(t, u)$ монотонно возрастает по u на множестве $\mathbb{R}^+$,

II) $H(t, 0) \equiv 0, t \in \mathbb{R}$ и существует $\sup\limits_{u \geq 0} H(t, u) = \beta(t)$, причем $\beta(t)$ – определенная на $\mathbb{R}$ измеримая и ограниченная функция,

III) функция $H(t, u)$ на множестве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ удовлетворяет условию Каратеодори по аргументу u, т.е при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}^+$ функция $H(t, u)$ измерима по t на $\mathbb{R}$ и почти при всех $t \in \mathbb{R}$ данная функция непрерывна по u на множестве $\mathbb{R}^+$.

Мы будем исследовать уравнение (1) в следующих двух случаях:

Случай $A)$: $\beta \in L_1(\mathbb{R})$,

Случай $B)$: $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{\beta(t)\} - \beta(t) \in L_1(\mathbb{R})$.

Пусть $y = \tilde{Q}(u)$ – нечетное продолжение функции $Q(u)$ на отрицательной части числовой оси. Для простоты дальнейшего изложения обозначим через

$$c_0 := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{\beta(t)\} > 0. \tag{8}$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим следующее вспомогательное уравнение на всей прямой:

$$\tilde{Q}(\varphi(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt, \quad x \in \mathbb{R} \tag{9}$$

относительно искомой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$.

Согласно результатам работы [Х.А. Хачатрян, Изв. РАН. Сер. матем.(2020)] существует нечетное знакопеременное непрерывное ограниченное и монотонно возрастающее решение уравнения (9), причем

$$\lim_{x\to\pm\infty}\varphi(x)=\pm\eta, \quad \eta\mp\varphi\in L_1(\mathbb{R}^{\pm}),\ \mathbb{R}^{-}:=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}^{+} \tag{10}$$

$$\varphi(x)\geq B(x), \quad x\in\mathbb{R}^{+} \quad \text{(см. рис. 3).} \tag{11}$$

Из нечетности функции $\varphi(x)$ в силу (10) и (11) можем утверждать, что

$$\eta-|\varphi(x)|\in L_1(\mathbb{R}), \tag{12}$$

$$\eta\geq|\varphi(x)|\geq B(x), \quad x\in\mathbb{R}. \tag{13}$$

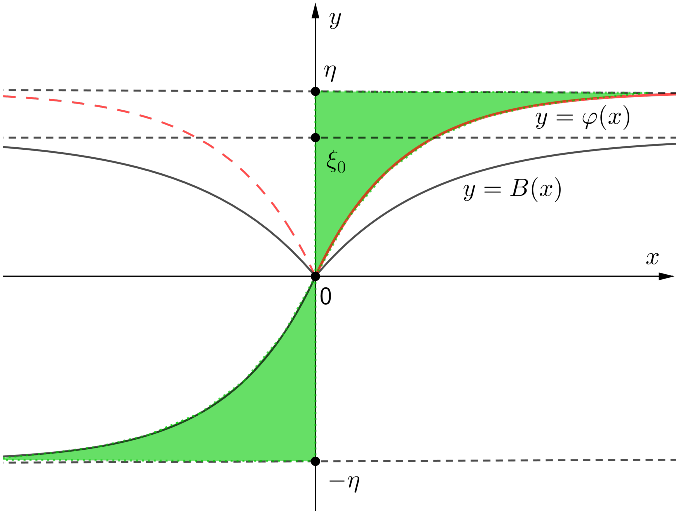

Рис.: 3

Построение неотрицательного и ограниченного решения

В этом параграфе мы займемся построением нетривиального неотрицательного и ограниченного решения уравнения (1). С этой целью введем следующие последовательные приближения для уравнения (1):

$$f_{n+1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(f_n(t)) + H(t, f_n(t)))dt, \tag{14}$$
$$f_0(x) = Q(|\varphi(x)|), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Сперва убедимся, что $f_n(x) \uparrow$ по n. Действительно из (9), $I), II), a)$ и 1) следует, что

$$f_1(x) \geq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)G(Q(|\varphi(t)|))dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|\varphi(t)|dt \geq$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt \right| = |\tilde{Q}(\varphi(x))| = Q(|\varphi(x)|) = f_0(x),$$

ибо $\varphi(x)$ и $\tilde{Q}(u)$ являются нечетными функциями. Предполагая теперь, что $f_n(x) \geq f_{n-1}(x)$ при некотором $n \in \mathbb{N}$ и при этом учитывая монотонность функций G и H по аргументу u, в силу положительности ядра K из (14) получим $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$.

Докажем теперь следующее неравенство сверху:

$$f_n(x) \leq \xi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где число ξ однозначно определяется из характеристического уравнения (5) для $c_0 := \sup\limits_{t \in \mathbb{R}}\{\beta(t)\}$. В случае $n = 0$ оценка (15) сразу следует из определения нулевого приближения с учетом (13), (7) и того факта, что $Q(\eta) = \eta$.

Предположим, что (15) выполняется для некоторого натурального n. Тогда, учитывая условия $a), 1), I)$, из (14) будем иметь

$$f_{n+1}(x) \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)+H(t,\xi))dt \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)+c_0)dt = \xi.$$

Учитывая условие Каратеодори на функцию $H(t,u)$, индукцией по n нетрудно проверить, что каждый элемент из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ из себя представляет измеримую функцию на множестве $\mathbb{R}$. Итак, в силу (15) заключаем, что существует поточечный предел для монотонной и измеримой последовательности $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причем предельная функция $f(x)$ согласно теореме Б. Леви удовлетворяет уравнению (1).

Из (14) и (15) в виду монотонности $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ по n следует также, что

$$Q(|\varphi(x)|) \leq f(x) \leq \xi, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Итак, мы доказали следующую лемму:

Лемма.

При условиях $a) - b), 1) - 3)$ и $I) - III)$, уравнение (1) обладает нетривиальным неотрицательным и существенно ограниченным решением $f(x)$. Более того, имеет место двусторонняя оценка (16).

Ниже мы будем исследовать асимптотическое поведение решения в $\pm\infty$. Отдельно рассмотрим случаи $A)$ и $B)$.

Случай $A)$: В этом случае докажем, что

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \eta, \quad \eta - f \in L_1(\mathbb{R}). \tag{17}$$

Учитывая условие $a)$, рассмотрим разность

$$\eta - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\eta - G(f(t)))dt - \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t, f(t))dt,$$

из которого в частности следует, что

$$|\eta - f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|\eta - G(f(t))|dt + g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

где

$$g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\beta(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

Так как $K, \beta \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$ (здесь $M(\mathbb{R})$ – пространство существенно ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}$), то из результатов работ [Л.Г. Арабаджян, А.С. Хачатрян, Матем. сб. (2007)] и [У. Рудин, 1975] следует, что

$$g(\pm\infty) := \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0, \quad g \in L_1(\mathbb{R}) \cap C_M(\mathbb{R})$$

($C_M(\mathbb{R})$ – пространство непрерывных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$).

Сперва докажем, что $\eta - f \in L_1(\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}^+)$. Из (16) и (11) немедленно следует, что при $x \leq -1$

$$f(x) \geq Q(B(-1)) = Q(\xi_0(1 - e^{-p})) := \gamma > 0. \tag{20}$$

Пусть $R < -1$ – произвольное число. Интегрируя обе части (18) по x в пределах от R до -1 будем иметь

$$\int_R^{-1} |\eta - f(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx + \int_R^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t) |\eta - G(f(t))| dt dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + \int_{R}^{-1}\int_{0}^{\infty} K(x-t)|\eta - G(f(t))|dtdx + \int_{R}^{-1}\int_{-\infty}^{0} K(x-t)|\eta - G(f(t))|dtdx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + (G(\xi)+\eta)\int_{R}^{-1}\int_{-\infty}^{x} K(y)dydx + \int_{R}^{-1}\int_{-\infty}^{0} K(x-t)|\eta - G(f(t))|dtdx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + (G(\xi)+\eta)\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{x} K(y)dydx + \int_{R}^{-1}\int_{-\infty}^{R} K(x-t)|\eta - G(f(t))|dtdx +$$

$$+ \int_{R}^{-1}\int_{R}^{-1} K(x-t)|\eta - G(f(t))|dtdx + (G(\xi)+\eta)\int_{R}^{-1}\int_{-1}^{0} K(x-t)dtdx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx+(G(\xi)+\eta)\int_{-\infty}^{0} K(y)(-y)dy+(G(\xi)+\eta)\int_{-\infty}^{-1}\int_{-1}^{0} K(x-t)dtdx+$$

$$+\int_{R}^{-1}\int_{-\infty}^{R} K(x-t)|\eta-G(f(t))|dtdx+\int_{R}^{-1}\int_{R}^{-1} K(x-t)|\eta-G(f(t))|dtdx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx+(G(\xi)+\eta)\int_{0}^{\infty} K(t)tdt+(G(\xi)+\eta)\int_{-\infty}^{-1}\int_{-1}^{0} K(x-t)dtdx+$$

$$+(G(\xi)+\eta)\int_{R}^{-1}\int_{x-R}^{\infty} K(y)dydx+\int_{R}^{-1}\int_{R}^{-1} K(x-t)|\eta-G(f(t))|dtdx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx+(G(\xi)+\eta)\int_{0}^{\infty} K(t)tdt+(G(\xi)+\eta)\int_{-\infty}^{-1}\int_{x}^{x+1} K(y)dydx+$$

$$+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{R}^{0}\int\limits_{x-R}^{\infty}K(y)dydx+\int\limits_{R}^{-1}\int\limits_{R}^{-1}K(x-t)|\eta-G(f(t))|dtdx\leq$$

$$\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)dx+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{0}^{\infty}K(t)tdt+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{-\infty}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{x+1}K(y)dydx+$$

$$+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{0}^{-R}\int\limits_{z}^{\infty}K(y)dydz+\int\limits_{R}^{-1}\int\limits_{R}^{-1}K(x-t)|\eta-G(f(t))|dtdx\leq$$

$$\leq\int\limits_{-\infty}^{\infty}g(x)dx+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{0}^{\infty}K(t)tdt+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{-\infty}^{0}K(y)\int\limits_{y-1}^{-1}dxdy+$$

$$+(G(\xi)+\eta)\int\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{z}^{\infty}K(y)dydz+\int\limits_{R}^{-1}\int\limits_{R}^{-1}K(x-t)|\eta-G(f(t))|dtdx=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + 3(G(\xi)+\eta)\int_{0}^{\infty} K(t)tdt + \int_{R}^{-1} |\eta - G(f(t))| \int_{R}^{-1} K(x-t)dxdt \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + 3(\eta + \xi - c_0)\int_{0}^{\infty} K(t)tdt + \int_{R}^{-1} |\eta - G(f(t))|dt =$$

$$= A + \int_{E_R^1} (\eta - G(f(t)))dt + \int_{E_R^2} (G(f(t)) - \eta)dt,$$

где

$$A := \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx + 3(\eta + \xi - c_0)\int_{0}^{\infty} K(t)tdt, \qquad (21)$$

$$E_R^1 := \{x \in [R,-1] : f(x) \leq \eta\}, E_R^2 := \{x \in [R,-1] : f(x) > \eta\} \quad (22)$$

Итак, мы получили следующую оценку:

$$\int\limits_{R}^{-1} |\eta - f(x)|dx \leq A + \int\limits_{E_R^1} (\eta - G(f(t)))dt + \int\limits_{E_R^2} (G(f(t)) - \eta)dt. \quad (23)$$

Заметим, что в силу (16) когда $x \in E_R^1$, то

$$0 \leq \eta - G(f(x)) \leq \eta - G(Q(|\varphi(x)|)) = \eta - |\varphi(x)|. \quad (24)$$

Если же $x \in E_R^2$, то учитывая выпуклость вверх функции $G(u)$, будем иметь (см. рис. 4)

$$0 \leq G(f(x)) - \eta \leq \frac{\eta - G(\gamma)}{\eta - \gamma}(f(x) - \eta), \quad (25)$$

где число γ определяется по формуле (20).

$$\theta_2 > \theta_1$$

$$\Rightarrow \quad tg\,\theta_2 > tg\,\theta_1$$

$$\frac{G(f(x)) - \eta}{f(x) - \eta} > \frac{\eta - G(\gamma)}{\eta - \gamma}$$

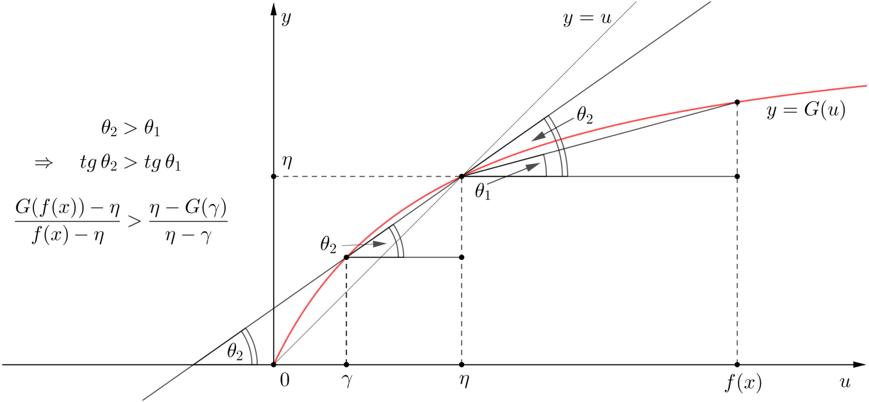

Рис.: 4

Учитывая оценки неравенства (24) и (25), а также включение (12), из (23) получаем

$$\int_{R}^{-1}|\eta-f(x)|dx\leq A+\int_{E_R^1}(\eta-|\varphi(t)|)dt+\int_{E_R^2}\frac{\eta-G(\gamma)}{\eta-\gamma}(f(t)-\eta)dt\leq$$

$$\leq A+\int_{-\infty}^{0}(\eta+\varphi(t))dt+\frac{\eta-G(\gamma)}{\eta-\gamma}\int_{E_R^2}(f(t)-\eta)dt$$

или

$$\int_{E_R^1}(\eta-f(t))dt+\int_{E_R^2}(f(t)-\eta)dt\leq A+\int_{-\infty}^{0}(\eta+\varphi(t))dt+\frac{\eta-G(\gamma)}{\eta-\gamma}\int_{E_R^2}(f(t)-\eta)dt,$$

из которого следует, что

$$\int_{E_R^1}(\eta-f(t))dt+\frac{G(\gamma)-\gamma}{\eta-\gamma}\int_{E_R^2}(f(t)-\eta)dt\leq A+\int_{-\infty}^{0}(\eta+\varphi(t))dt. \quad (26)$$

Так как $\dfrac{G(\gamma)-\gamma}{\eta-\gamma} \in (0,1)$ то из (26) получаем

$$\frac{G(\gamma)-\gamma}{\eta-\gamma}\int\limits_R^{-1}|\eta-f(t)|dt \leq A+\int\limits_{-\infty}^{0}(\eta+\varphi(t))dt$$

или

$$\int\limits_R^{-1}|\eta-f(t)|dt \leq \frac{(\eta-\gamma)(A+\int\limits_{-\infty}^{0}(\eta+\varphi(t))dt)}{G(\gamma)-\gamma}. \tag{27}$$

В (27) устремляя число $R \to -\infty$ заключаем, что $\eta - f \in L_1(-\infty,-1)$ и

$$\int\limits_{-\infty}^{-1}|\eta-f(t)|dt \leq \frac{(\eta-\gamma)(A+\int\limits_{-\infty}^{0}(\eta+\varphi(t))dt)}{G(\gamma)-\gamma}. \tag{28}$$

Интегрируемость функции $|\eta - f(x)|$ на отрезке $[-1, 0]$ сразу следует из оценки

$$0 \le |\eta - f(x)| \le (G(\xi) + \eta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)dt + g(x) =$$

$$= (\xi + \eta - c_0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)dy + g(x) = g(x) + \xi + \eta - c_0.$$

Итак, $\eta - f \in L_1(-\infty, 0)$.
Аналогично можно доказать, что $\eta - f \in L_1(0, +\infty)$. Следовательно, в первом случае A) мы установили включение

$$\eta - f \in L_1(\mathbb{R}). \tag{29}$$

Убедимся теперь, что

$$\eta - G(f(x)) \in L_1(\mathbb{R}). \tag{30}$$

Используя выпуклость вверх функции G и неравенств (16) приходим к следующей оценке

$$|\eta - G(f(x))| \leq \begin{cases} \eta - |\varphi(x)|, & x \in E, \\ f(x) - \eta, & x \in \mathbb{R} \setminus E, \end{cases} \tag{31}$$

где

$$E := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \eta\}. \tag{32}$$

Из (29), (31) и (12) следует включение (30). Так как $|\eta - G(f(x))| \leq \eta + G(\xi) < +\infty$, $x \in \mathbb{R}$, то заключаем, что

$$\eta - G(f(x)) \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}). \tag{33}$$

Поскольку $g(\pm\infty) = 0, \eta - G(f(x)), K(x) \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, то согласно лемме 5 работы [У. Рудин, 1975] из (18) следует, что существует

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \eta. \tag{34}$$

Случай $B)$: Предположим, что $c_0-\beta\in L_1(\mathbb{R})$, где $c_0:=\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{\beta(t)\}$. В этом случае дополнительно предположим, что

$$\beta(t)-H(t,Q(B(t)))\in L_1(\mathbb{R}). \tag{35}$$

Здесь мы докажем, что

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t)=\xi, \quad \xi-f\in L_1(\mathbb{R}). \tag{36}$$

С этой целью используя тот факт, что ξ является положительным решением характеристического уравнения (5) и учитывая $I),a),1),B)$, (12), (16) оценим следующую разность:

$$0\leq \xi-f(x)=G(\xi)+c_0-\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-t)G(f(t))dt-\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x-t)H(t,f(t))dt=$$

$$
= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t))dt +
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\beta(t)-H(t,f(t)))dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dt +
$$

$$
+ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t))dt + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\beta(t)-H(t,Q(B(t))))dt.
$$

Для краткости записи дальнейшего изложения обозначим через

$$
\begin{gathered}
g^*(x) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(c_0-\beta(t))dt + \\
+ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(\beta(t)-H(t,Q(B(t))))dt \in L_1(\mathbb{R}).
\end{gathered} \tag{37}
$$

Пусть $\delta_1 < 0, \delta_2 > 0$ – произвольные числа. Интегрируя обе части полученного неравенства

$$0 \le \xi - f(x) \le g^*(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dt, \quad x \in \mathbb{R} \quad (38)$$

по x в пределах от δ_1 до δ_2 и при этом учитывая включение (37) будем иметь

$$0 \le \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} (\xi - f(x))dx \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dtdx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \int\limits_{-\infty}^{\delta_1} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dtdx +$$

$$+ \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dtdx + \int\limits_{\delta_1}^{\delta_2} \int\limits_{\delta_2}^{\infty} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dtdx \le$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + G(\xi)\int_{\delta_1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\delta_1} K(x-t)dtdx +$$

$$+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dtdx + G(\xi)\int_{-\infty}^{\delta_2}\int_{\delta_2}^{\infty} K(x-t)dtdx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + G(\xi)\int_{\delta_1}^{\infty}\int_{x-\delta_1}^{\infty} K(y)dydx + G(\xi)\int_{-\infty}^{\delta_2}\int_{-\infty}^{x-\delta_2} K(y)dydx +$$

$$+\int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dtdx = \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + G(\xi)\int_{0}^{\infty}\int_{z}^{\infty} K(y)dydz +$$

$$+G(\xi)\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{z} K(y)dydz + \int_{\delta_1}^{\delta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)(G(\xi)-G(f(t)))dtdx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + 2G(\xi) \int_0^{\infty} K(y)ydy + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dtdx =$$

$$= C + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)(G(\xi) - G(f(t)))dtdx,$$

где

$$C := \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x)dx + 2(\xi - c_0) \int_0^{\infty} K(y)ydy. \qquad (39)$$

Учитывая выпуклость функции $y = G(u)$ на $\mathbb{R}^+$ и неравенство (7) получим (см. рис. 5)

$$0 \leq G(\xi) - G(f(t)) \leq \frac{G(\xi)}{\xi}(\xi - f(t)), \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (40)$$

Следовательно, в силу (40) из полученного выше неравенства приходим к оценке

$$0 \le \int_{\delta_1}^{\delta_2} (\xi - f(x))dx \le C + \frac{G(\xi)}{\xi} \int_{\delta_1}^{\delta_2} (\xi - f(t)) \int_{\delta_1}^{\delta_2} K(x-t)dxdt,$$

из которого в силу условия $a)$ следует, что

$$0 \le \int_{\delta_1}^{\delta_2} (\xi - f(x))dx \le \frac{C\xi}{\xi - G(\xi)} = \frac{C\xi}{c_0}. \tag{41}$$

В (41) устремляя $\delta_1 \to -\infty$, а $\delta_2 \to +\infty$ заключаем, что $\xi - f \in L_1(\mathbb{R})$ и приходим к неравенству

$$0 \le \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - f(x))dx \le \frac{C\xi}{c_0} \tag{42}$$

Аналогичными рассуждениями как в случае $A)$ можно убедиться, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \xi$.

Итак, на основе выше изложенного приходим к следующему результату:

Теорема 1.

Пусть выполняются все условия леммы. Тогда, если $\beta \in L_1(\mathbb{R})$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \eta$ и $\eta - f \in L_1(\mathbb{R})$. Если же выполняются условия $\beta(t) - H(t, Q(B(t))) \in L_1(\mathbb{R}), B(x) := \xi_0(1 - e^{-p_\varepsilon|x|}), x \in \mathbb{R}$ и $c_0 - \beta \in L_1(\mathbb{R})$, где $c_0 := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\{\beta(t)\} > 0$, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \xi$ и $\xi - f \in L_1(\mathbb{R})$. ▶

Здесь напомним, что число ξ единственное решение характеристического уравнения $G(u) = u - c_0$.

$$\theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 45^\circ \Rightarrow$$

$$tg\,\theta_1 = \frac{G(\xi) - G(u_2)}{\xi - u_2} <$$

$$< \frac{G(\xi) - G(u_1)}{\xi - u_1} = tg\,\theta_2 <$$

$$< \frac{G(\xi)}{\xi} = tg\,\theta_3 < 1$$

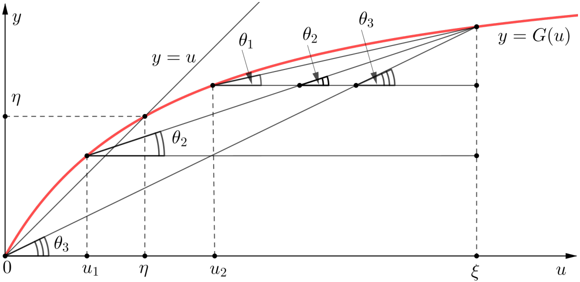

Рис.: 5

Следствие.

При условиях теоремы 1, если $\beta \in L_1(\mathbb{R})$, то уравнение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)W(t, F(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{43}$$

с нелинейностью вида

$$W(t, u) := \eta - G(\eta - u) - H(t, \eta - u) \tag{44}$$

обладает нетривиальным ограниченным (возможно знакопеременным) и суммируемым на множестве $\mathbb{R}$ решением. Если же выполняются условия теоремы 1 и при этом функция $\beta(t)$ обладает свойствами (35) и $c_0 - \beta \in L_1(\mathbb{R})$, то уравнение

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)Y(t, \Phi(t))dt, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{45}$$

с нелинейностью

$$Y(t,u) := \xi - G(\xi - u) - H(t, \xi - u) \tag{46}$$

обладает неотрицательным нетривиальным ограниченным и суммируемым на множестве $\mathbb{R}$ решением.
Действительно, решением уравнения (43) (с нелинейностью (44)) служит функция $F(x) = \eta - f(x)$, а решением уравнения (45) (с нелинейностью (46))– функция $\Phi(x) = \xi - f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.

Следует отметить также, что уравнения (43) и (45), кроме нетривиальных решений $F(x) = \eta - f(x)$ и $\Phi(x) = \xi - f(x) \geq 0$, обладают также тривиальными решениями $F(x) = \eta$ и $\Phi(x) = \xi$. Последнее сразу следует из соответствующих свойств функций G и H.

О единственности решения

Перейдем теперь вопросу единственности решения уравнения (1) в определенном классе измеримых и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций. Здесь дополнительно предположим, что нелинейность $H(t, u)$ обладает свойством выпуклости по аргументу u.

Справедлива следующая

Теорема 2.

Пусть в условиях теоремы 1 функция $H(t,u)$ при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$ обладает свойством выпуклости вверх по аргументу u на $\mathbb{R}^+$. Тогда, если выполняется хотя бы одно из следующих условий $r_1)$ и $r_2)$:

$$r_1) \quad \beta \in L_1(\mathbb{R}), \quad r_2) \quad \begin{cases} \beta(t) - H(t, Q(B(t))) \in L_1(\mathbb{R}), \\ c_0 - \beta \in L_1(\mathbb{R}), \end{cases}$$

то уравнение (1) не может иметь более одного решения в следующем классе измеримых и ограниченных функций:

$$\mathcal{P} := \{f \in M(\mathbb{R}) : f(x) \geq Q(B(x)),\, x \in \mathbb{R}\}, \tag{47}$$

где $B(x)$ задается согласно формуле (3), $Q = G^{-1}$, а число c_0 из себя представляет супремум функции $\beta(t)$.

Доказательство. (I шаг). Сперва убедимся, что если $f \in \mathcal{P}$ является решением уравнения (1), то

$$f(x) \leq \xi, \quad x \in \mathbb{R} \text{ и } f \in C(\mathbb{R}). \tag{48}$$

Обозначим через $\alpha_0 := \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x)$. Тогда, в силу монотонности функций $G(u)$ и $H(t,u)$ по u, условий $a), II)$ и обозначения (8), из (1) будем иметь

$$f(x) \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\alpha_0) + H(t,\alpha_0))dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(\alpha_0) + \beta(t))dt \leq G(\alpha_0) + c_0,$$

из которого следует, что

$$\alpha_0 \leq G(\alpha_0) + c_0. \tag{49}$$

Заметим, что тогда $\alpha_0 \leq \xi$.

Действительно, в противном случае в силу выпуклости вверх функции $G(u)$ получим

$$\frac{G(\alpha_0) - G(\xi)}{\alpha_0 - \xi} < \frac{G(\xi)}{\xi} < 1. \tag{50}$$

Из неравенства (50) следует, что

$$G(\alpha_0) < G(\xi) + \alpha_0 - \xi = \alpha_0 - c_0,$$

которое противоречит оценке (49).
Теперь докажем, что $f \in C(\mathbb{R})$. Так как $y = H(t, f(t)), t \in \mathbb{R}$ ограниченная функция на $\mathbb{R}$, а $K \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$, то в силу непрерывности свертки суммируемой и ограниченной функций заключаем, что

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)H(t, f(t))dt \in C(\mathbb{R}).$$

(II шаг). Предположим теперь, что уравнение (1) имеет две разные решения f и $\tilde{f}$ из класса $\mathcal{P}$. Следовательно существует $x_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x_0) \neq \tilde{f}(x_0)$. В силу непрерывности этих решений на $\mathbb{R}$ (см. шаг I) существует число $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ такое, что $f(x_1) \neq \tilde{f}(x_1)$. Снова используя непрерывность функций f и $\tilde{f}$ заключаем, что существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \neq \tilde{f}(x), x \in [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$, причем $0 \notin [x_1 - \delta, x_1 + \delta]$.

Введем теперь следующее измеримое множество:

$$\mathcal{D} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq \tilde{f}(x)\}.$$

Так как $f \in \mathcal{P}$, то в силу свойств функций Q и B имеем $f(x) > 0$, когда $x \neq 0$. Так как $0 \notin [x_1 - \delta, x_1 + \delta] \subset \mathcal{D}$, то $mes\mathcal{D} \geq 2\delta > 0$,

$$[x_1 - \delta, x_1 + \delta] \subset \mathcal{D}^* := \{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\} \cap \mathcal{D} \tag{51}$$

и, следовательно, $mes\mathcal{D}^* \geq 2\delta > 0$.

(III шаг). Так как $f, \tilde{f} \in \mathcal{P}$ являются решениями уравнения (1) и выполняется хотя бы одно из условий r_1) и r_2) то в силу теоремы 1 имеет место включение

$$f - \tilde{f} \in L_1(\mathbb{R}). \tag{52}$$

Ниже убедимся, что

$$G(f(x)) - G(\tilde{f}(x)) \in L_1(\mathbb{R}). \tag{53}$$

Поскольку $G(f(x)), G(\tilde{f}(x)) \in C(\mathbb{R})$, то

$$G(f(x)) - G(\tilde{f}(x)) \in L_1^{loc}(\mathbb{R}). \tag{54}$$

Пусть теперь $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Тогда

$$f(x) \geq \gamma, \; \tilde{f}(x) \geq \gamma, \; |x| > 1, \tag{55}$$

где число γ определяется по формуле (20).

Учитывая выпуклость вверх функции G и (55), будем иметь

$$0 \le |G(f(x)) - G(\tilde{f}(x))| \le \frac{G(f(x))}{f(x)}|f(x) - \tilde{f}(x)| \le \\ \le \frac{G(\xi)}{\gamma}|f(x) - \tilde{f}(x)|, \quad |x| > 1. \tag{56}$$

Из (52) и (56) следует, что $G(f(x)) - G(\tilde{f}(x)) \in L_1(\mathbb{R} \setminus [-1, 1])$. Имея ввиду (54) и полученное включение, приходим к (53).
Перейдем теперь к доказательству включения

$$H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t)) \in L_1(\mathbb{R}). \tag{57}$$

Пусть выполняется условие r_1). Тогда из следующей простой оценки

$$0 \le |H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t))| \le 2\beta(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

приходим к (57).

Предположим теперь, что выполняется условие r_2). Тогда будем иметь

$$0 \le |H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t))| \le |c_0 - H(t, f(t))| + |c_0 - H(t, \tilde{f}(t))| \le$$

$$\le 2(c_0 - \beta(t) + \beta(t) - H(t, f(t)) + \beta(t) - H(t, \tilde{f}(t))) \le$$

$$\le 2(c_0 - \beta(t)) + 2(\beta(t) - H(t, Q(B(t))) \in L_1(\mathbb{R}),$$

ибо $H(t, u) \uparrow$ по u и $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \beta(t) = c_0$.
Таким образом, в случае r_2) включение (57) также доказано.

(IV шаг). Так как f и $\tilde{f}$ являются решениями уравнения (1), то для их разности имеем следующую оценку:

$$0 \leq |f(x) - \tilde{f}(x)| \leq \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|G(f(t)) - G(\tilde{f}(t))|dt+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|H(t,f(t)) - H(t,\tilde{f}(t))|dt, \quad x \in \mathbb{R},\ f, \tilde{f} \in \mathcal{P}. \tag{58}$$

Умножим обе части неравенства (58) на функцию $\mu(x) := G(f(x)) + H(x, f(x))$:

$$0 \leq |f(x) - \tilde{f}(x)|(G(f(x)) + H(x,f(x))) \leq$$
$$\leq (G(f(x)) + H(x,f(x)))\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|G(f(t)) - G(\tilde{f}(t))|dt+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|H(t,f(t)) - H(t,\tilde{f}(t))|dt\}. \tag{59}$$

Заметим, что $\mu \in M(\mathbb{R})$. Действительно, из $1), I)$, (48) и (5) имеем

$$0 \leq \mu(x) \leq G(\xi) + \beta(x) \leq G(\xi) + c_0 = \xi < +\infty.$$

Так как $\mu \in M(\mathbb{R}), G(f(x)) - G(\tilde{f}(x)) \in L_1(\mathbb{R}), H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t)) \in L_1(\mathbb{R})$ для $f, \tilde{f} \in \mathcal{P}$, то используя четность ядра K и интегрируя обе части неравенства (59) по x в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, при этом используя теорему Фубини будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - \tilde{f}(x)|(G(f(x)) + H(x, f(x)))dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (G(f(x)) + H(x, f(x)))\cdot$$

$$\cdot\{\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|G(f(t)) - G(\tilde{f}(t))|dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)|H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t))|dt\}dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (|G(f(t)) - G(\tilde{f}(t))| + |H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t))|)\cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)(G(f(x)) + H(x, f(x)))dxdt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f(t)) - G(\tilde{f}(t))| f(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} |H(t, f(t)) - H(t, \tilde{f}(t))| f(t)dt$$

или

$$\mathcal{J} := \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x) - \tilde{f}(x)|(G(f(x)) + H(x, f(x))) - |G(f(x)) - G(\tilde{f}(x))| f(x) -$$

$$- |H(x, f(x)) - H(x, \tilde{f}(x))| f(x))dx \leq 0.$$

С другой стороны, в силу условий 1) и II) очевидно, что

$$\mathcal{J}=\int\limits_{D^*}(|f(x)-\tilde{f}(x)|(G(f(x))+H(x,f(x)))- \\ -|G(f(x))-G(\tilde{f}(x))|f(x)- \\ -|H(x,f(x))-H(x,\tilde{f}(x))|f(x))dx\leq 0 \tag{60}$$

или

$$\int\limits_{D^*}|f(x)-\tilde{f}(x)|\{G(f(x))-\frac{|G(f(x))-G(\tilde{f}(x))|}{|f(x)-\tilde{f}(x)|}f(x)+$$

$$+H(x,f(x))-\frac{|H(x,f(x))-H(x,\tilde{f}(x))|}{|f(x)-\tilde{f}(x)|}f(x)\}dx\leq 0.$$

Из выпуклости вверх функций $G(u)$ и $H(x,u)$ по u немедленно следует, что для всех $x \in D^*$ имеют место оценки

$$\frac{G(f(x))}{f(x)} > \frac{|G(f(x)) - G(\tilde{f}(x))|}{|f(x) - \tilde{f}(x)|}, \tag{61}$$

$$\frac{H(x,f(x))}{f(x)} > \frac{|H(x,f(x)) - H(x,\tilde{f}(x))|}{|f(x) - \tilde{f}(x)|}. \tag{62}$$

Неравенства (61) и (62) противоречат оценке (60). Из полученного противоречия приходим к завершению доказательства.

Замечание 2.

Небезынтересно отметить, что впервые такой подход доказательства теоремы единственности был применен в работе [Х.А. Хачатрян, Изв. РАН. Сер. матем. (2020)] для вспомогательного нелинейного интегрального уравнения вида (9).

Примеры

В этом параграфе мы приведем конкретные примеры ядра K и нелинейностей G, H, для которых выполняются все условия доказанных утверждений. Часть этих примеров имеет также прикладной характер. Сперва приведем примеры ядра K :

$k_1)$ $K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$

$k_2)$ $K(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(1+x^4)}, \quad x \in \mathbb{R},$

$k_3)$ $K(x) = \int\limits_a^b e^{-|x|s} \sigma(s) ds, \quad x \in \mathbb{R},$

где $\sigma(s)$ – положительная и непрерывная функция на интервале $[a, b)$, $0 < a < b \leq +\infty$, причем

$$2 \int\limits_a^b \frac{\sigma(s)}{s} ds = 1.$$

Прямой проверкой можно убедиться, что условия $a)$ и $b)$ для ядерных функций $k_1), k_2)$ и $k_3)$ выполняются.

Теперь приведем примеры для нелинейности $G(u)$:

$g_1)$ $G(u) = \sqrt[p]{u}$, $p \geq 2$, $u \in \mathbb{R}^+$,

$g_2)$ $G(u) = \gamma_0(1 - e^{-u})$, $u \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_0 > 1$,

$g_3)$ $G(u) = \frac{\sqrt{u}+2(1-e^{-u})}{2}, \quad u \in \mathbb{R}^+.$

Несложно проверить, что для примеров $g_1) - g_3)$ автоматически выполняются все условия $1) - 3)$.

Наконец, для полноты изложения ниже приведем конкретные примеры нелинейности $H(t,u)$:

$h_1)$ $H(t,u) = \dfrac{2(1-\lambda(t))u\beta(t)}{2(1-\lambda(t))u+\lambda(t)Q(B(t))}$, $u \in \mathbb{R}^+$, где $\lambda \in L_1(\mathbb{R}), 0 < \lambda(t) < 1, t \in \mathbb{R}$ - произвольная функция, а $0 \leq \beta(t)$ - измеримая и ограниченная функция со свойствами

$$0 < c_0 := \sup_{t\in\mathbb{R}} \beta(t), \quad c_0 - \beta \in L_1(\mathbb{R}),$$

$h_2)$ $H(t,u) = \left(1 - e^{\dfrac{u}{Q(B(t))}\ln\lambda(t)}\right)\beta(t), \quad u \in \mathbb{R}^+,$

$h_3)$ $H(t,u) = (1-e^{-u})\tilde{\beta}(t), \quad u \in \mathbb{R}^+$, где $\tilde{\beta} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R})$ - произвольная неотрицательная функция, причем $\tilde{\beta}(t) \not\equiv 0$, $t \in \mathbb{R}$. Отметим, что для примеров $h_1) - h_3)$ выполняются все условия леммы и теорем 1 и 2.

Подробно остановимся на примере h_1).

Во первых, заметим, что

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{2(1-\lambda(t))\beta(t)\lambda(t)Q(B(t))}{(2(1-\lambda(t))u+\lambda(t)Q(B(t)))^2} > 0.$$

Следовательно, функция $H(t,u) \uparrow$ по u на $\mathbb{R}^+$. С другой стороны,

$$H(t,0) \equiv 0 \text{ и } H(t,u) \le \beta(t), \quad u \in \mathbb{R}^+, \, t \in \mathbb{R},$$

причем

$$\sup_{u\ge 0} H(t,u) = \beta(t) \lim_{u\to+\infty} \frac{2(1-\lambda(t))u}{2(1-\lambda(t))u+\lambda(t)Q(B(t))} = \beta(t).$$

Из свойств функций λ, Q, B и β немедленно следует выполнение условия III) для примера h_1).

Заметим также, что $H(t,u)$ является выпуклой вверх функцией по аргументу u на $\mathbb{R}^+$. Действительно, данный факт сразу следует из отрицательности $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \frac{-8(1-\lambda(t))^2\beta(t)\lambda(t)Q(B(t))}{(2(1-\lambda(t))u+\lambda(t)Q(B(t)))^3} < 0.$$

В конце отметим, что нелинейные интегральные уравнения с ядрами вида k_1) и с нелинейностью вида $g_1), h_2)$ встречаются в p - адической математической физике, а уравнения с ядрами вида k_2) и с нелинейностью вида $g_2), h_1)$ - в математической биологии [В.С. Владимиров, Я.И. Волович, ТМФ (2004), И.Я. Арефьева, Тр. МИАН (2004), А.Г. Сергеев, Х.А. Хачатрян, Тр. ММО (2019), А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, ТМФ (2016), М.Н. Коган, (1967)].

- В.С. Владимиров, Я.И. Волович. О нелинейном уравнении динамики в теории p-адической струны. ТМФ, 138:3 (2004), 355–368.
  V.S. Vladimirov, Ya.I. Volovich. Nonlinear Dynamics Equation in p-Adic String Theory. Theoret. and Math. Phys., 138:3 (2004), 297–309.
- И.Я. Арефьева. Скатывающиеся решения полевых уравнений на неэкстремальных бранах и в p-адических струнах. Избранные вопросы p-адической математической физики и анализа, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Василия Сергеевича Владимирова, Тр. МИАН, 245, Наука, М., 2004, 47–54.
  I.Ya. Aref'eva. Rolling Tachyon on Non-BPS Branes and p-Adic Strings. Proc. Steklov Inst. Math., 245 (2004), 40–47.

Х.А. Хачатрян. О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории p-адической струны. Изв. РАН. Сер. матем., 82:2 (2018), 172–193.
Kh.A. Khachatryan. On the solubility of certain classes of non-linear integral equations in p-adic string theory. Izv. Math., 82:2 (2018), 407–427.

Х.А. Хачатрян. Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью. Изв. РАН. Сер. матем., 84:4 (2020), 198–207.
Kh.A. Khachatryan. Existence and uniqueness of solution of a certain boundary-value problem for a convolution integral equation with monotone non-linearity. Izv. Math., 84:4 (2020), 807–815.

- O. Dikmann, H. Kaper. On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 2:6 (1978), 721–737.
- А.Г. Сергеев, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии. Тр. ММО, 80:1 (2019), 113–131.
  A.G. Sergeev, Kh.A. Khachatryan.On the solvability of a class of nonlinear integral equations in the problem of a spread of an epidemic. Trans. Moscow Math. Soc., 80 (2019), 95–111.
- А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости нелинейного модельного уравнения Больцмана в задаче плоской ударной волны. ТМФ, 189:2 (2016), 239–255.
  A. Kh. Khachatryan, Kh. A. Khachatryan. Solvability of a nonlinear model Boltzmann equation in the problem of a plane shock wave. Theoret. and Math. Phys., 189:2 (2016), 1609–1623.

- М.Н. Коган. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
- O. Diekmann. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. J.Math. Biology, 6:2 (1978), 109–130.
- Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Стилтьеса на всей прямой. Труды МИАН, 308 (2020), 253–264. Kh.A. Khachatryan, H.S. Petrosyan. On the Solvability of a Class of Nonlinear Hammerstein-Stieltjes Integral Equations on the Whole Line. Proc. Steklov Inst. Math. 308 (2020), 238–249.

- А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1980, 542с.
- Л.Г. Арабаджян, А.С. Хачатрян. Об одном классе интегральных уравнений типа свертки. Матем. сб., 198:7 (2007), 45–62.
  L.G. Arabadzhyan, A.S. Khachatryan. A class of integral equations of convolution type. Sb. Math., 198:7 (2007), 949–966.
- У. Рудин. Функциональный анализ. М: Мир., 1975, 443 с.
  W. Rudin. Functional analysis, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, McGraw-Hill Book Co., 1973, xiii+379с.

Спасибо за внимание