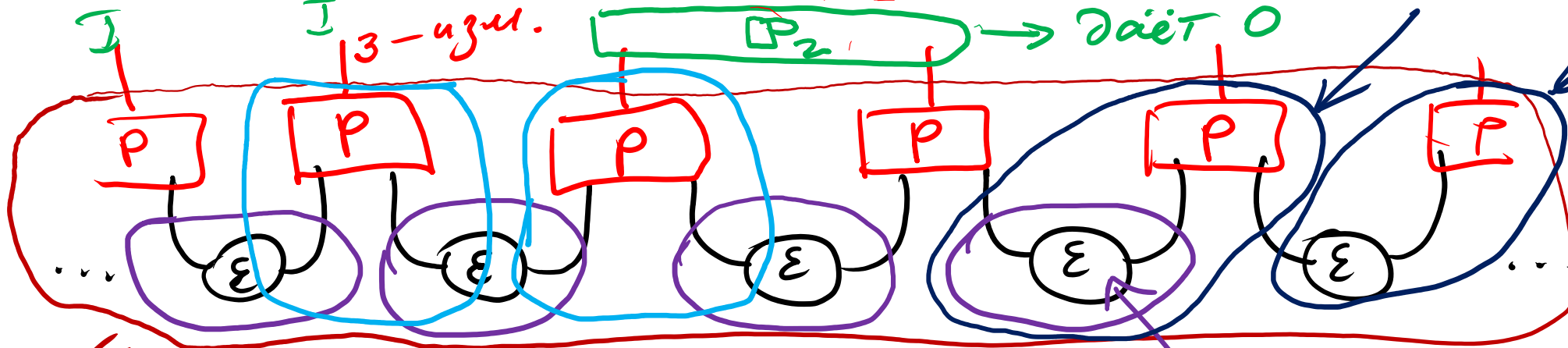


Лекция 5 по курсу "Квантовые тензорные сети"
(05.10.2021)

AKLT - модель

$|\psi\rangle$ MPS - сост. $\Rightarrow$ гами. H



145

$$P: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3$$

$|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$
 $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$

$|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle$
 $\nwarrow \quad \uparrow \quad \nearrow$

символ
Алгебра-Унитар

$$I \otimes I \otimes \dots \otimes P_2 \otimes I \dots$$

$$|\psi\rangle = 0$$

$$P = |1\rangle \langle \uparrow\uparrow| + |0\rangle \frac{\langle \uparrow\downarrow| + \langle \downarrow\uparrow|}{\sqrt{2}} + |-1\rangle \langle \downarrow\downarrow|$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \quad ; \quad S_2 = \frac{1}{2}$$

$$|S=1, M=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$|S=1, M=0\rangle = \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|S=1, M=-1\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

$$S = 0 \quad \text{um} \quad 1$$

$$\downarrow \\ M=0$$

$$M = 1, 0, -1$$

$$\mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^4$$

$P:$

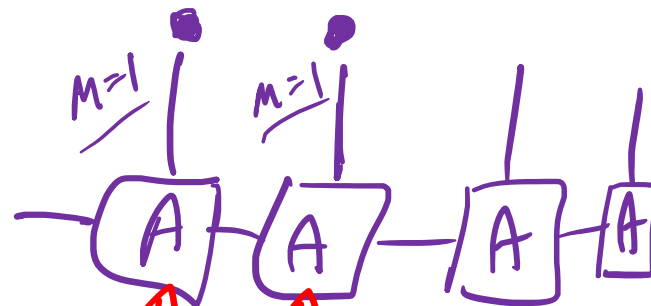
$$\sum_{M=1,0,-1}$$

$$|S=1, M\rangle \langle S=1, M|$$

$$\downarrow \\ |1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle.$$

— проектор
ранга 3
в $\mathbb{C}^4$.

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1$$



$$S = \underline{0}, \underline{1}, \boxed{2}.$$

$$\Rightarrow [\theta \langle M=1 | \theta \langle M=1 | \otimes I] |\psi\rangle = 0.$$

$$P_2 : (\mathbb{C}^3)^{\otimes 2} \rightarrow (\mathbb{C}^3)^{\otimes 2}$$

$$\mathbb{C}^9 \rightarrow \mathbb{C}^9.$$

$$P_2 = \sum_{M=2,1,0,-1,-2} |S=2, M\rangle \langle S=2, M|$$

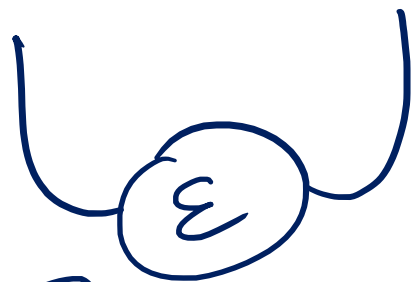
панна 5,
 $P_2 \geq 0.$

$$H = \sum_i P_2^{(i, i+1)} \geq 0 \quad - \text{гамильтониан АКЛТ}$$

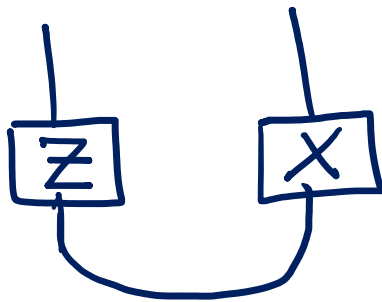
i ← номера кубитов

$$H |\psi\rangle = 0$$

⇒ построим
MPS-сост.
яв-ся
основным
сост. для
данного гами-на.



=



$$Z|0\rangle = |0\rangle$$

$$Z|1\rangle = -|1\rangle$$

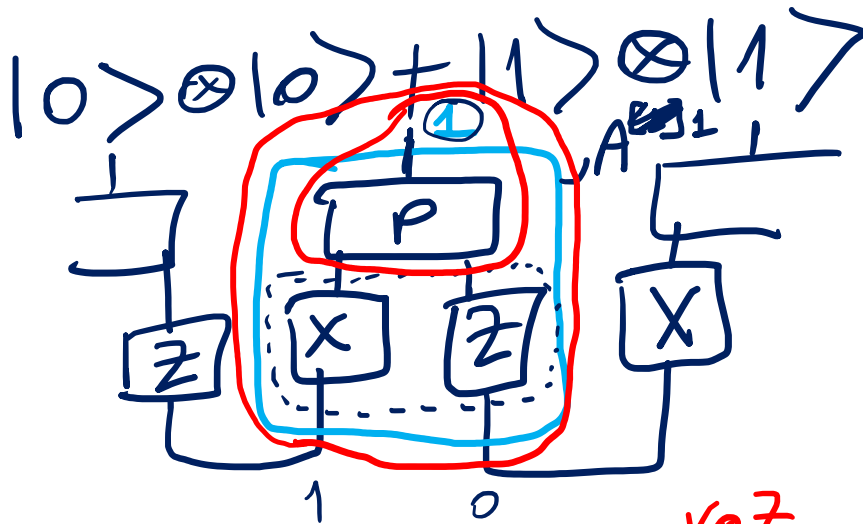
$$X|0\rangle = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = |0\rangle$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle$$



=



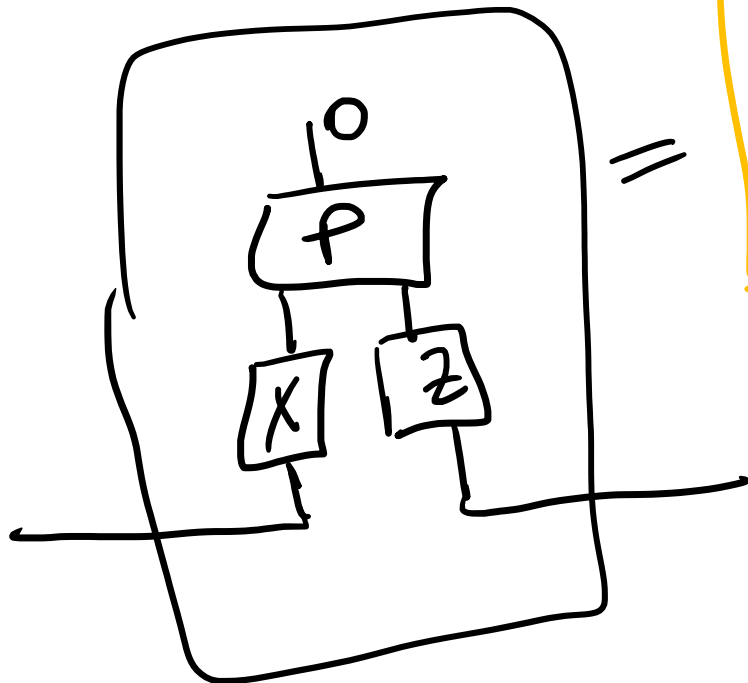
$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 0|P =$$

$$P \cdot X \otimes Z$$

$$\langle 1|P \cdot X \otimes Z = \langle \uparrow \uparrow | X \otimes Z = \langle 00 | X \otimes Z = \langle 10 |$$

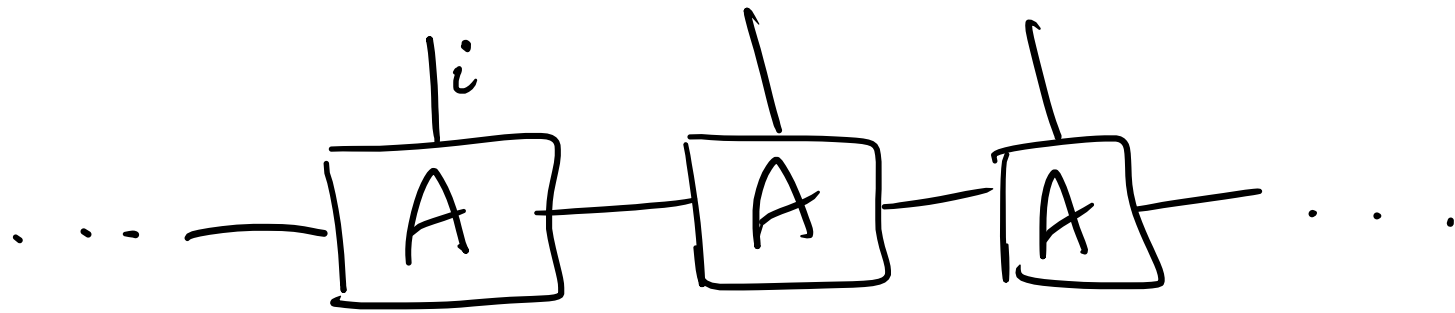
$$\langle 0 | P = \left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right)^\dagger X \otimes Z = \frac{-\langle 11 | + \langle 00 |}{\sqrt{2}}$$



$$A^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$\langle 1 | P \cdot X \otimes Z = \langle \downarrow\downarrow | X \otimes Z = -\langle 0 | 1 |$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Нужна кан. форма

$$\sum_{i=1,0,-1} A_i^\dagger A_i = I$$

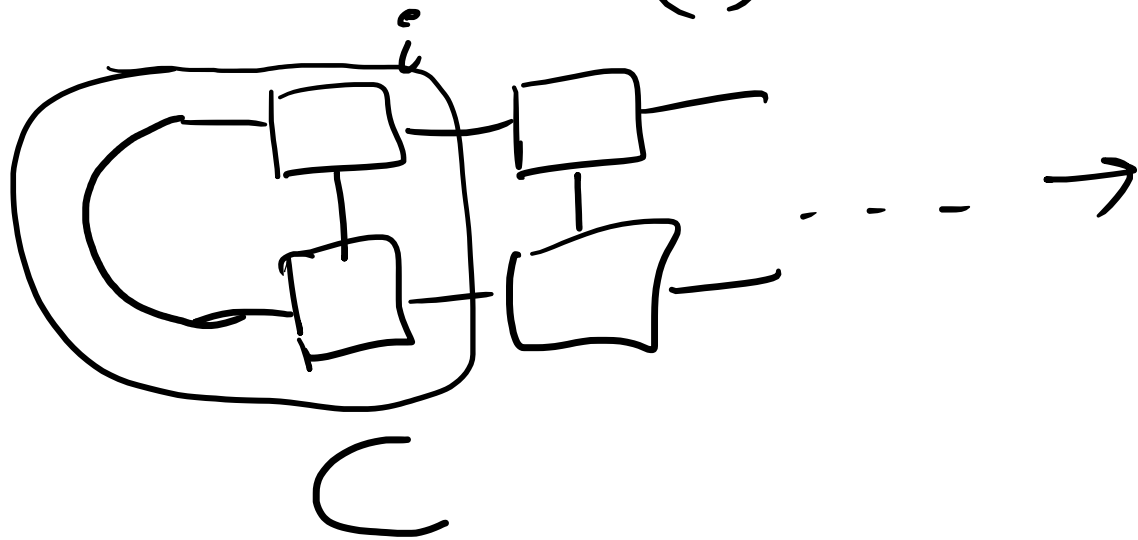
$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2} I. \end{aligned}$$

"Отнорм." $A_i \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} A_i$

~~$$A^1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$~~

↳ это есть как левая, так и правая
канон. форма.

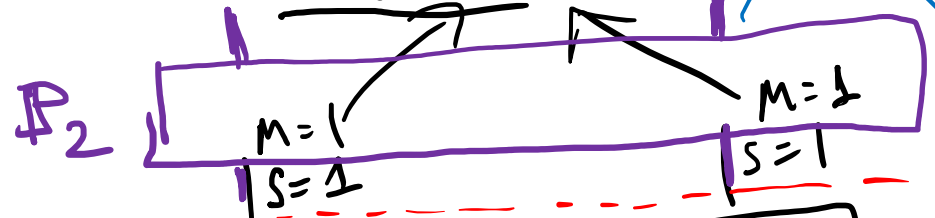
$$\sum A^i (A^i)^+ = I.$$



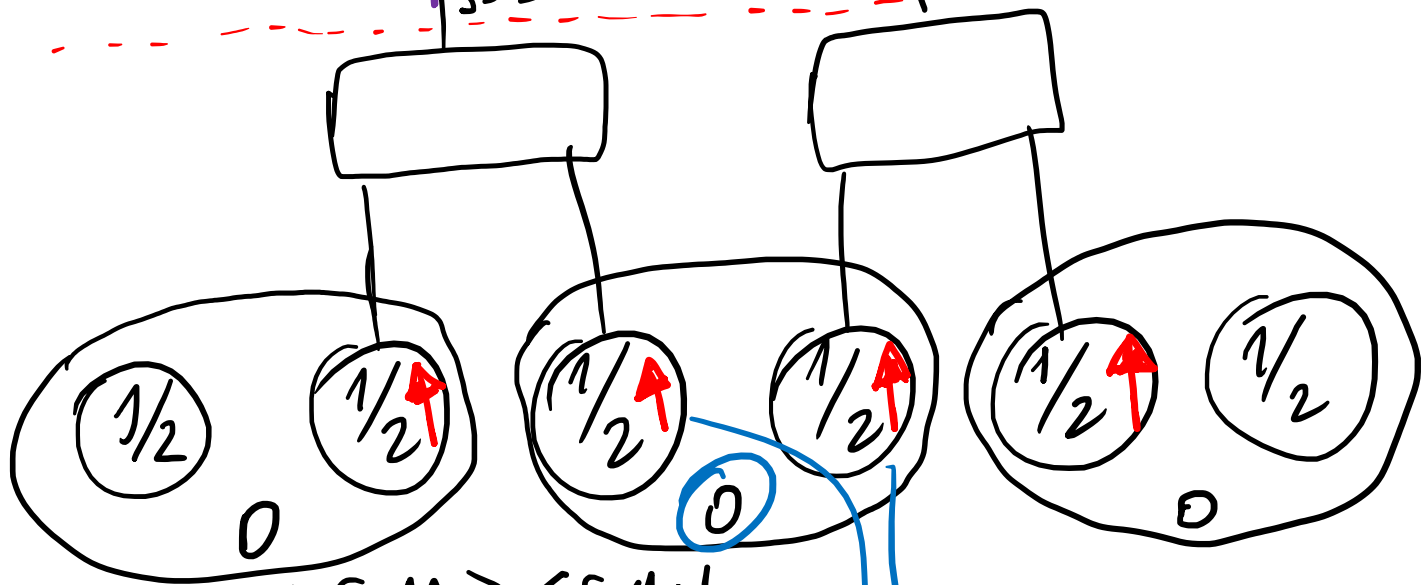
$$S_{total} = 0, 1, \textcircled{2}$$

$$|S=1, M=1\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$$

$\otimes I \otimes$



$\otimes I \otimes$



$$\dots \otimes I \otimes P_2 \otimes I \otimes \dots |\psi\rangle = 0 \cdot |\psi\rangle$$

$$\vec{S}_{total}^2 = \sum_{S,M} S(S+1) |SM\rangle \langle SM|$$

important

$$0 \leq P_2 = \sum_{M=2,1,0,-1,-2} |S_{total}=2, M\rangle \langle S_{total}=2, M|$$

$$H = \sum_i \underbrace{P_2^{(i, i+1)}}_{\text{номера кубитов, на которых действ. проектор}} \geq 0 \Rightarrow \text{с.з. } H \geq 0$$

сумма по номерам кубитов

$$H|\psi\rangle = 0$$

$\Rightarrow |\psi\rangle$ — осн. сост. H .

$$P_2 = \sum_j (A_j \otimes B_j)$$

S_z

S_x

S_y

S_z

S_x

S_y

опер. пр. стика ($S=1$)
на воздел.
направлении.

с.з. равнов

$$\frac{J(J+1) - 1}{2}$$

см. с.з. с.з.

$J = S_{total}$

коммун. $\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1}$

$\vec{S}_{total}^2$ и S_{total}^2

$$= \frac{S_x^{(i)} \otimes S_x^{(i+1)} + S_y^{(i)} \otimes S_y^{(i+1)} + S_z^{(i)} \otimes S_z^{(i+1)}}{2}$$

$$\underline{1=j_1}, \underline{j_2=1}, \quad J = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2$$

$$\vec{J} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2 - \text{физ.} \quad [J_\alpha, J_\beta] = i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$$

$$J_\alpha = j_1 \otimes I + I \otimes j_2 \quad \alpha = x, y, z$$

$$\vec{J}^2 = \sum_\alpha J_\alpha J_\alpha = (\vec{j}_1 + \vec{j}_2)^2 = \vec{j}_1^2 + 2 \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 + \vec{j}_2^2$$

$$[\vec{j}_1^2, \vec{J}^2] = 0$$

$$[\vec{j}_2^2, \vec{J}^2] = 0$$

$$J_+ = J_x + i J_y$$

$$[\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2, \vec{J}^2] = 0$$

$$? \text{ - физ.}$$

$$\text{физ.} \quad J(J+1)$$

$$\vec{J}^2 |f\rangle = \hbar^2 |f\rangle$$

↑ макс.
 ↓ мин.

$$\text{физ.} \quad \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2 \text{ takes:}$$

$$\frac{J(J+1) - j_1(j_1+1) - j_2(j_2+1)}{2}$$

$$\frac{J(J+1) - 4}{2} = \text{физ.} \quad \vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2$$

- mat.

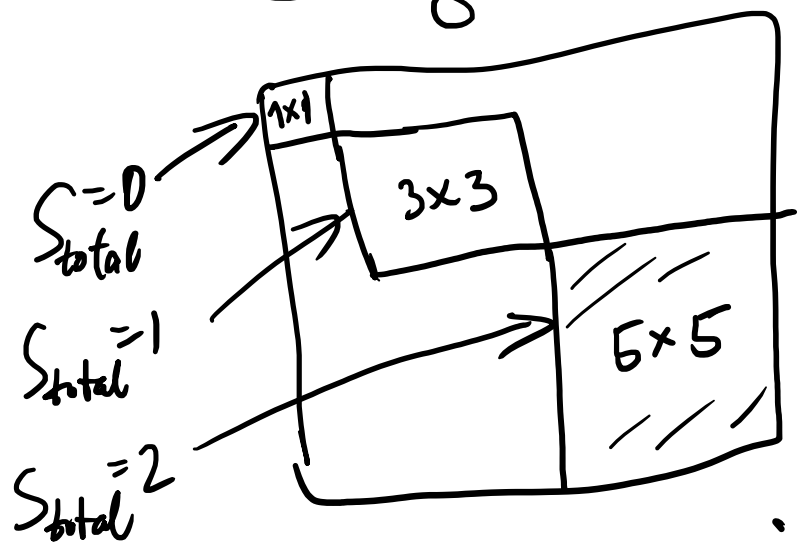
$$\text{физ.} \quad j_2(j_2+1)$$

макс.
 ↓
 мин.

$$j(j+1)$$

$$\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1}$$

— квант. образом действует
в 9-мерном
пр-ве



($\dim \mathcal{H} = 3$) — разн-пр-ва
одного
узла.

$$P_2 = a \cdot \underbrace{(\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1})^0}_I + b (\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1}) + c (\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1})^2.$$

$$P_2 |S_{total}=0, \underline{M=0}\rangle = 0$$

$$P_2 |S_{total}=1, \underline{M=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}\rangle = 0.$$

$$\rightarrow [P_2, \vec{S}^2] = 0$$

$$\rightarrow [P_2, (\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1})] = 0$$

$c.z. \vec{S}_{total}^2$	S_{total}	$c.z. P_2$	$c.z. \vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1}$	$(\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1})^2$	$c.z. I$
0	0	0	-2	4	1
2	1	0	-1	1	1
6	2	1	1	1	1

$$b = 1 - a - c = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} a - 2b + 4c = 0 \\ a - b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$\frac{J(J+1) - 4}{2}$$

$$3a + 6c = 2$$

$$a + c = \frac{1}{2}$$

$$a + 2c = \frac{2}{3}$$

$$a + c = \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{6}$$

$\uparrow$
b

$\uparrow$
c

$\uparrow$
a

$$P_2^{(i,i+1)} = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot I}_{(i,i+1)} + \frac{1}{2} (\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1}) + \frac{1}{6} (\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1})^2.$$

$$H = \sum_i P_2^{(i,i+1)}$$

можем не писать вид единичного оператора
 можем умножить на число $c \in \mathbb{R}_+$

$$\rightarrow H' = \sum_i \left[\overbrace{(\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1}) + \frac{1}{3} (\vec{S}^i \cdot \vec{S}^{i+1})^2}^h \right] - \text{зам. AKLT}$$

$|\psi\rangle$ — осн. сост. H' .

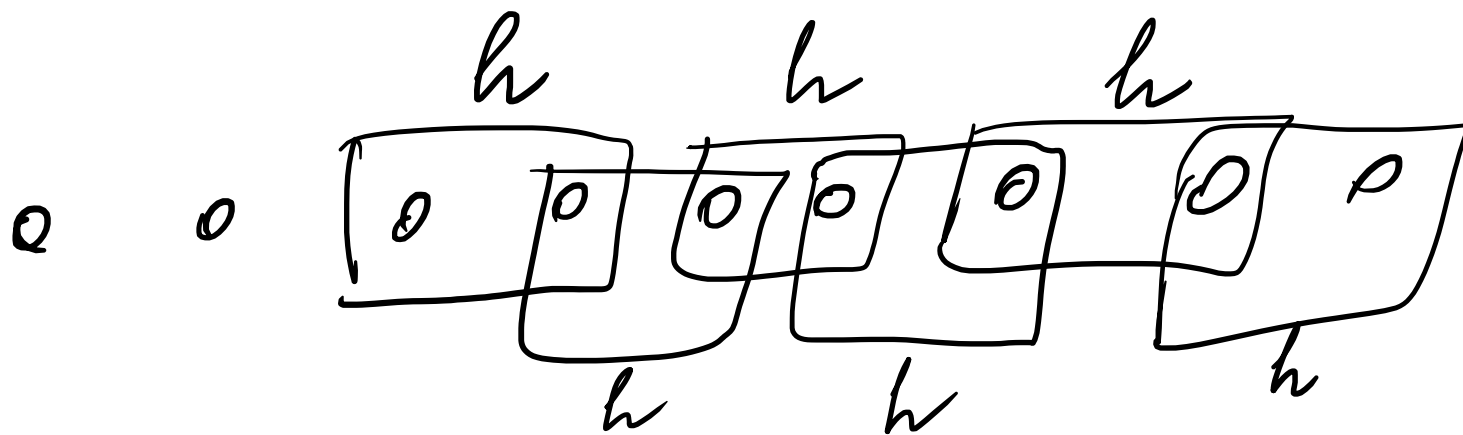
Лок. память. для одноч. членок:

AKLT
1987

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} h_{ij}$$

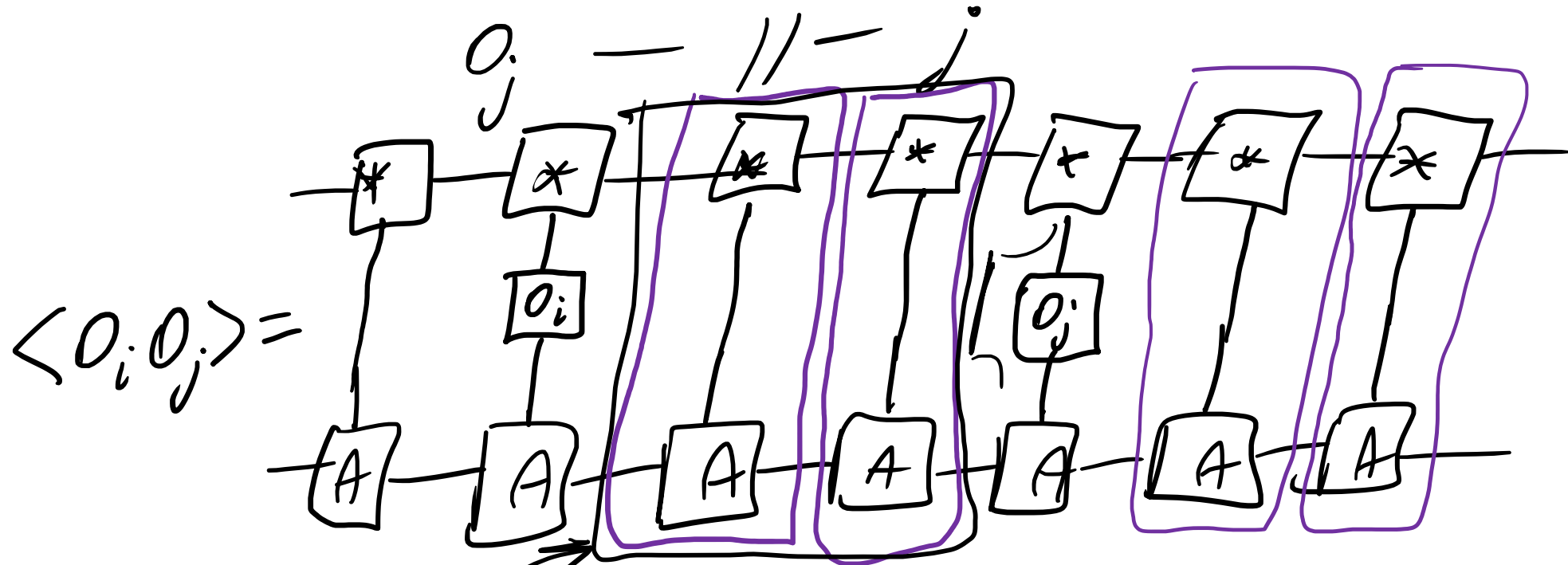
сумма по соседям (первого порядка, второго порядка)

трудно
найти $|\psi\rangle$, котор.
миним. $\langle \psi | H | \psi \rangle / \langle \psi | \psi \rangle$



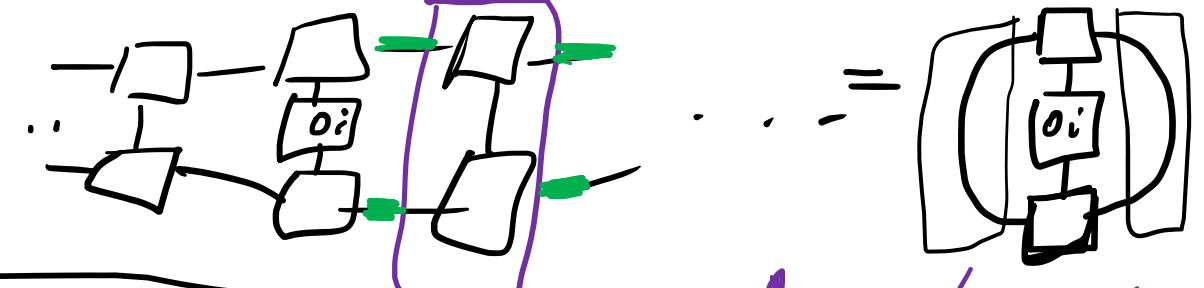
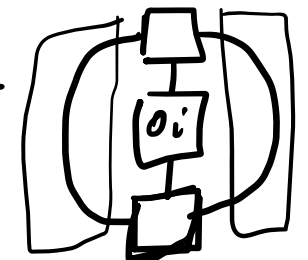
Коррел. ф-я (двухточечная)

O_i — действ на заснву с номером i



$$\langle O_i O_j \rangle = \langle \psi | O_i O_j | \psi \rangle$$

E^{i-j-1}

$\langle 0_i \rangle = \dots$

 $\dots =$

 $|\varphi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\sum_k \lambda_k^n |R_k\rangle \langle L_k|$

E transfer tensor

$C_{ij} = \langle 0_i 0_j \rangle - \langle 0_i \rangle \langle 0_j \rangle$

- upper and top. $\begin{pmatrix} = 0 \\ \partial n l \\ \text{расценн.} \\ \text{сост.} \end{pmatrix}$

$E = \sum_i (A^*)^i \otimes A^i \xrightarrow{AKLT} \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} +$

$+ \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$X \wedge X^{-1}$

$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

член пр. разг.

$E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$E = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} =$

$\frac{1}{3} (|\psi_+\rangle \langle \psi_+| + (-1/3) |\psi_-\rangle \langle \psi_-| + (-1/3) |\psi_+\rangle \langle \psi_+| + (-1/3) |\psi_-\rangle \langle \psi_-|)$

R. Orus
Ann. Phys: 349, 117 (2014)
ср. 130, 131.
= $|\psi_+\rangle$

U. Schollwöck
1008. 3477
ср. 40
Упражнение:

$$C_{ij} \frac{\text{AKLT}}{O_i = S_z, O_j = S_z} \dots \left(-\frac{1}{3}\right)^{i-j-1}$$

антиферр.
повед.

экспон.
зав.
корр