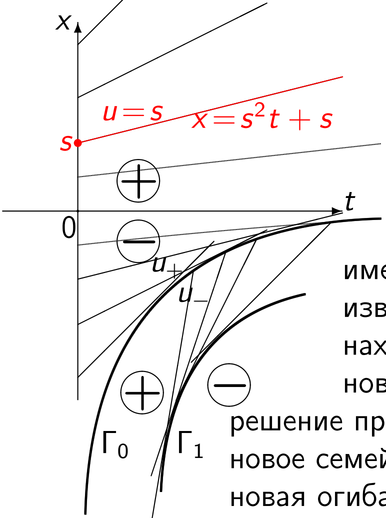
ПОСТРОЕНИЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ СКАЛЯРНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЕЖАНДРА

А. Ю. Горицкий
МГУ им. М. В. Ломоносова

доклад, посвященный 100-летию М.И.Вишика

Москва, 1 ноября 2021 г.

Задача Н. Х. Розова для семинаров



экон. поток мех-мата начала 90-х

$$\begin{cases} u_t + u^2 u_x = 0, \quad t > 0, \\ u\big|_{t=0} = x \end{cases}$$

характеристики

$$\dot{x} = u^2, \ \dot{u} = 0$$

семейство прямых

$$x = s^2 t + s$$

имеет огибающую $\Gamma_0 = \{xt = -1/4\}$

известен предел u_+ при подходе к Γ_0

находится предел u_- (условие Гюгонио)

новое начальное условие $u\big|_{\Gamma_0} = u_-$

решение продолжается в область $xt < -1/4$

новое семейство характеристик,

новая огибающая Γ_1, новое нач. усл. $u\big|_{\Gamma_1}$ и т.д.

получаем разрывное решение во всей полуплоскости $t > 0$

Обобщенные энтропийные решения

В полосе $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$, $0 < T \leqslant +\infty$, рассматривается задача Коши

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad f(u) \in C^1(\mathbb{R}), \qquad u|_{t=0} = u_0(x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}).$$

Определение [С.Н.Кружков]

Функция $u = u(t, x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Pi_T)$ называется обобщенным энтропийным решением (о.э.р.), если:

- для любой константы $k \in \mathbb{R}$ и для любой пробной функции $\varphi = \varphi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\varphi \geqslant 0$, выполнено
$$\int_{\Pi_T} [|u - k|\varphi_t + \operatorname{sign}(u - k)(f(u) - f(k))\varphi_x]\, dt\, dx \geqslant 0.$$
- $u(t, \cdot) \to u_0$ при $t \to 0+$ в пространстве $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Обобщенные энтропийные решения

Предложение

$u(t,x)$ — кусочно-гладкая в полосе Π_T функция
линии разрыва — кривые $x = \gamma(t) \in C^1((0,T))$.
$u(t,x)$ — обобщенное энтропийное решение $\iff$

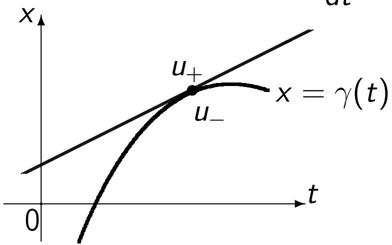
1. классическое решение в окрестности точек гладкости;
2. на каждой линии разрыва $x = \gamma(t)$ выполнено

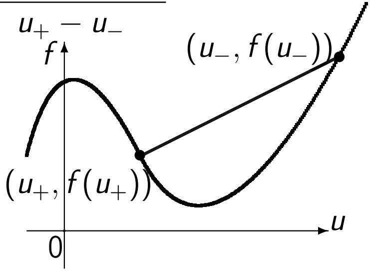
$$\dot{\gamma}(t) = \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}, \quad u_\pm(t) = \lim_{(\tau,\xi)\to(t,\gamma(t)\pm 0)} u(\tau,\xi)$$

3. график функции $f = f(u)$ на отрезке $[u_-, u_+]$ лежит **не ниже** хорды с концами $(u_\pm, f(u_\pm))$ в случае $u_- < u_+$, график функции $f = f(u)$ на отрезке $[u_+, u_-]$ лежит **не выше** хорды в случае $u_- > u_+$.

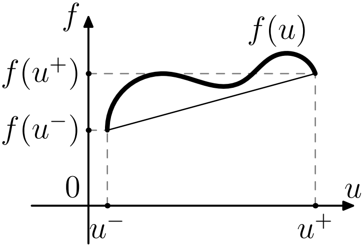
Условия на линиях разрыва

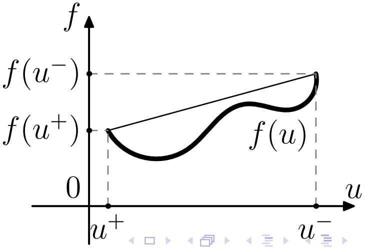
Условие Ранкина–Гюгонио $\dfrac{d\gamma}{dt} = \dfrac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-}$





Условие допустимости разрыва:





Обобщенные энтропийные решения

Общая теория обобщенных энтропийных решений уравнений с частными производными первого порядка была создана в работах Е.Хопфа, О.А.Олейник и (в наиболее полной форме) С.Н.Кружкова в 50–70-е годы XX-го века.

Начальные условия, как и сами решения, рассматривались в классе ограниченных измеримых функций.

Были доказаны существование, единственность, принцип максимума для ограниченных обобщенных энтропийных решений.

Все классические определения обобщенных решений легко переносятся и на класс локально ограниченных функций.

Обобщенные энтропийные решения

- *Олейник О. А.* О задаче Коши для нелинейных уравнений в классе разрывных функций // ДАН СССР. 1954. Т. 95. № 3. С. 451–454.
- *Олейник О. А.* Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12. № 3. С. 3–73.
- *Олейник О. А.* О единственности и устойчивости обобщенного решения задачи Коши для квазилинейного уравнения // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 165–170.
- *Кружков С. Н.* Обобщенные решения задачи Коши в целом для нелинейных уравнений первого порядка // ДАН СССР . 1969. Т. 187. № 1. С. 29–32.
- *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. 1970. Т. 81. № 2. С. 228–255.

Общепринято ли определение С.Н.Кружкова?

Общая идеология исследования задачи Коши

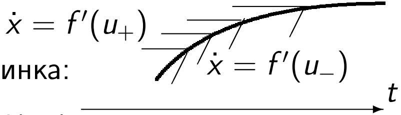
$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0, \quad t > 0, & f \in C^2(\mathbb{R}) \\ u\big|_{t=0} = u_0(x), & u_0 \in C^1(\mathbb{R}), \quad |u_0| \leqslant M \end{cases}$$

- классическое (т.е. гладкое) решение существует и единственно в некоторой полосе $0 < t < T$;
- при гладких начальных условиях может образовываться сильный разрыв;
- вводится понятие обобщённого решения в смысле интегрального тождества;
- кусочно-гладкие обобщённые решения — условие Ранкина–Гюгонио на разрывах;
- потеряна единственность решения задачи Коши в классе обобщённых решений

Вывод. Следует разрешать НЕ ВСЕ разрывы.

Общепринято ли определение С.Н.Кружкова?

Разрешенная картинка:



$$f'(u_-) > \frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = f'(\xi) > f'(u_+)$$

$f(u)$ **выпукла вниз** $\iff$ $\boxed{u_- > u_+}$

$f(u)$ **выпукла вверх** $\iff$ $\boxed{u_+ > u_-}$

$f(u)$ — невыпуклая, то картинки не достаточно

Вопрос

Является ли определение С.Н.Кружкова общепринятым?

https://www.idpoisson.fr/entropy-solutions-50/
Thematic online trimester and international conference
"Fifty Years of Kruzhkov Entropy Solutions, and Beyond"
October 6, 2020 — April 20, 2021

Общепринято ли определение С.Н.Кружкова?

А.П.Чугайнова (МИРАН, отдел механики)
доклад "Устойчивость структуры разрывов и единственность решений обобщенного уравнения Хопфа" (совм. с А.Г.Куликовским) на **этом** семинаре 16.10.2017 г.

уравнение с невыпуклой функцией потока $f(u) = u^4 - u^2$ строятся **другие** решения (хорда пересекает график)

Кружков — **метод исчезающей вязкости**
допустимы только те разрывы, которые можно получить как предел вязких решений, т.е. решений уравнения

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx}, \qquad \varepsilon \to +0$$

Куликовский–Чугайнова — **вязкость плюс дисперсия**:

$$u_t + (f(u))_x = \varepsilon u_{xx} + \mu u_{xxx}$$

Обобщенные энтропийные решения

Нас будут интересовать случаи
степенной функции состояния $f(u) = \frac{1}{\alpha}|u|^{\alpha-1}u$, $\alpha > 1$,
и неограниченных начальных условий.

Впервые решение такого рода задачи было построено
в 1999 для случая $f(u) = u^3/3$ и $u_0(x) = x$.
Это решение, определенное во всей полуплоскости $t > 0$,
имеет счетное число линий сильного разрыва и меняет
знак при переходе через каждую ударную волну.
Решение не удовлетворяет принципу максимума,
что может вести к неединственности.

В совместных работах с Пановым (1999, 2002) были
построены примеры неединственности решения задачи
Коши с нулевыми начальными условиями в классе
локально ограниченных функций.

Обобщенные энтропийные решения

- *Горицкий А. Ю.* Построение неограниченного энтропийного решения задачи Коши со счетным числом ударных волн // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 1999. № 2. С. 3–6.
- *Goritsky A. Yu., Panov E. Yu.* Example of nonuniqueness of entropy solutions in the class of locally bounded functions // Russ. J. Math. Phys. 1999. V. 6. № 4. P. 492–494.
- *Горицкий А. Ю., Панов Е. Ю.* О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. 2002. Т. 236. С. 120–133.

Обобщенные энтропийные решения

- *Гаргянц Л. В.* Локально ограниченные решения одномерных законов сохранения // Дифференциальные уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 481–489.
- *Gargyants L. V.* Example of nonexistence of a positive generalized entropy solution of a Cauchy problem with unbounded positive initial data // Russ. Jour. Math. Phys. 2017. V. 24, №3. P. 412–414.
- *Гаргянц Л. В.* О локально ограниченных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка со степенной функцией потока // Мат. заметки. 2018. Т. 104, № 2 С. 191–199.
- *Горицкий А. Ю., Гаргянц Л. В.* О неедиственности неограниченных решений задачи Коши для скалярных законов сохранения // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 2019. Вып. 32. С. 111–133.

Обобщенные энтропийные решения

Е. Ю. Пановым (2006) доказана теорема существования и единственности локально ограниченного обобщенного энтропийного решения (в общем случае многих пространственных переменных) в классе функций, удовлетворяющих ограничению на рост по пространственным переменным:

$$|u(t, x)| \leqslant C \cdot |x|^{1/(\alpha-1)}$$

Решения, которым посвящен доклад, выпадают из установленных Пановым классов корректности.

Обобщенные энтропийные решения

Панов Е. Ю. О классах корректности локально ограниченных обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 5. С. 175–188.

Лысухо П.В., Панов Е.Ю. О существовании и единственности неограниченных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных законов сохранения первого порядка // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47. № 1. С. 103–111.

Гаргянц Л. В., Горицкий А. Ю., Панов Е. Ю. Построение неограниченных разрывных решений скалярных законов сохранения при помощи преобразования Лежандра // Матем. сборник. 2021. Т. 212. № 4. С. 29–44.

Общий план построения решений

линии разрыва $\Gamma_n = \{x = \gamma_n(t), t > 0\}$, $\gamma_n \in C^1(\mathbb{R}_+)$

Предполагаем:

- $\forall t > 0 \quad \gamma_0(t) > \gamma_1(t) > \gamma_2(t) > \dots \to -\infty$,
- $\lim\limits_{t\to+0} \gamma_n(t) = -\infty$.

$u(t,x)$ — классическое решение

в областях $G_n = \{\gamma_{n-1}(t) > x > \gamma_n(t)\}$ и $G_0 = \{x > \gamma_0(t)\}$

Γ_n — ударные волны (линии сильного разрыва)

со стороны $x > \gamma_n(t)$ каждая кривая Γ_n является огибающей семейства характеристик из области G_n.

характеристики в G_n: $x = kt - g_n(k)$, $\quad g_n'' < 0$

по $g_n(k)$ решение в G_n однозначно восстанавливается

$$(t,x) \in G_n \quad \rightsquigarrow \quad k = f'(u)$$

Общий план построения решений

Семейство $x = kt - g_n(k)$, $g_n'' < 0$, имеет огибающую

$$\Gamma_n = \{x = \gamma_n(t), t > 0\},$$

$\gamma_n = \mathcal{L}(g_n)$ — преобразование Лежандра функции $g_n(k)$.

Кривую Γ_n мы будем считать линией сильного разрыва.

пусть решение $u(t.x)$ в G_n известно

$\Rightarrow$ знаем $u_+(t)$ — предел при подходе к Γ_n со стороны G_n

Ранкина–Гюгонио: $$\frac{f(u_+) - f(u_-)}{u_+ - u_-} = \dot\gamma(t) = f'(u_+)$$

$$f(u_-) = f(u_+) + f'(u_+) \cdot (u_- - u_+)$$

уравнение для нахождения u_-

Получаем отображение

$$\begin{array}{rcl} u_+ & \longrightarrow & u_- \\ \varphi_f : \quad k_+ = f'(u_+) & \longrightarrow & f'(u_-) = k_- \end{array}$$

Соотношения на ударных волнах

Характеристики $x = k_+ t - g_n(k_+)$ и $x = k_- t - g_{n+1}(k_-)$ пересекаются в некоторой точке $(t^*, \gamma_n(t^*)) \in \Gamma_n$.

$$k_+ t^* - g_n(k_+) = k_- t^* - g_{n+1}(k_-) = \gamma_n(t^*)$$

кривая Γ_n — огибающая семейства прямых $x = kt - g_n(k)$
функция $\gamma_n(t)$ — преобразование Лежандра от $g_n(k)$

$$t^* = g_n'(k_+)$$

$$g_{n+1}(k_-) = g_n(k_+) + g_n'(k_+) \cdot (k_- - k_+)$$

$$f(u_-) = f(u_+) + f'(u_+) \cdot (u_- - u_+)$$

Замечание

Условие допустимости разрыва выполнено автоматически из-за свойств выпуклости–вогнутости функции потока.

Преобразование Лежандра

Определение

Преобразованием Лежандра гладкой, выпуклой вверх функции $g(k)$, называется функция

$$\gamma(t) = \mathcal{L}(g)(t) := \inf_k (kt - g(k)).$$

Параметрическая запись:

$$t = g'(k), \qquad \gamma = k \cdot g'(k) - g(k).$$

В наших примерах $g(k)$ определены при $k > k_*$;
$\gamma(t)$ определены при $g'(+\infty) < t < g'(k_*)$.

Уравнение $t = g'(k)$ однозначно разрешимо на $(k_*; +\infty)$ в силу выпуклости функции $g(k)$.

Преобразование Лежандра

Теорема 1

Пусть семейство функций $g_n(k)$ таково что

1. $g_n(k)$ — бесконечно дифференцируемые, монотонно и неограниченно возрастающие, строго выпуклые вверх функции, определенные на $(k_*; +\infty)$;
2. $g_n'(k_* + 0) = +\infty, \quad g_n'(+\infty) = 0;$
3. $g_0(k) < g_1(k) < g_2(k) < \dots \to +\infty \quad \forall k > k_*.$

Тогда функции $\gamma_n = \mathcal{L}(g_n)$ определены на $(0; +\infty)$, бесконечно дифференцируемы, строго выпуклы вверх, и

$$\gamma_0(t) > \gamma_1(t) > \gamma_2(t) > \dots \to -\infty \quad \forall t > 0.$$

$$\sup_{t>0} \gamma_n'(t) = \lim_{t\to+0} \gamma_n'(t) = +\infty, \quad \inf_{t>0} \gamma_n'(t) = \lim_{t\to+\infty} \gamma_n'(t) = k_*.$$

Отображение $\varphi_f : k_+ \to k_-$

Определение

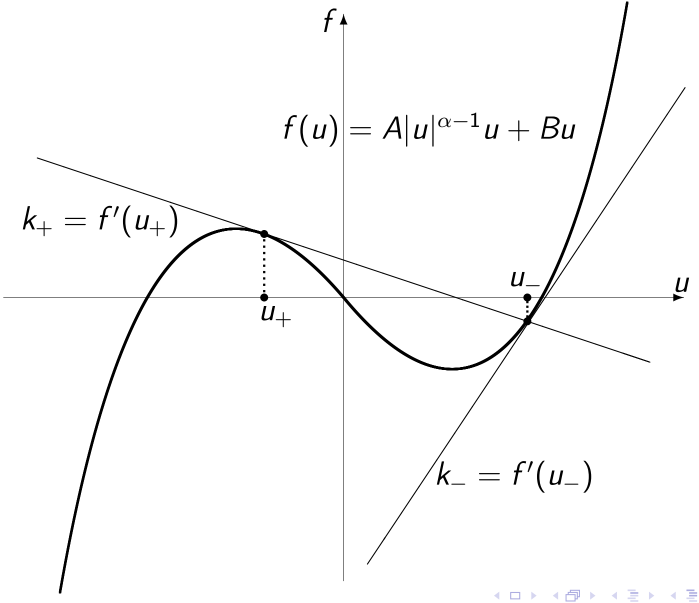
Гладкая функция $f(u)$ принадлежит классу $\mathcal{F}$, если

1. $f \in C^\infty(-\infty; 0) \cap C^\infty(0; +\infty)$, $\quad f(u)$ — нечетная;
2. $f'(u)$ строго монотонно убывает от $+\infty$ до $k_* = f'(0)$ на отрицательной полуоси, и, следовательно, возрастает от k_* до $+\infty$ на положительной полуоси.

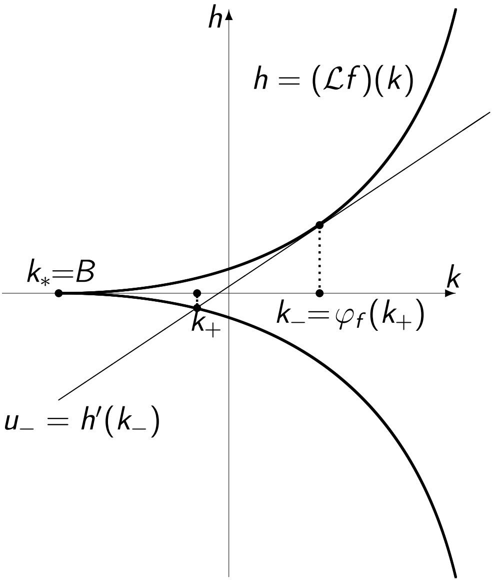
Для $f \in \mathcal{F}$ определим отображение $k_- = \varphi_f(k_+)$, $\varphi_f : (k_*; +\infty) \to (k_*; +\infty)$ за три шага:

1. разрешим относительно u_+ уравнение $f'(u_+) = k_+$;
2. разрешим относительно u_- уравнение $f(u_-) - f(u_+) = k_+(u_- - u_+)$;
3. зададим $k_- = \varphi_f(k_+) = f'(u_-)$.

Отображение $\varphi_f : k_+ \to k_-$



Отображение $\varphi_f : k_+ \to k_-$



Отображение $\varphi_f : k_+ \to k_-$

Замечание

Уравнение $f'(u_+) = k_+$ имеет по одному решению на отрицательной и положительной полуосях, но в силу нечетности функции $f(u)$ эти два значения дадут один и тот же результат.

Теорема

Если $f \in \mathcal{F}$, то отображение φ_f корректно определено, бесконечно дифференцируемо
и осуществляет диффеоморфизм луча $(k_*; +\infty)$ на себя, при этом $\varphi_f(k) > k$ для всех $k > k_*$.

Отображение $\varphi_f : k_+ \to k_-$

Пример 1. Положим $f(u) = Au^3$, $A > 0$. Тогда $k_* = 0$, $u_- = -2u_+$, и $k_- = \varphi_f(k_+) = 4k_+$.

Пример 2. Пусть $f(u) = Au^3 + Bu$, $A > 0$. Тогда $k_* = B$, $u_- = -2u_+$, $(k_- - B) = 4(k_+ - B)$, т.е. $\varphi_f(k) = 4k - 3B$.

Пример 3. Возьмем $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u$, $\alpha > 1$, $A > 0$. Тогда $k_* = 0$, $u_- = -\varkappa \cdot u_+$, $\varphi_f(k) = \varkappa^{\alpha-1}k$.

$\varkappa = \varkappa(\alpha) > 1$ — положительный корень уравнения

$$\varkappa^\alpha + 1 = \alpha\varkappa + \alpha$$

$\varkappa(2) = 1 + \sqrt{2}$ и $\varkappa(3) = 2$ (см. Пример 1)

Отображение $\varphi_f : k_+ \to k_-$

Пример 1. Положим $f(u) = Au^3$, $A > 0$. Тогда $k_* = 0$, $u_- = -2u_+$, и $k_- = \varphi_f(k_+) = 4k_+$.

Пример 2. Пусть $f(u) = Au^3 + Bu$, $A > 0$. Тогда $k_* = B$, $u_- = -2u_+$, $(k_- - B) = 4(k_+ - B)$, т.е. $\varphi_f(k) = 4k - 3B$.

Пример 3. Возьмем $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u$, $\alpha > 1$, $A > 0$. Тогда $k_* = 0$, $u_- = -\varkappa \cdot u_+$, $\varphi_f(k) = \varkappa^{\alpha-1}k$.

Пример 4. Пусть $f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u + Bu$, $\alpha > 1$, $A > 0$. Тогда $k_* = B$, $u_- = -\varkappa \cdot u_+$ с той же константой $\varkappa$,

$$\varphi_f(k) = \varkappa^{\alpha-1}k - B\left(\varkappa^{\alpha-1} - 1\right)$$

Основная теорема

Теорема 2

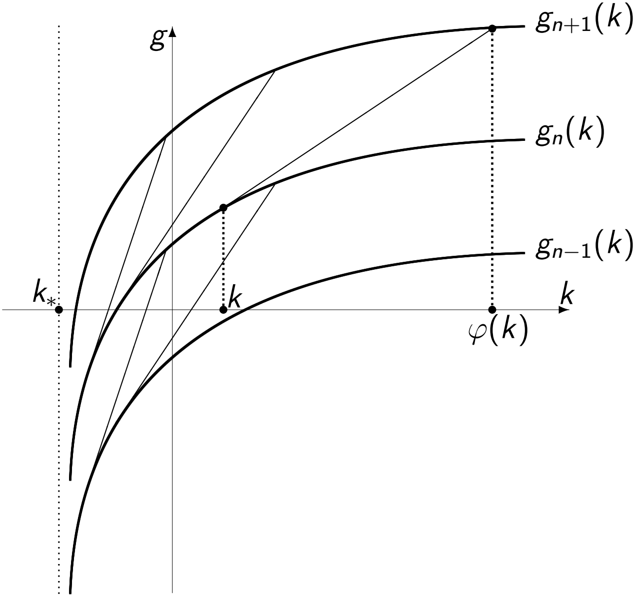
Пусть $f(u) \in \mathcal{F}$, $f'(0) = k_*$,
диффеоморфизм $\varphi = \varphi_f : (k_*; +\infty) \to (k_*; +\infty)$.
Пусть последовательность функций $g_n(k)$, $k \in (k_*; +\infty)$,
удовлетворяет условиям Теоремы 1
и рекуррентному соотношению

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k).$$

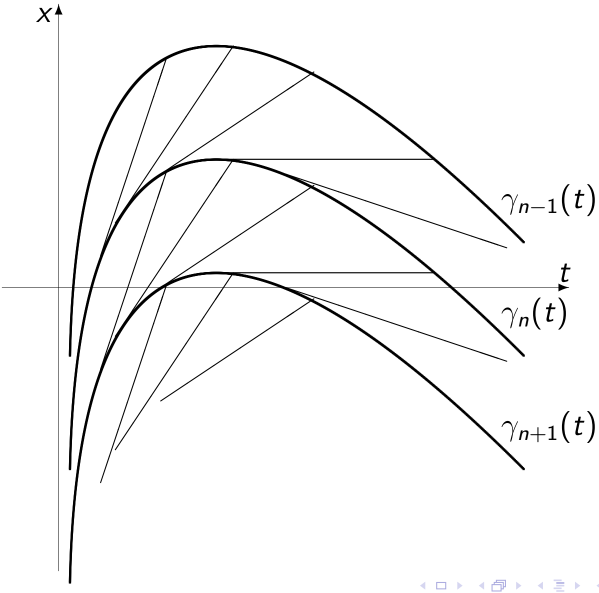
Тогда существует обобщенное энтропийное решение $u(t, x)$
задачи Коши с $u_0(x) = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x)$.

Если множество значений функции $-g_0$ составляет не всю ось, а луч $x < x_* = -g_0(k_* + 0)$, то следует доопределить начальное условие, например, $u_0(x) \equiv 0$ при $x \geqslant x_*$.

Основная теорема



Основная теорема



Основная теорема

Построенное решение $u(t, x)$

- определено во всей полуплоскости $t > 0$
- локально ограничено в ней
- имеет счетное число линий разрыва Γ_n, являющихся графиками функций $x = \gamma_n(t) = (\mathcal{L}g_n)(t)$

Между двумя соседними линиями разрыва функция $u(t, x)$ является либо положительной, либо отрицательной, меняя знак при переходе через каждый разрыв.

О начальном условии $u_0 = \pm(-g_0 \circ f')^{-1}(x)$

$f' \colon \mathbb{R}_+ \to (k_*, +\infty), \quad g_0 \colon (k_*, +\infty) \to (-x_*, +\infty)$

— монотонно и неограниченно возрастающие функции

$$\begin{aligned} (-g_0 \circ f') \colon &\qquad \mathbb{R}_+ \to (-\infty, x_*) \\ (-g_0 \circ f')^{-1} \colon &\qquad (-\infty, x_*) \to \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t + f'(u) u_x = 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} (-g_0 \circ f')^{-1}(x), & x < x_* \\ 0, & x \geqslant x_* \end{cases} \end{cases}$$

начальное условие $u_0(x)$

— неограниченная **неотрицательная** функция,

построенное решение $u(t,x)$ — **знакопеременное**

Есть ли у этой задачи **неотрицательные** решения?

Несуществование знакопостоянного решения

$$\begin{cases} u_t + f'(u)u_x = 0 \\ u\big|_{t=0} = u_0(x) = \begin{cases} (-g_0 \circ f')^{-1}(x), & x < x_*, \\ \quad 0, & x \geqslant x_*, \end{cases} \quad u_0(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Теорема 3

Пусть выполнено $\quad g_0(f'(u)) = o(f(u)/u), \quad u \to +\infty.$
Тогда не существует **неотрицательного обобщенного энтропийного** решения указанной задачи Коши.

Во всех примерах (со следующего слайда):

- $f(u)$ — степенная функция $\quad\Longrightarrow$
$f'(u)$ и $f(u)/u$ имеют один порядок роста при $u \to +\infty$;
- $g_0 = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1,$ или $g_0 = \ln k$
$\Longrightarrow \quad g_0(k) = o(k), \quad k \to +\infty$

$\Longrightarrow$ условие Теоремы 3 будет выполнено

Примеры

Пример 1

$f(u) = u^3/3$, $\varphi(k) = 4k$, $\varphi\colon (0;+\infty) \to (0;+\infty)$.
Положим $g_0(k) = \sqrt{k}$. Тогда $g_n(k) = C_n\sqrt{k}$.

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

$$2C_{n+1}\sqrt{k} = C_n\sqrt{k} + \frac{C_n}{2\sqrt{k}}(4k - k) = \frac{5}{2}C_n\sqrt{k} \quad\Rightarrow\quad C_n = \left(\frac{5}{4}\right)^n$$

Γ_n — ветви гипербол $x = -\dfrac{C_n^2}{4t}$ (пр-е Лежандра от $C_n\sqrt{k}$)

$$-g_0 \circ f'(u) = -\sqrt{u^2} = -|u| \quad\Rightarrow\quad u_0(x) = \pm x \quad (\text{при } x < 0)$$

$$x = kt - C_n\sqrt{k}, \quad k = f'(u) = u^2 \quad\Rightarrow\quad \text{явная формула}$$

$$u(t,x) = \mp\begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4xt}}{2t}, & -C_0^2 = -1 < 4tx < 0, \\ (-1)^n\dfrac{C_n + \sqrt{C_n^2 + 4xt}}{2t}, & -C_n^2 < 4tx < -C_{n-1}^2 \end{cases}$$

Примеры

Пример 2

$f(u) = A|u|^{\alpha-1}u, \quad \alpha > 1, \quad A > 0, \quad \varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1} \cdot k.$
Положим $g_0(k) = k^\sigma, \quad 0 < \sigma < 1.$ Тогда $g_n(k) = C_n k^\sigma$.

линии разрыва:

$$\Gamma_n = \{x = \eta_n \cdot t^{-\gamma}\}, \quad \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{-\gamma} = 1, \text{ т.е. } \gamma = \frac{\sigma}{1-\sigma} > 0$$

начальное условие: $u_0(x) = \pm c|x|^\beta$ (при $x < 0$)

$$\beta = 1/(\sigma(\alpha - 1)) > 0, \quad c = (\alpha A)^{-1/(\alpha-1)}$$

Построенное решение удовлетворяет при $x \leqslant 0$, $t > 0$

$$|u(t,x)| \leqslant C \cdot \left(\frac{|x|}{t}\right)^{1/(\alpha-1)},$$

хотя начальные условия $|u_0(x)| \sim |x|^\beta, \quad \beta > 1/(\alpha - 1)$.

Примеры

Пример 3

$f(u) = u^3/3, \quad \varphi(k) = 4k, \quad \varphi\colon (0;+\infty) \to (0;+\infty).$
Положим $g_0(k) = \ln k$. Тогда $g_n(k) = \ln k + C_n$.

$$g_{n+1}(\varphi(k)) = g_n(k) + g_n'(k)(\varphi(k) - k)$$

$$\ln 4k + C_{n+1} = \ln k + C_n + \frac{1}{k}(4k - k) = \ln k + C_n + 3$$

$$\Longrightarrow \quad C_n = (3 - 2\ln 2)\cdot n$$

линии разрыва: Γ_n — кривые $x = \ln t + 1 - C_n$

начальное условие: $-g_0 \circ f'(u) = -\ln u^2 = -2\ln|u|$

$$\Longrightarrow \quad u_0(x) = (-g_0 \circ f')^{-1}(x) = \pm e^{-x/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Построенное решение удовлетворяет

$$|u(t,x)| \leqslant 2\,t^{-1/(\alpha-1)}$$

то есть является **ограниченным** в области $t > \tau > 0$.

Примеры

Пример 4

$f(u) = A\,|u|^{\alpha-1}\,u + Bu, \quad \alpha > 1, \quad A > 0$
$\varphi(k) = \varkappa^{\alpha-1}(k - B) + B, \quad \varphi\colon (B;+\infty) \to (B;+\infty)$
Положим $\quad g_0(k) = (k - B)^\sigma \quad$ или $\quad g_0(k) = \ln\,(k - B)$.
Тогда $\quad g_n(k) = C_n\,(k - B)^\sigma \quad$ или $\quad g_n(k) = \ln\,(k - B) + C_n$.

отличие от предыдущих примеров:

$$k_* = f'(0) = \inf f' = B \neq 0$$

линии разрыва:

- в первом случае $\quad x = \mathrm{const}\cdot t^{-\sigma/(1-\sigma)} + Bt$
- во втором случае $\quad x = \ln t + 1 - C_n + Bt$

начальные условия от B не зависят

меняется наклон линий разрыва при $t \to +\infty$:

$$\lim_{t\to+\infty} \dot\gamma_n(t) = B \neq 0$$

Спасибо!

Спасибо за внимание!