Квантовая томография на локально компактных группах

@ Амосов Г.Г.

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, г. Москва, Россия

Значения, которые получаются в результате измерения квантового состояния, не обязаны быть действительными или целыми числам. Например, при измерении фазы логично предположить, что множество значений совпадает с группой единичной окружности. Мы рассматриваем общую ситуацию, когда значения принадлежат некоторой локально компактной группе G с мерой Хаара μ. Обозначим $\hat{G}$ дуальную группу с мерой Хаара ν. Определим проективное унитарное представление $\hat{G}\times G$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L^2(G) = \{f : \int\limits_G |f(g)|^2 d\mu(g) < +\infty\}$ формулой

$$(\pi(\chi, g)f)(a) = \chi(a)f(a+g),\ g, a \in G,\ \chi \in \hat{G}.$$

Обозначим $\mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$ пространство операторов Гильберта-Шмидта. Выпуклое множество квантовых состояний (положительных операторов со следом) $\mathfrak{S}(H) \subset \mathfrak{S}_2(\mathcal{H})$. Определим отображение Φ на операторах ранга один $|f\rangle\langle h|$ формулой

$$[\Phi(|f\rangle\langle h|)](\chi, g) = \langle h, \pi(\chi, g)f\rangle,\ f, h \in \mathcal{H},\ g \in G,\ \chi \in \hat{G}.$$

Для единичного вектора $f \in \mathcal{H}$ мы называем функцию $\Phi(|f\rangle\langle f|)$, заданную на $\hat{G} \times G$ характеристической функцией чистого состояния $|f\rangle\langle f|$. Для фиксированных $\chi \in \hat{G}$, $g \in G$ определим множество $G_{\chi,g} = \{(\chi', g') : \chi'(g) = \chi(g')\}$. Можно показать, что множество $G_{\chi,g}$ является подгруппой $\hat{G}\times G$. Рассмотрим сужение характеристической функции состояния $|f\rangle\langle f|$ на $G_{\chi,g}$ и определим функцию

$$F_f(\chi', g') = \chi'(g')^{1/2}\Phi(|f\rangle\langle f|)(\chi' g'),\ (\chi', g') \in G_{\chi,g}.$$

Теорема. Существует такая вероятностная мера $\mu^f_{\chi,g}$ на $\hat{G} \times G$, что

$$F_f(\chi', g') = \int\limits_{G_{\chi,g}} X_{\chi',g'}(\chi'', g'')d\mu^f_{\chi,g}(\chi'', g''),\ (\chi', g') \in G_{\chi,g},$$

где $(\chi', g') \to X_{\chi',g'} \in \hat{G}_{\chi,g}$ устанавливает изоморфизм между $G_{\chi,g}$ и $\hat{G}_{\chi,g}$.

Мы называем набор распределений вероятностей $\{\mu^f_{\chi,g},\ \chi \in \hat{G},\ g \in G\}$ квантовой томограммой состояния $|f\rangle\langle f|$. Для случая $G = \mathbb{R}$ она совпадает с оптической квантовой томограммой.

Поддержано Министерством науки и высшего образования РФ, грант 075-15-2020-788.

Оценки норм дифференциальных операторов в весовых пространствах потенциалов

@ Баймурзаева А.Б.
ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, г. Нур-Султан, Казахстан

Рассматривался дифференциальный оператор

$$\mathrm{L}_0 f = \sum_{|\alpha| \leq\ l} a_\alpha(x) D^\alpha f, \quad f \in C_0^\infty(\Omega),$$

с локально суммируемыми в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ коэффициентами $a_\alpha(x)$. Решена задача о существовании корректно определенного ограниченного продолжения L_0 как оператора, действующего из пространства $H_p^m(\Omega; \rho, \upsilon_m)$ в $H_p^t(\Omega; \rho, \upsilon_t)$, $0 < t < m - l$, $1 < p < \infty$. Для $s > 0$, $1 < p < \infty$ пространство $H_p^s(\Omega; \rho, \upsilon_s)$ определяется как пополнение класса $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно дифференцируемых и финитных в Ω функций по норме

$$\|f; H_p^s(\Omega; \rho, \upsilon_s)\| = \left[\sum_{j \geq 1} \left(\rho^p(x^j) \|\psi_j f; H_p^s\|^p + \upsilon_s^p(x^j) \|\psi_j f; L_p\|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1)$$

В (1) $\upsilon_s(x) = \rho(x) h^{-s}(x)$, функции $\rho(x)$, $0 < h(x) \leq 1$ удовлетворяют условиям погружения $Q(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y_j - x_j| < \frac{h(x)}{2}; 1 \leq j \leq n\} \subset \Omega$ $(x \in \Omega)$ и ограниченного колебания

$$\varkappa^{-1} \leq \frac{\rho(y)}{\rho(x)}, \frac{h(y)}{h(x)} \leq \varkappa, \text{ если } y \in \tau Q(x) (0 < \tau < 1),$$

$\{\psi_j\}$ - разбиение единицы, соотнесенное двойному покрытию типа Безиковича $\{\tau^2 Q(x^j), \tau Q(x^j)\}$ в области Ω (см. [1]).

Семейство $\{H_p^s(\Omega; \rho, \upsilon_s), s > 0\}$ инвариантно относительно комплексной интерполяции, содержит весовые пространства Соболева, Соболева-Слободецкого.

Работа была проделана при поддержке гранта МОН РК AP08856104.

[1] Kussainova L.K., Sultanaev Ya.T., Murat G.K. Approximate Estimates for a Differential Operator in a Weighted Hilbert Space // Differential Equations. 2019. Vol. 55, No 12. P. 1589-1597.