

$$C_{ij} = \langle O_i O_j \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle$$

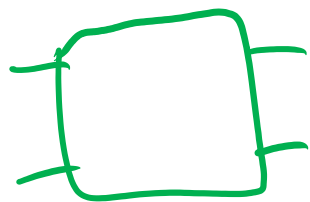
$$O_i, O_j = J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ в базисе с.в. } J_z$$

$$E = \sum_{k=1}^n \lambda_k^{\downarrow} |R_k\rangle \langle L_k|$$

$$E |R_k\rangle = \lambda_k |R_k\rangle$$

$$\langle L_k | E = \lambda_k \langle L_k |$$

$$\langle L_m | R_k \rangle = \delta_{mk}$$



$$E^{j-i-1} = \sum_k \lambda_k^{j-i-1} |R_k\rangle \langle L_k|$$

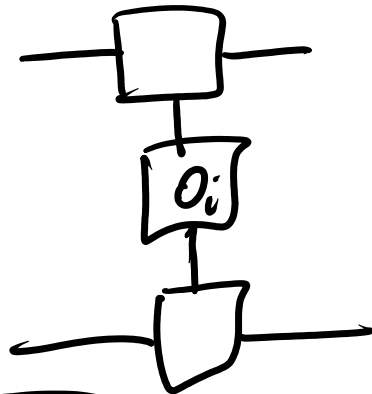
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E^n}{\lambda_1^n} = |R_1\rangle \langle L_1|.$$

Пусть $\lambda_k^{\downarrow}$: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \geq \lambda_4$.

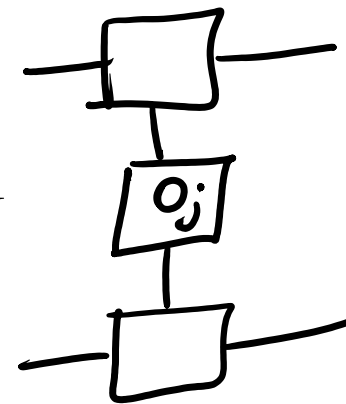
$\lambda_1 = 1$ для нормировки

$$\underline{\langle 0_i 0_j \rangle} = \langle L_1 | E_{0_i} \underbrace{E^{j-i-1}}_{\text{AKLT}} E_{0_j} | R_1 \rangle \quad \textcircled{=}$$

$$E_{0_i} =$$



$$E_{0_j} =$$



$$: \mathcal{H}_r^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{H}_r^{\otimes 2}$$

↑ ↑
pair
MPS.

2nd AKLT-models

$$E^{j-i-1} = \lambda_1^{j-i-1} |R_1\rangle \langle L_1| +$$

$$+ \lambda_2^{j-i-1} \sum_{k=2}^4 |R_k\rangle \langle L_k|$$

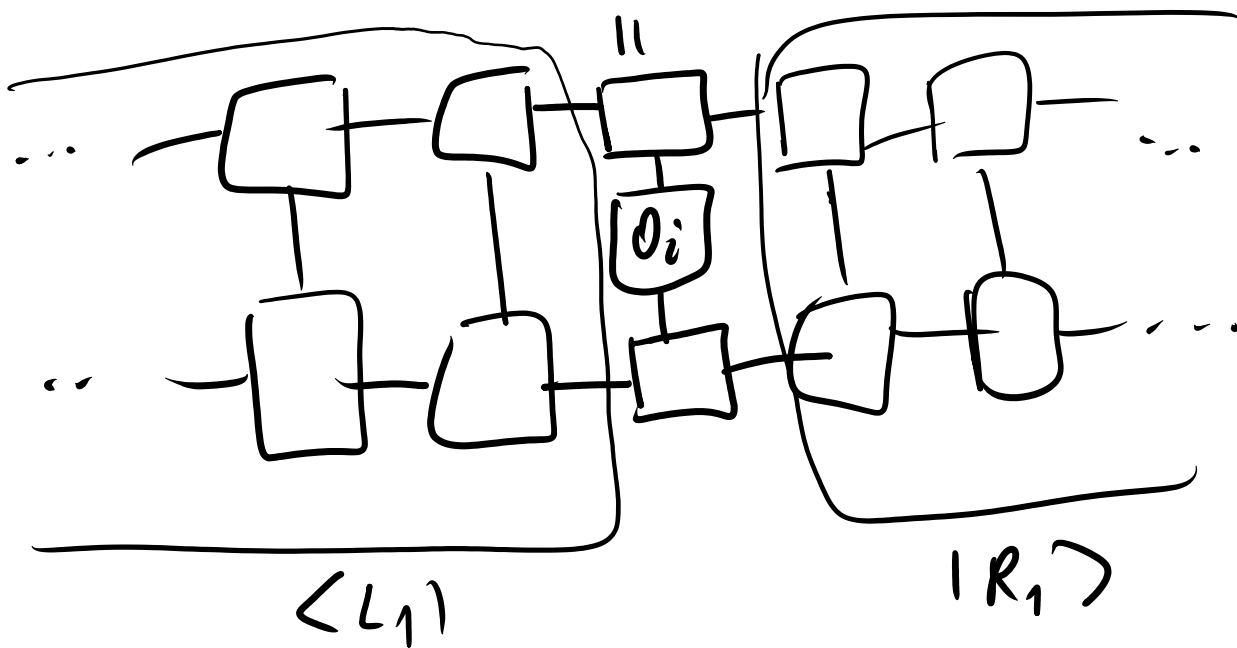
" $\lambda_3 = \lambda_n$

$$\sum_{k=1}^{n-2} \lambda_k^{j-i-1} |R_k\rangle \langle L_k| \approx$$

$$\approx \frac{\lambda_1^{j-i-1}}{\lambda_1^{j-i-1}} \left(|R_1\rangle \langle L_1| + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{j-i-1} |R_2\rangle \langle L_2| \right)$$

Even $j-i \gg 1$, so $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^{j-i} < \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{j-i}$

$$\textcircled{=} \underbrace{\langle L_1 | E_{0_i} | R_1 \rangle}_{\langle O_i \rangle} \underbrace{\langle L_1 | E_{0_j} | R_1 \rangle}_{\langle O_j \rangle} \lambda_1^{j-i-1} + \lambda_1^{j-i-1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{j-i-1} \langle L_1 | E_{0_i} | R_2 \rangle \times \langle L_2 | E_{0_j} | R_1 \rangle$$



$$C_{ij} = \frac{\langle O_i O_j \rangle - \langle O_i \rangle \langle O_j \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{j-i-1} \langle L_1 | E_{0_i} | R_2 \rangle \langle L_2 | E_{0_j} | R_1 \rangle$$

Далее AKLT модель:

$$C_{ij} = \left(-\frac{1}{3} \right)^{j-i-1} \langle \psi_+ | E_{0_i} | \underbrace{\sum_{k=2}^4 | R_k \rangle \langle L_k | E_{0_j} | \psi_+ \rangle}_{\text{см. след. слайд}} \rangle$$

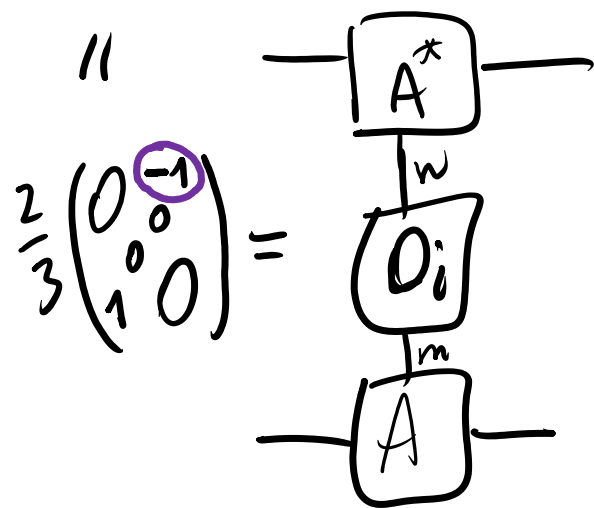
$$E = \begin{pmatrix} 1/3 & & 2/3 \\ & -1/3 & -1/3 \\ 2/3 & & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot |\psi_+\rangle \langle \psi_+| + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1/6 & & 1/6 \\ & -1/3 & \\ & & -1/3 \\ 1/6 & & & -1/6 \end{pmatrix}$$

E_{0i}

//



$$\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$+ 1 \cdot \left(A^{+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{\otimes 2}$$

$$+ 0 \cdot \left(A^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^{\otimes 2}$$

$$+ (-1) \cdot \left(A^{-1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)^{\otimes 2}$$

$$O_i = J^z = \begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{1}{3} \right) \sum_{k=2}^4 |R_k\rangle \langle L_k|$$

$$I - |\psi_+\rangle \langle \psi_+| = \begin{pmatrix} 1/2 & & & -1/2 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -1/2 & & & 1/2 \end{pmatrix}$$

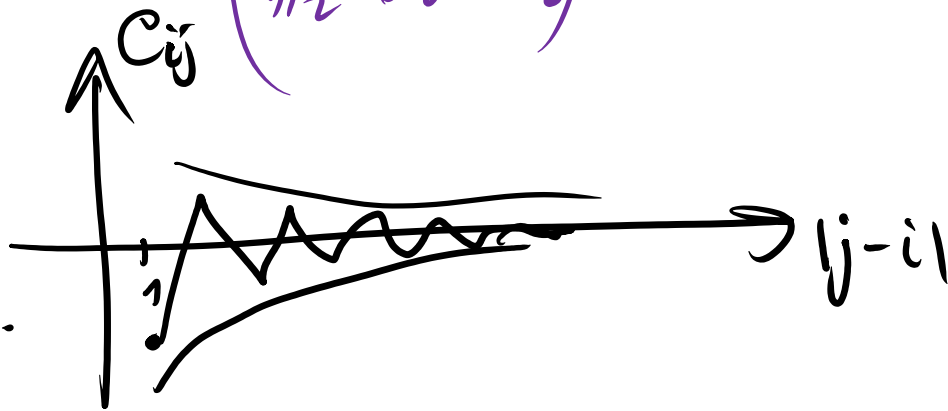
$$C_{ij} = \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^{j-i-1}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 0 \ 0 \ 1)^{\frac{2}{3}}}_{\frac{2}{3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \textcircled{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3}\right)^{j-i-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2) =$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{j-i-1} =$$

$$= 2 \left(-\frac{1}{3}\right)^{j-i}$$

аннферр-
ноперон.



$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \textcircled{-1/2} & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & \textcircled{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = \sum_{k=2}^{r^2} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^{j-i}$$

$|GHZ\rangle$ - MPS с рангом $MPS = 2$.

$$E \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

(бескон.
длинное
корр.)

В
MPS
соот.
 $C_{ij} \rightarrow \text{const}$
 $\rightarrow \text{exp}$
затух.

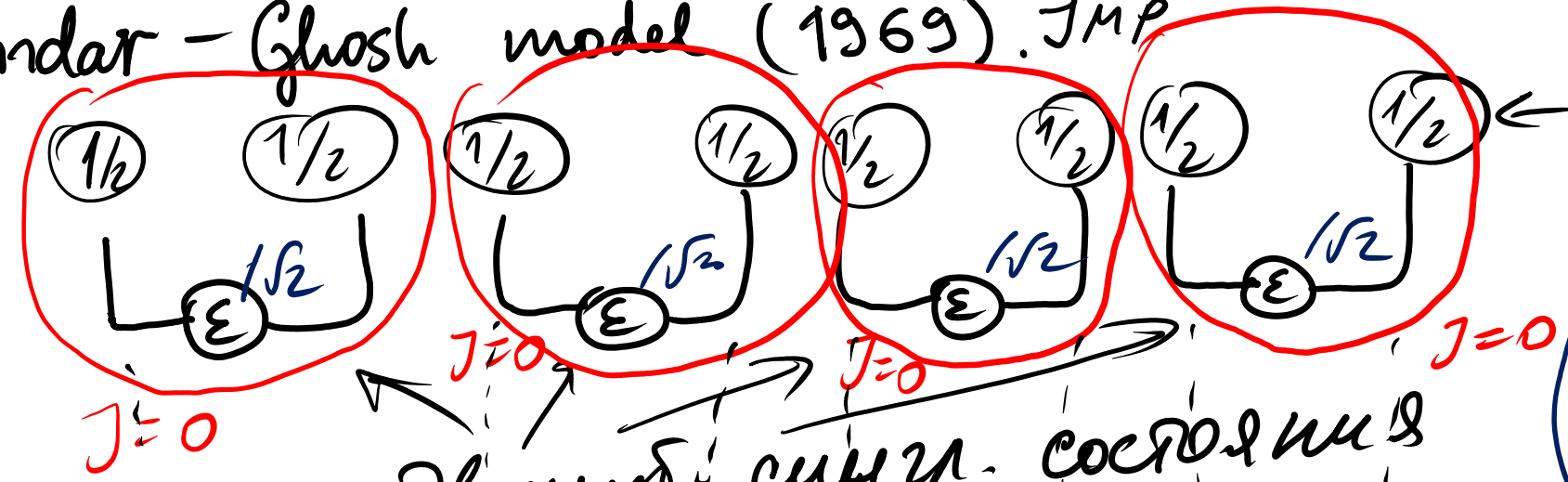
1). MPS может опис. ∞ длинное
корр. ($GHZ, \dots$)
 $C \approx \text{const}$

2) В точке фаз. перехода, $C \sim \frac{1}{|j-i|^3}$, то
MPS с конечным фикс. рангом
не может описать
такой эффект.

✓
MERA.

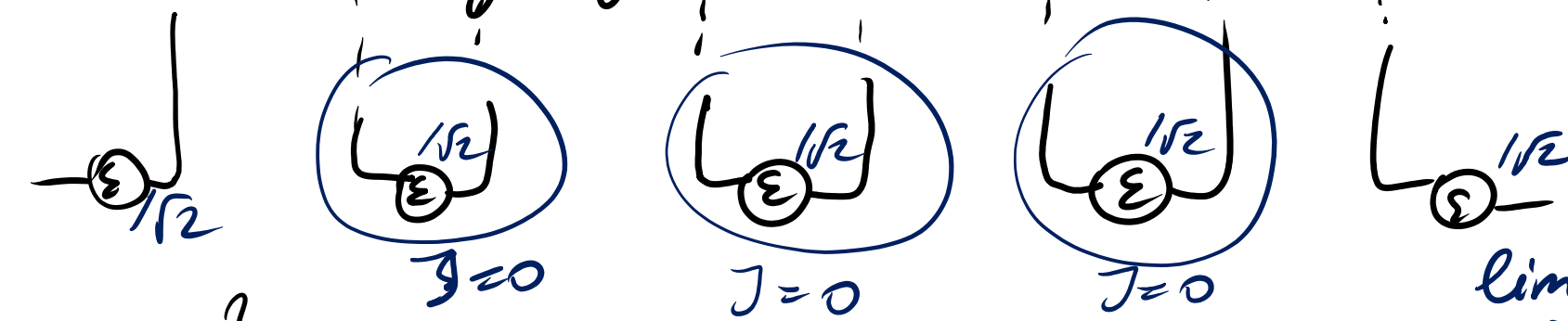
→ Majumdar - Ghosh model (1969). JMR

$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$
MPS



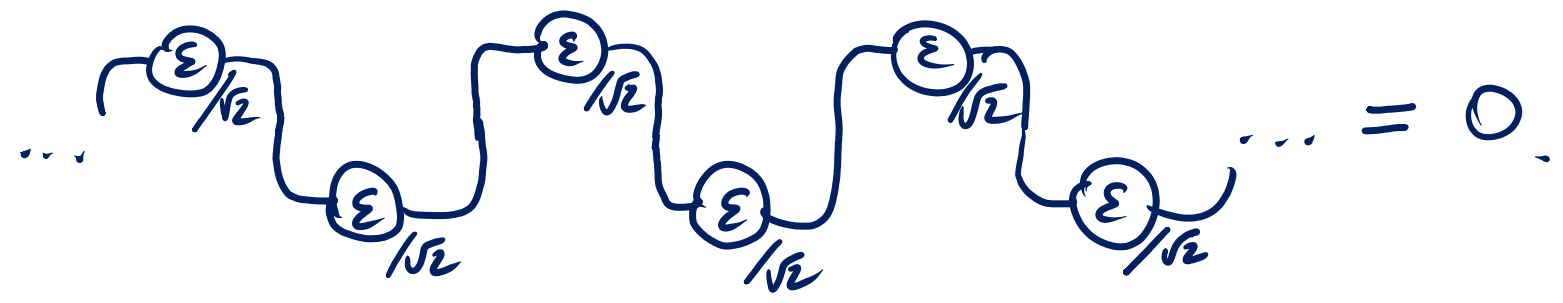
сумма
сост. с трансп. инв.
 $\frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_2\rangle$
MPS

$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$
MPS

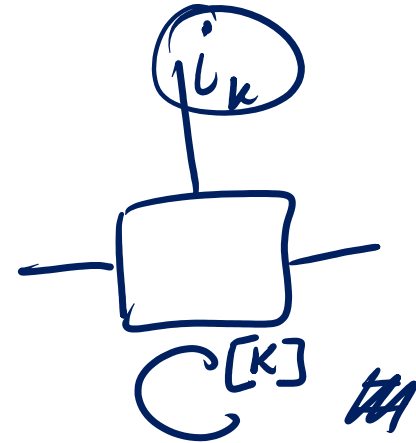
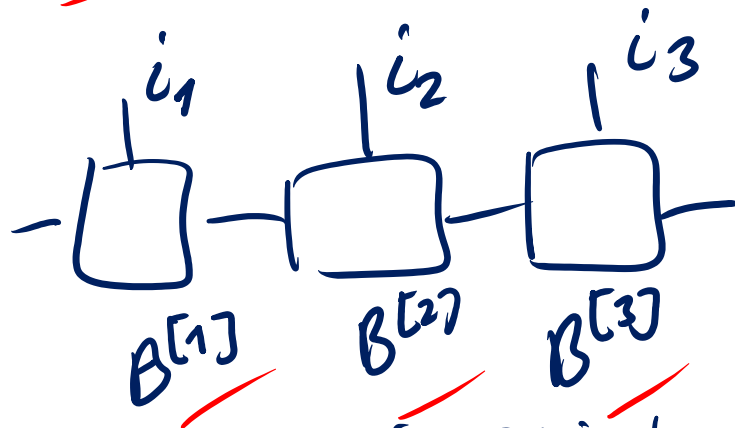
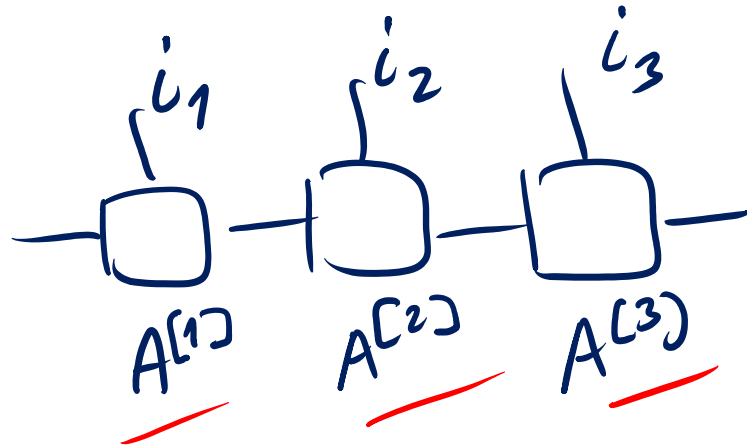


$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \stackrel{?}{=} 0$
да.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^n = 0$



Задача: как сложить два MPS состояния?



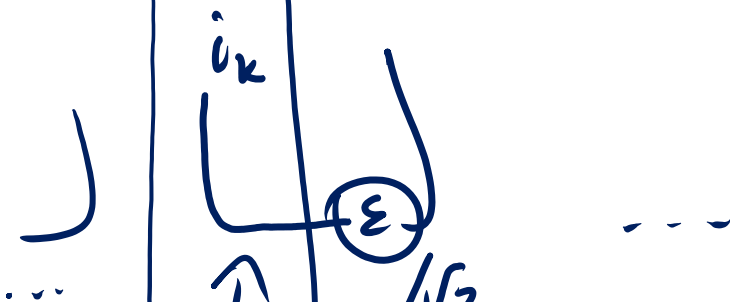
$$C^{[k], i_k} = \begin{pmatrix} A^{[k], i_k} & \bigcirc \\ \bigcirc & B^{[k], i_k} \end{pmatrix}$$

$$C^{[k], i_k} C^{[k+1], i_{k+1}} = \begin{pmatrix} A^{[k], i_k} & A^{[k+1], i_{k+1}} & \bigcirc \\ \bigcirc & B^{[k], i_k} & B^{[k+1], i_{k+1}} \end{pmatrix} = \underline{A^{[k], i_k} \oplus B^{[k], i_k}}.$$

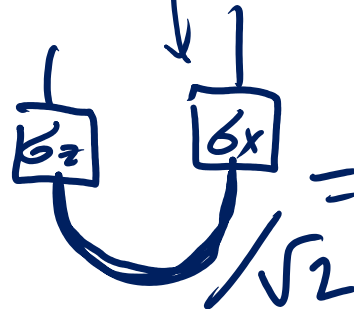
$$|\psi_1\rangle =$$



$$|\psi_2\rangle =$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\epsilon / \sqrt{2}$$

$$\text{Exam } i_k = \uparrow, \text{ to}$$

$$X^\uparrow = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

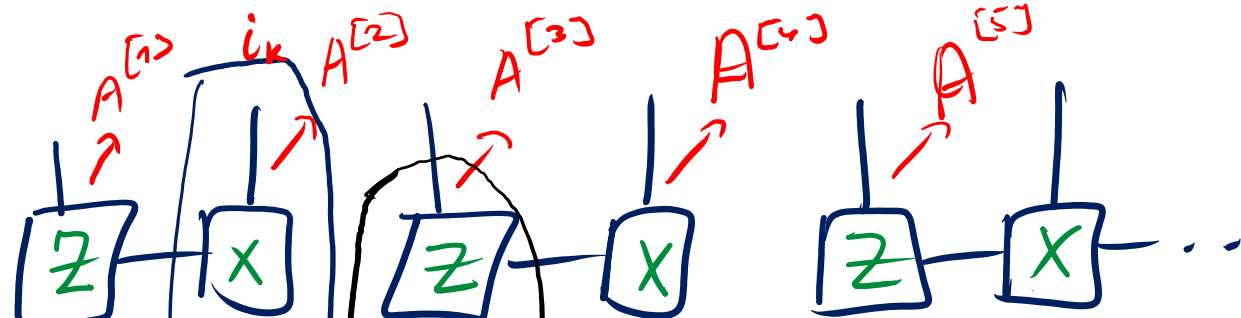
$$X^\downarrow = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Z^\uparrow = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = (1 \ 0)$$

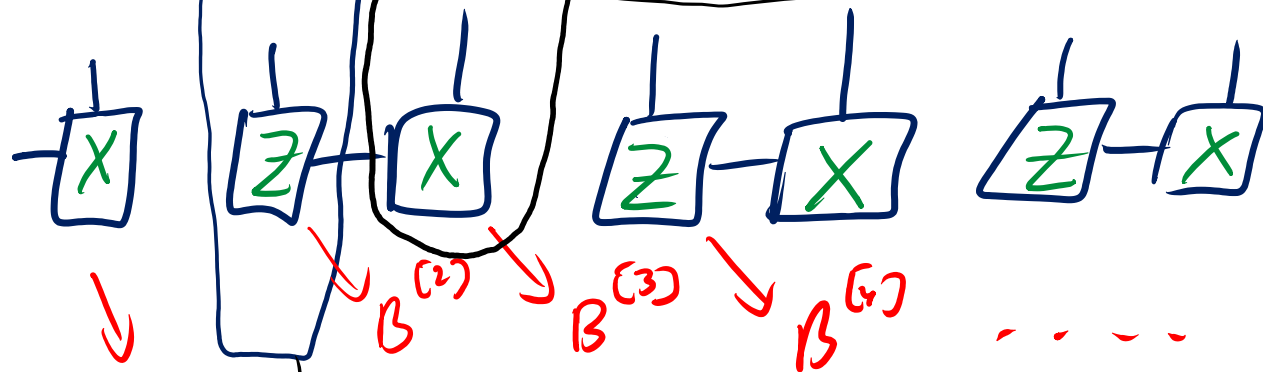
$$Z^\downarrow = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^T = (0 \ -1)$$

$$\frac{|\uparrow \downarrow\rangle - |\downarrow \uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_1\rangle =$$



$$|\psi_2\rangle =$$



$$\begin{pmatrix} z^{i_k} & \\ & x^k \end{pmatrix}$$

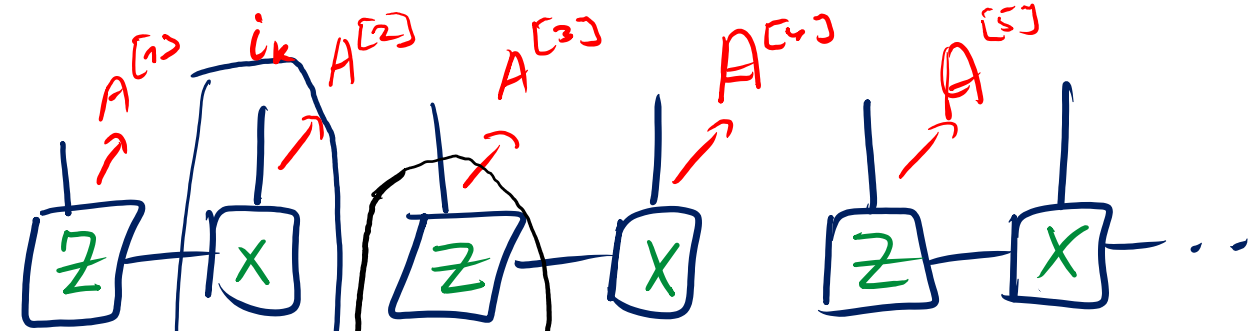
$i_k = \uparrow \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$
 $i_k = \downarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1/2 & | & 0 \end{pmatrix}$

$$C^{i_k} = \begin{pmatrix} x^{i_k} & \\ & z^{i_k} \end{pmatrix}$$

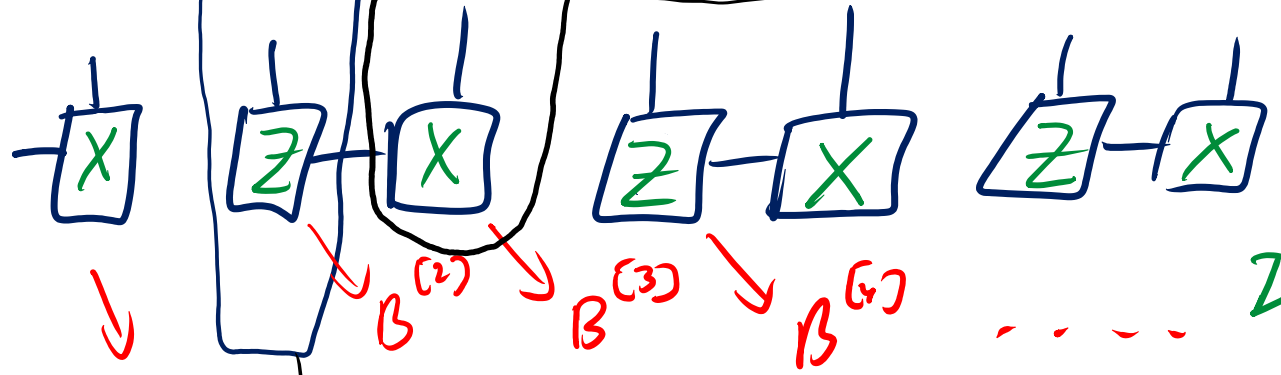
$\text{Sum } i_k = \uparrow$
 $C^\uparrow = \begin{pmatrix} x^\uparrow & \\ & z^\uparrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\text{Sum } i_k = \downarrow$
 $C^\downarrow = \begin{pmatrix} x^\downarrow & \\ & z^\downarrow \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$|\psi_1\rangle =$$



$$|\psi_2\rangle =$$



$$\begin{pmatrix} z^{i_k} & \\ & x^{i_k} \end{pmatrix} = D^{i_k}$$

$$D^{\uparrow} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} \end{array} \right); D^{\downarrow} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -1 \\ \hline 0 & 1/\sqrt{2} \end{array} \right)$$

$i_k = \uparrow \quad \downarrow$

$$\begin{pmatrix} x^{i_k} & \\ & z^{i_k} \end{pmatrix}$$

Sum $i_k = \uparrow$

$$C^{\uparrow} = \left(\begin{array}{c|c} x^{\uparrow} & \\ \hline & z^{\uparrow} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Sum $i_k = \downarrow$

$$C^{\downarrow} = \left(\begin{array}{c|c} x^{\downarrow} & \\ \hline & z^{\downarrow} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

~~Local nontriviality:~~

$$D^{\uparrow} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{array} \right), \quad C^{\uparrow} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

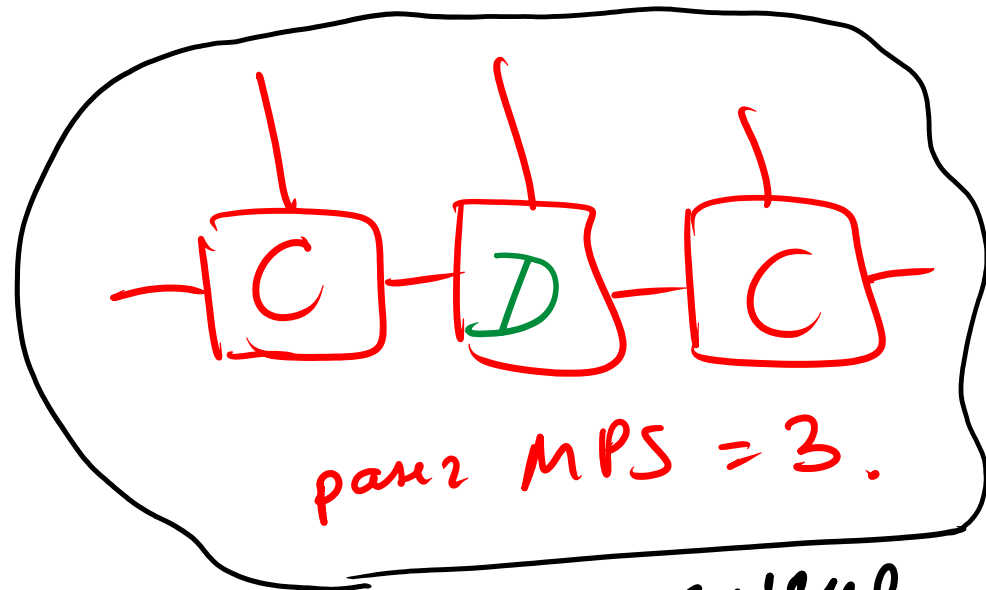
$$D^{\downarrow} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \end{array} \right), \quad C^{\downarrow} = \left(\begin{array}{c|cc} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

любым 3 рядом
стоящие тасуются все
возм. обр.



сумм. 3/2
сумм. 1/2

M.G. state



rank MPS = 3.

суперпозиция
двух
физич. сост.



Однако мы хотим трансценд. инв. форму MPS:

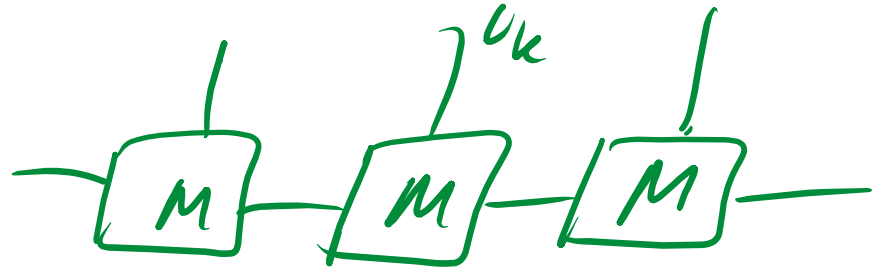
$$\dots - \boxed{C} - \boxed{D} - \boxed{C} - \boxed{D} - \boxed{C} - \boxed{D} - \dots \Rightarrow \dots - \boxed{M} - \boxed{M} - \boxed{M} - \dots$$

Для этого $\boxed{C} - \boxed{D} = \boxed{M} - \boxed{M}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{X^{i_k}} \\ \boxed{Z^{i_k}} \end{pmatrix} \overset{C^{i_k} D^{i_{k+1}}}{=} \overset{M^{i_k} M^{i_{k+1}}}{=} \begin{pmatrix} \boxed{X^{i_k} Z^{i_{k+1}}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \underbrace{\boxed{Z^{i_k} X^{i_{k+1}}}}_{1 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{X^{i_k}} \\ \boxed{Z^{i_k}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{X^{i_{k+1}}} \\ \boxed{Z^{i_{k+1}}} & 0 \end{pmatrix}$$

$\overset{M^{i_k}}{\parallel}$
 $\overset{M^{i_{k+1}}}{\parallel}$

M, G. state (спин 1/2):



$$M^{i_k} = \begin{pmatrix} 0 & \chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{Z^{i_k}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \boxed{X^{i_k}} \\ 0 \end{matrix}$$

$$\sum_{i_k} (M^{i_k})^\dagger M^{i_k} = I \Rightarrow \text{сост. имеет лев. кан. форму.}$$

$$\sum_{i_k} (M^{i_k})^* \otimes M^{i_k} = \boxed{}_{9 \times 9} \xrightarrow{\text{макс. по модулю}} \text{с.з.} = 1$$

состояние нормировано.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad i_k = \uparrow,$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \end{array} \right), \quad i_k = \downarrow,$$

M.G. — основное сост. для гамильтониана

$$H = \sum_i \underbrace{P_{\Sigma=3/2}^{(i, i+1, i+2)}}_{\uparrow \text{ проектор на подпр-во с суммарным спином } 3/2.}$$

$$\vec{J}_i + \vec{J}_{i+1} + \vec{J}_{i+2} = \vec{J} \rightarrow \text{с.з. } J(J+1)$$

$$\vec{J}_i^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{4} I$$

$\left(\frac{3}{2}\right)$ либо $\frac{1}{2}$ либо $\frac{1}{2}$

Гип. получить лам-к
M.G.

Решение упражнения:

$$\text{Spec } \vec{J}^2 = \begin{cases} 15/4 & \text{кратности } 4 \quad (J=3/2) \\ 3/4 & \text{кратности } 4 \quad (J=1/2 \text{ или } J=1/2) \end{cases}$$

$$P_{J=3/2} = \sum_{M=-3/2}^{3/2} |J, M\rangle \langle J, M| = \frac{1}{3} \left(\vec{J}^2 - \frac{3}{4} I \right)$$

ед. оператор
в $\mathbb{C}^8$.

$$H = \sum_i \frac{1}{3} \left((\vec{J}^i + \vec{J}^{i+1} + \vec{J}^{i+2})^2 - \frac{3}{4} I \right) =$$

$$= \sum_i \frac{1}{3} \left(\underbrace{(\vec{J}^i)^2}_{\frac{3}{4}I} + \underbrace{(\vec{J}^{i+1})^2}_{\frac{3}{4}I} + \underbrace{(\vec{J}^{i+2})^2}_{\frac{3}{4}I} + 2\vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+1} + 2\vec{J}^{i+1} \cdot \vec{J}^{i+2} + 2\vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+2} - \frac{3}{4}I \right)$$

$$H = \sum_i \frac{1}{3} \left(\frac{3}{2} I + 2 \vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+1} + 2 \vec{J}^{i+1} \cdot \vec{J}^{i+2} + 2 \cdot \vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+2} \right)$$

Воспользуемся видом единичного оператора (он просто сдвигает с.з., не изменяя с.в.) и группировем слагаемые:

$$H' = \frac{2}{3} \sum_i \vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+1} + \frac{2}{3} \sum_i \vec{J}^{i+1} \cdot \vec{J}^{i+2} + \frac{2}{3} \sum_i \vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+2}$$

Умножим H' на $\frac{3}{4}$, получим гамильтониан М.Б.:

$$H'' = \sum_i \left(\vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+1} + \frac{1}{2} \vec{J}^i \cdot \vec{J}^{i+2} \right)$$

Теорема Эккарта - Янга : Лучш. аппр. $A_r = \text{best}$
 $U \Lambda_r V_r^+$,
 где U_r, Λ_r, V_r^+ - обрезаемые
 матрицы U, Λ, V^+ в
 синг. разл.
 U
 оставляющие
 r наиб. синг.
 значений

матрица A

$\|A\|_F$ - норма Фроб.

$$\|A\|_F = \sqrt{\text{tr } A^H A}$$

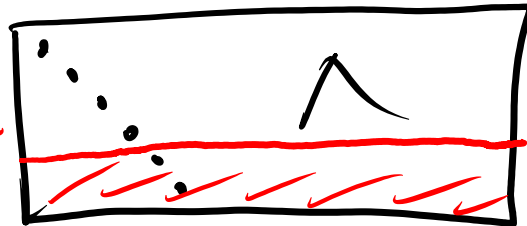
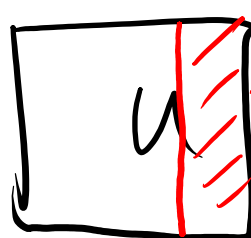
A_r - аппроксим. A с рангом r , не прев. r .
 $\text{rank } A_r \leq r$.

$A_{r*} = \arg \min_{A_r} \|A - A_r\|_F$ - лучшая аппроксимация для A .

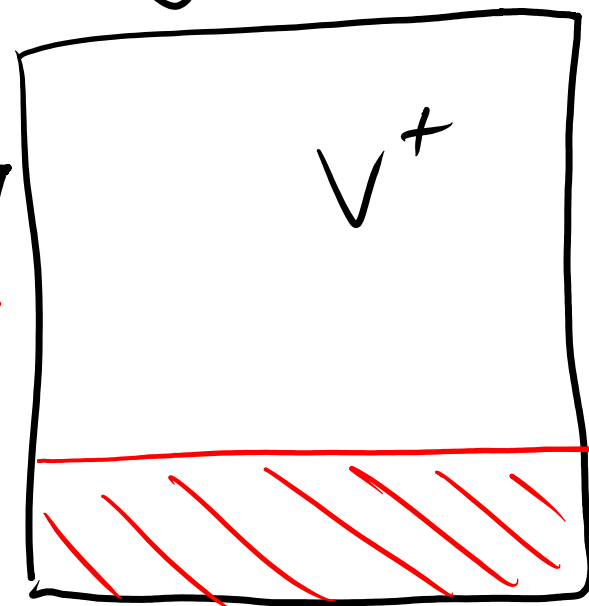
$$A = U \Lambda V^+$$



$=$



син. зх.
в порядке
убывания



умнож.

$$A_r = U_r$$

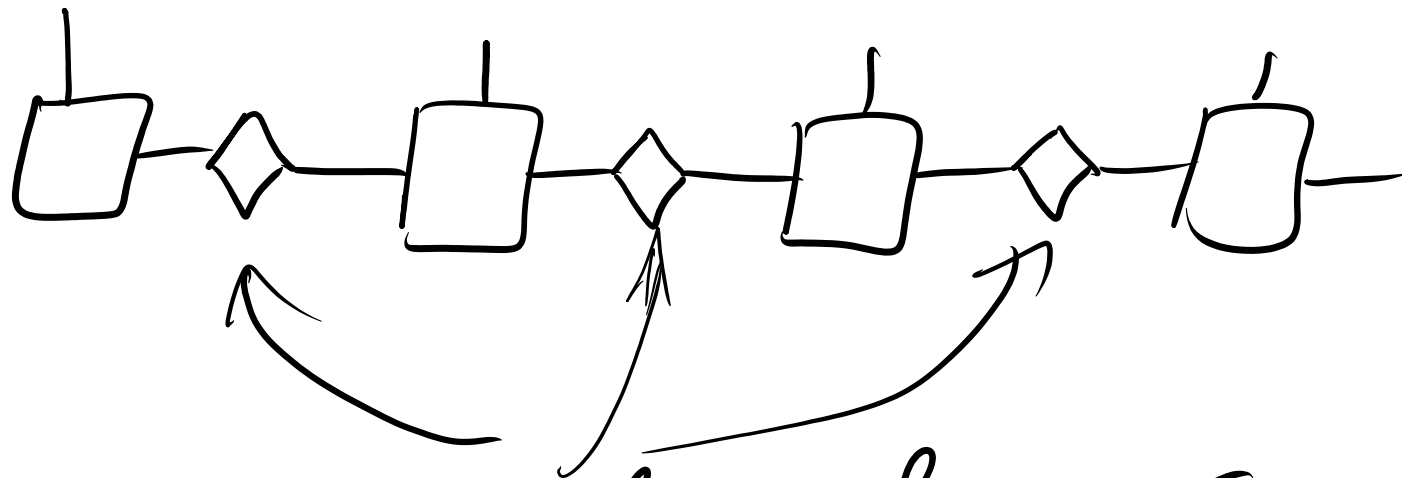
$$\Lambda_r$$

$$V_r^+$$

изометр. матр.

можно
заменить
 $\Lambda \rightarrow \Lambda_r$.

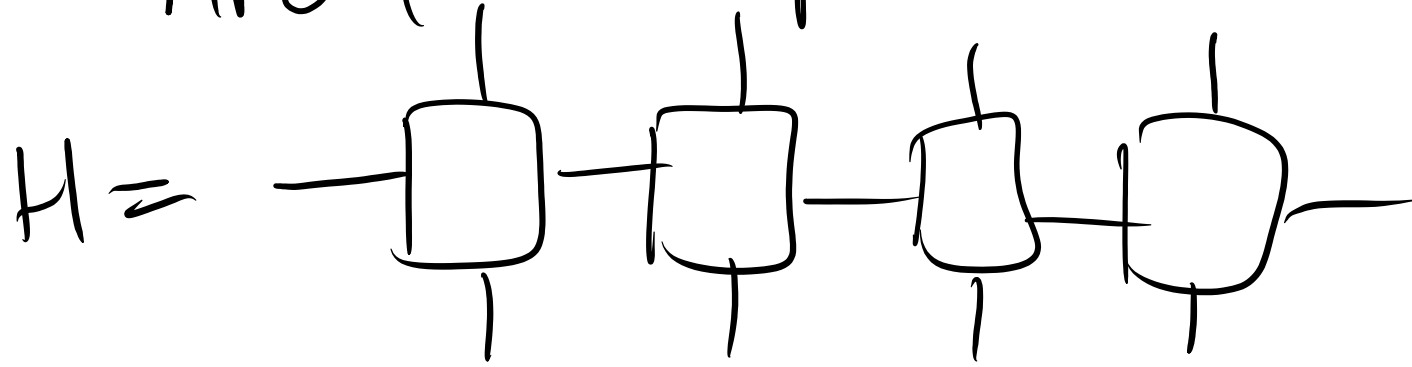
Канон. вид MPS:



оставляя в наиб. синг. значении
мп получаем MPS сост. ранга 1,
которое явл-ся канон. аппроксим.
исходного MPS состояния.

DMRG.
алгоритм.

MPO (matrix product operator)



6 card
pag -

$$\min_{|\psi\rangle \in \text{MPS}} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$$

$$T_{jk}^{il} = A^i_{jk} B^l_m$$

