

# Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 4.

Теретёнков Александр Евгеньевич

28 сентября 2020 г.

В прошлой серии...

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_j \left( C_j \rho C_j^\dagger - \frac{1}{2} \{C_j^\dagger C_j, \rho\} \right)$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Матрицы образуют гильбертово пространство относительно скалярного произведения  $\langle\langle A|B\rangle\rangle = \text{Tr } A^\dagger B$ .

Это позволяет ввести сопряжённые супероператор относительно такого скалярного произведения по формуле

$$\langle\langle \mathcal{L}^*(A)|B\rangle\rangle = \langle\langle A|\mathcal{L}(B)\rangle\rangle$$

для произвольных матриц  $A$  и  $B$ .

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Вычислим сопряжённый супероператор к  $\mathcal{M} = X \cdot Y$ :

$$\mathrm{Tr} A^\dagger \mathcal{M}(B) = \mathrm{Tr} A^\dagger XBY = \mathrm{Tr} YA^\dagger XB = \mathrm{Tr}(X^\dagger AY^\dagger)^\dagger B$$

$$\mathcal{M}^* = X^\dagger \cdot Y^\dagger$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Вычислим сопряжённый супероператор к  $\mathcal{M} = X \cdot Y$ :

$$\mathrm{Tr} A^\dagger \mathcal{M}(B) = \mathrm{Tr} A^\dagger XBY = \mathrm{Tr} YA^\dagger XB = \mathrm{Tr}(X^\dagger AY^\dagger)^\dagger B$$

$$\mathcal{M}^* = X^\dagger \cdot Y^\dagger$$

Тогда для ГКСЛ-генератора

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_j \left( C_j \rho C_j^\dagger - \frac{1}{2} \{C_j^\dagger C_j, \rho\} \right)$$

$$\mathcal{L}^*(X) = i[H, X] + \sum_j \left( C_j^\dagger X C_j - \frac{1}{2} \{C_j^\dagger C_j, X\} \right)$$

Свойства 1–2 для сопряжённого генератора:

- ❶  $\mathcal{L}^*(X^\dagger) = (\mathcal{L}^*(X))^\dagger$
- ❷  $\mathcal{L}^*(I) = 0$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Решение уравнения ГКСЛ имеет вид

$$\rho_t = e^{\mathcal{L}t} \rho_0,$$

где отображение  $\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$  удовлетворяет условию  
1-параметрической полугруппы

$$\Phi_{t+s} = \Phi_t \Phi_s.$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Произвольную матрицу можно привести к жордановой форме.

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Отметим, что  $J_n(\lambda) = \lambda I_n + J_n(0)$  и  $J_n(0)^n = 0$  — нильпотентна.

$$e^{J_n(\lambda)t} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} J_n(0)^k \frac{t^k}{k!}, \quad J_n(0)^0 \equiv I_n.$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Супероператор (пусть  $X = X^\dagger$ )

$$\langle X \rangle_t = \text{Tr } X e^{\mathcal{L}t}(\rho_0) = \text{Tr } e^{\mathcal{L}^*t}(X)\rho_0$$

Определим динамику наблюдаемых в представлении Гейзенберга:

$$X_t \equiv e^{\mathcal{L}^*t}(X)$$

$$\langle X \rangle_t = \text{Tr } X_t \rho_0$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

## Уравнения Гейзенберга

$$\frac{d}{dt}X_t = \mathcal{L}^*(X_t)$$

— бесполезны, в реальности решаются уравнения

$$\frac{d}{dt}X_t = (\mathcal{L}^*(X))_t$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

Существенное отличие от унитарной динамики:

$$(XY)_t \neq X_t Y_t$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

В унитарном случае  $e^{i[H,\cdot]t} = e^{iHt} \cdot e^{-iHt}$

$$(XY)_t = e^{iHt}XYe^{-iHt} = e^{iHt}Xe^{-iHt}e^{iHt}Ye^{-iHt} = X_tY_t$$

# ГКСЛ в представлении Гейзенберга

В унитарном случае  $e^{i[H,\cdot]t} = e^{iHt} \cdot e^{-iHt}$

$$(XY)_t = e^{iHt}XYe^{-iHt} = e^{iHt}Xe^{-iHt}e^{iHt}Ye^{-iHt} = X_tY_t$$

**Утверждение.**  $\Phi : \mathbb{C}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$  — линейное, невырожденное и  $\Phi(XY) = \Phi(X)\Phi(Y)$ , то  $\Phi(X) = LXL^{-1}$ .

Если дополнительно потребовать  $\Phi(X^\dagger) = \Phi(X)^\dagger$ , то получим  $\Phi(X) = UXU^\dagger$ ,  $UU^\dagger = I_n$ .

# Кинетическое уравнение Паули. Классические Марковские цепи с непрерывным временем

$$p_k(t) \equiv \rho_{kk}(t).$$

$$\frac{d}{dt} p_k(t) = \sum_j \gamma_{kj} p_j(t) - \left( \sum_i \gamma_{ik} \right) p_k(t)$$

Составим из компонент  $p_k$  вектор  $p$ . Условие нормировки  $\sum_k p_k = 1$  можно переписать как  $e^T p = 1$ , где введён вектор

$$e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Кинетическое уравнение Паули. Классические Марковские цепи с непрерывным временем

Перепишем кинетическое уравнение Паули

$$\frac{d}{dt}p = \gamma p - \gamma^T e \circ p,$$

где  $\circ$  — поэлементное произведение  $n$ -векторов.  $\gamma$  — произвольная матрица с неотрицательными элементами.  
Точно также уравнение ГКСЛ можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \Psi(\rho_t) - \frac{1}{2}\{\Psi^*(I), \rho_t\},$$

где

$$\Psi(\rho) = \sum_j C_j \rho C_j^\dagger$$

— вполне положительное отображение (но не сохраняющее след).

# Кинетическое уравнение Паули. Классические Марковские цепи с непрерывным временем

С другой стороны уравнение Паули имеет вид

$$\frac{d}{dt}p(t) = Lp(t),$$

Его решение

$$p(t) = P(t)p(0),$$

где  $P(t) = e^{Lt}$  — стохастическая матрица, то есть это матрица с неотрицательным коэффициентами и  $e^T P(t) = e^T (\sum_i P_{ij}(t)) = 1$ . (Часто это определение транспонируют.)

# Классические относительная энтропия и её монотонность

Расстояние Кульбака — Лейблера (относительная энтропия)

$$S(p||q) = \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{q_i}$$

Более строго

$$S(p||q) = \begin{cases} \sum_{i:p_i \neq 0} p_i \ln \frac{p_i}{q_i}, & \text{supp } p \subseteq \text{supp } q \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

# Классические относительная энтропия и её монотонность

Почему расстояние?

$$S(p||q) \geq 0$$

причём равенство выполнено тогда и только тогда, когда  $p = q$ .

# Классические относительная энтропия и её монотонность

Почему расстояние?

$$S(p||q) \geq 0$$

причём равенство выполнено тогда и только тогда, когда  $p = q$ .

Для простоты ограничимся случаем  $q_i > 0, p_i > 0$  и проверим  
только неравенство. Так как  $\ln x \leq x - 1$  при  $x > 0$ , то

$$\begin{aligned} \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{q_i} &= - \sum_i p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \leq \\ &\leq - \sum_i p_i \left( \frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = - \sum_i q_i + \sum_i p_i = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$