М.А.Королёв

Закон Грама и аргумент дзета-функции Римана

(*доклад 8 апреля 2011 года*)

При положительном t обозначим через $\vartheta(t)$ приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma\bigl(\frac{s}{2}\bigr)$ вдоль отрезка критической прямой с концами в точках $s = \frac{1}{2}$ и $s = \frac{1}{2} + it$. Тогда функция Харди

$$Z(\tau) \,=\, e^{i\,\vartheta(\tau)}\zeta\bigl(\tfrac{1}{2} + i\tau\bigr)$$

вещественна при вещественных τ, а её вещественные нули совпадают с ординатами нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$. Далее, при t, отличном от ординаты нуля $\zeta(s)$, функция

$$S(t) \,=\, \frac{1}{\pi}\arg\zeta\bigl(\tfrac{1}{2} + it\bigr)$$

равна приращению непрерывной ветви $\pi^{-1}\arg\zeta(s)$ вдоль ломаной линии, соединяющей точки $2, 2 + it$ и $\frac{1}{2} + it$. В противном случае $S(t)$ определяется равенством

$$S(t) \,=\, \tfrac{1}{2}\lim_{h\to 0}\bigl(S(t+h) + S(t-h)\bigr).$$

Через $N(t)$ обозначим число нулей $\zeta(s)$ в прямоугольнике $0 < \mathrm{Im}\, s \leqslant t$, $0 \leqslant \mathrm{Re}\, s \leqslant 1$, с той лишь оговоркой, что в точках разрыва (совпадающих, очевидно, с ординатами нулей $\zeta(s)$) величина $N(t)$ определяется полусуммой пределов своих значений справа и слева:

$$N(t) \,=\, \tfrac{1}{2}\lim_{h\to 0}\bigl(N(t+h) + N(t-h)\bigr).$$

Функции $N(t), \vartheta(t)$ и $S(t)$ связаны равенством

$$N(t) \,=\, \frac{1}{\pi}\,\vartheta(t) \,+\, 1 \,+\, S(t), \tag{1}$$

которое называется формулой Римана-Мангольдта.

Пусть, далее $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$ – комплексные нули $\zeta(s)$, лежащие в верхней полуплоскости и занумерованные в порядке возрастания мнимых частей:

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \leqslant \gamma_n \leqslant \gamma_{n+1} \leqslant \ldots.$$

Наконец, через c_n будем обозначать положительные вещественные нули функции Харди $Z(t)$, взятые с учётом кратности и упорядоченные по возрастанию.

Разумеется, для всех нулей, приближённые значения которых вычислены к настоящему времени, справедливы равенства: $\beta_n = \frac{1}{2}$, $c_n = \gamma_n$.

Ординаты первых трёх нулей $\zeta(s)$ были приближённо найдены самим Риманом, однако факт этот стал известен лишь после публикации К.Л.Зигеля (1932 г.). Первой же публикацией на эту тему следует, по-видимому, считать статью Й.-П. Грама (1895 г.), в которой он приводит приближённые значения первых трёх ординат:

$$\gamma_1 \,=\, 14.135, \quad \gamma_2 \,=\, 20.82, \quad \gamma_3 \,=\, 25.1. \tag{2}$$

Использованный Грамом метод был достаточно трудоёмок и практически не пригоден для нахождения величин $\gamma_4, \gamma_5, \ldots$. Многолетние поиски привели его к открытию осенью 1902 г. иного, более совершенного способа приближённого вычисления нулей $\zeta(s)$.

В основе нового метода лежало следующее простое соображение. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ – вещественная и, соответственно, мнимая части выражения $\zeta\bigl(\frac{1}{2}+it\bigr)$. Тогда

$$\zeta\bigl(\tfrac{1}{2}+it\bigr) \,=\, e^{-i\,\vartheta(t)}Z(t) \,=\, Z(t)(\cos\vartheta(t) \,-\, i\sin\vartheta(t)),$$

откуда $A(t) = Z(t)\cos\vartheta(t)$, $B(t) = -Z(t)\sin\vartheta(t)$. Рассмотрим те точки, в которых $B(t)$ обращается в нуль. Ими будут, во-первых, ординаты c_n всех нулей $\zeta(s)$, что лежат на критической прямой. Во-вторых, ими будут корни уравнения $\sin\vartheta(t) = 0$, то есть точки Грама t_n, являющиеся решениями уравнений $\vartheta(t_n) = (n-1)\pi$:

$$t_0 = 9.6669\ldots, \quad t_1 = 17.8456\ldots, \quad t_2 = 23.1703\ldots, \quad t_3 = 27.6702\ldots, \quad \ldots,$$

Таким образом, величина $\zeta\bigl(\frac{1}{2}+it_n\bigr)$ оказывается вещественным числом, причём

$$\zeta\bigl(\tfrac{1}{2}+it_n\bigr) \,=\, A(t_n) \,=\, Z(t_n)\cos\pi(n-1) \,=\, (-1)^{n-1}Z(t_n).$$

Пусть в двух соседних точках t_{n-1} и t_n функция $A(t)$ принимает значения одного знака. Тогда величины $Z(t_{n-1})$ и $Z(t_n)$ противоположны по знаку, что возможно лишь в случае, когда $Z(t)$ обращается в нуль между точками t_{n-1} и t_n нечётное число раз.

Убедившись с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена в выполнении неравенства $A(t_n) > 0$ для $n = 1, 2, \ldots, 15$, Грам смог доказать, что все нули $\zeta(s)$, ординаты которых не превосходят 66, лежат на критической прямой, и нашёл весьма точные приближения для величин $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{15}$.

Вычисления показывали, что каждый из промежутков Грама $(t_{n-1}, t_n]$, $n \leqslant 15$, содержит ровно один нуль $Z(t)$, причём $t_{n-1} < c_n < t_n$. Эта закономерность и получила впоследствии название “закон Грама”.

Далее в докладе предполагается дать краткий обзор исследований, связанных с законом Грама, а также обсудить ряд новых результатов, касающихся распределения ординат нулей $\zeta(s)$ и поведения аргумента $\zeta(s)$ на критической прямой.