Конденсационные методы вычисления определителей: идея и ретроспектива

Перязев Николай Алексеевич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

декабрь 2021

Математическое просвещение. Выпуск 3. 1958. С 194.

НОВЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Хотя описание этого метода несколько многословно, но им очень удобно пользоваться — так утверждает, ссылаясь на свой вычислительный опыт, Р. Макмиллан (в заметке, опубликованной в Journal of the Royal Aeronautical Society, т. 59, 1955, стр. 772—773).

Главное преимущество этого метода перед всеми другими заключается в том, что он состоит в последовательном и однообразном выполнении одной и той же элементарной операции: вычисления определителя второго порядка и деления его на заранее подготовленное число — поэтому ошибка при вычислениях становится маловероятной. Этот метод легко усвоить и запомнить. Вот он:

1°. В определителе n-го порядка — возьмем для примера определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \\ 5 & -7 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

— вычислим каждый минор второго порядка, элементы которого принадлежат каким-либо двум соседним строкам и двум соседним столбцам; полученное число впишем в ***центр*** *этого минора (т. е. на пол-интервала правее и пол-интервала ниже главного элемента минора). Мы получим таблицу*

$$\begin{pmatrix} 2 & & -2 & & 0 & & 0 \\ & \mathbf{2} & & \mathbf{-6} & & \mathbf{0} & \\ 4 & & -3 & & 3 & & 1 \\ & \mathbf{8} & & \mathbf{-18} & & \mathbf{-22} & \\ 0 & & 2 & & 4 & & -6 \\ & \mathbf{-10} & & \mathbf{24} & & \mathbf{-12} & \\ 5 & & -7 & & -2 & & 0 \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будет играть роль только «внутренняя таблица»:

$$\begin{pmatrix} 2 & & -6 & & 0 \\ & -3 & & 3 & \\ 8 & & -18 & & -22 \\ & 2 & & 4 & \\ -10 & & 24 & & -12 \end{pmatrix}.$$

В этой таблице снова вычислим каждый минор второго порядка (элементы которого принадлежат каким-либо двум соседним строкам и столбцам) и впишем в центр такого минора его значение, ***разделенное на уже расположенное в центре минора число.*** *Мы получим внутреннюю таблицу:*

$$\begin{pmatrix} -4 & & 44 \\ & -18 & \\ 6 & & 186 \end{pmatrix}.$$

Мы продолжим этот однообразный процесс, не забывая делить всякий раз полученное значение минора второго порядка на число, стоящее в его центре (оставшееся от предыдущей таблицы).

Выполнив, наконец, такое вычисление для последнего минора второго порядка, мы получим значение исходного определителя. В рассматриваемом примере

$$\begin{vmatrix} -4 & 44 \\ 6 & 186 \end{vmatrix} : -18 = 56.$$

Описанный метод весьма экономен с точки зрения количества выполняемых действий. Существенно и то, что его легко программировать на автоматических цифровых машинах.

А. Л.

Charles Lutwidge Dodgson (Lewis Carroll)
Чарлз Латвидж Доджсона (Льюис Кэрролл)
(1832 – 1898)

Математик, логик, писатель, фотограф, дьякон, шахматист.

1. Подни Дж. Кэрролл и его мир. М. 1982.
2. Демурова Н.М. Льюис Кэрролл. Портрет из Зазеркалья, или Правда о стране чудес. М. 2019.

1865 – Алиса в стране чудес.
1871 – Сквозь Зеркало и что там увидела Алиса (Алиса в Зазеркалье).
1876 – Охота на Снарка.

Профессор математики Оксфордского университета (1855 – 1881).

Книги по математике

1866 – Сведения из теории детерминантов.
1867 – Элементарное руководство по теории детерминантов.

1858 – Алгебраический разбор Пятой книги Евклида.
1879 – Евклид и его современные соперники.
1881 – Первая и Вторая книга Евклида.

1885 – История с узелками. (1973 – русский перевод).
1887 – Логическая игра. (1991 – русский перевод).
1888 – Математические курьезы. Ч. 1.(1973 – русский перевод)
1893 – Математические курьезы. Ч. 2. (1973 – русский перевод)
1896 – Символическая логика. Ч. 1. (1973 – русский перевод).

Публикации по методу конденсации

1. Charles L. Dodgson, Condensation of determinants, being a new and brief method for computing their arithmetical values, in: Proceedings of the Royal Society XV, 1866, pp. 150–155. [Reprint 1, pp. 170-180].
Русский перевод.
Малашонок Г.И. Матричные методы вычислений в коммутативных кольцах.Тамбов. Изд-во ТГУ. 2002, 214 с. (С.194-202)

2. Charles L. Dodgson, An Elementary Treatise on Determinants with Their Application to Simultaneous Linear Equations and Algebraical Geometry, Macmillan, London, 1867, 143 p.

Presented to the Radcliffe Library,
Oxford, by the Author. May 16. 1870.

AN

ELEMENTARY TREATISE

ON

DETERMINANTS

WITH THEIR APPLICATION TO

SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS
AND ALGEBRAICAL GEOMETRY.

BY

CHARLES L. DODGSON, M.A.
STUDENT AND MATHEMATICAL LECTURER OF CHRIST CHURCH, OXFORD.

London:
MACMILLAN AND CO.
1867.

Приложение II. Арифметические вычисления определителей.
Приложение III. Алгебраическое доказательство метода конденсации.
Приложение IV. Приложение метода конденсации для нахождения решений линейных уравнений.

An improved version of Appendices II, III, IV,
will I hope be shortly published.

C. L. D.
May 16. 1876.

APPENDIX II.

ARITHMETICAL COMPUTATION OF DETERMINANTS.

«Надеюсь, скоро будет опубликована улучшенная версия приложений II, III,IV. C.L.D. 16 мая 1876.»

Метод конденсации Доджсона (1866)

Пусть $A = (a_{i,j})$ квадратная матрица n-го порядка. Определим последовательность матриц $A_0, A_1, \ldots, A_q, \ldots, A_{n-1}$ следующим образом:

$A_0 = (a^0_{i,j})$, где $a^0_{i,j} = a_{i,j}$, при $1 \le i, j \le n$;

$$A_1 = (a^1_{i,j}),\ \text{где } a^1_{i,j} = \begin{vmatrix} a^0_{i,j} & a^0_{i,j+1} \\ a^0_{i+1,j} & a^0_{i+1,j+1} \end{vmatrix},\ \text{при } 1 \le i, j \le n-1;$$

$$A_q = (a^q_{i,j}),\ \text{где } a^q_{i,j} = \frac{1}{a^{q-2}_{i+1,j+1}} \cdot \begin{vmatrix} a^{q-1}_{i,j} & a^{q-1}_{i,j+1} \\ a^{q-1}_{i+1,j} & a^{q-1}_{i+1,j+1} \end{vmatrix},$$

при $1 \le i, j \le n-q$, для $2 \le q \le n-1$.

Тогда $|A| = |A_{n-1}| = a^{n-1}_{1,1}$.

Пример вычисления определителя методом Доджсона

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ -1 & -\mathbf{3} & \mathbf{2} & -\mathbf{2} & 0 \\ -3 & -\mathbf{2} & \mathbf{2} & -\mathbf{1} & 1 \\ -2 & \mathbf{3} & -\mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -6 & -2 & 4 \\ -7 & -\mathbf{2} & \mathbf{2} & -2 \\ -13 & -\mathbf{4} & \mathbf{3} & -2 \\ 6 & 0 & -1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & -8 & 2 \\ -1 & \mathbf{1} & -2 \\ 8 & -4 & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 & & -2 & & 3 & & 2 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ -1 & & -3 & & 2 & & -2 & & 0 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ -3 & & -2 & & 2 & & -1 & & 1 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ -2 & & 3 & & -1 & & 2 & & 0 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ 0 & & -3 & & 1 & & -1 & & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 & & -6 & & -2 & & 4 \\ & -3 & & 2 & & -2 & \\ -7 & & -2 & & 2 & & -2 \\ & -2 & & 2 & & -1 & \\ -13 & & -4 & & 3 & & -2 \\ & 3 & & -1 & & 2 & \\ 6 & & 0 & & -1 & & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12 & & -8 & & 2 \\ & -2 & & 2 & \\ -1 & & 1 & & -2 \\ & -4 & & 3 & \\ 8 & & -4 & & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & & 7 \\ & 1 & \\ 1 & & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

Приложения для решения систем линейных уравнений

$$
\begin{array}{ccccccc}
- & + & - & + & - & + & \\
x & +2y & +z & -u & +2v & +2 & =0 \\
x & -y & -2z & -u & -v & -4 & =0 \\
2x & +y & -z & -2u & -v & -6 & =0 \\
x & -2y & -z & -u & +2v & +4 & =0 \\
2x & -y & +2z & +u & -3v & -8 & =0
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & -6 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -3 & -8 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 & 3 & -6 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 2 \\ -5 & -3 & -1 & -5 & 8 \\ 3 & -5 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 6 & -6 & 8 & -2 \\ -17 & 8 & -4 & 6 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 0 & 12 & 12 \\ 18 & 40 & -8 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 36 & -72 \end{vmatrix}
$$

$$\therefore -36x = -72$$

$$x = 2$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 12 & 12 \end{vmatrix}
$$

$$\therefore 12y = 12$$

$$y = 1$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 6 & 6 \end{vmatrix}
$$

$$\therefore -6z = 6$$

$$z = -1$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{vmatrix} 3 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$\therefore 3u = 3$$

$$u = 1$$

$$
\begin{vmatrix} 2 & 4 \end{vmatrix}
$$

$$\therefore -2v = 4$$

$$v = -2$$

Проблема нулей в методе Доджсона

При нахождении матриц в последовательности Доджсона может возникнуть вариант деления на нуль.Что делать?

1) Можно в первоначальной матрице сделать элементарные преобразования, так чтобы деления на ноль не возникло. Доджсон предлагает делать циклическую перестановку строк (или столбцов), при этом придется пересчитывать только одну строку (столбец). Но это не всегда проходит.
2) Можно некоторые элементы в первоначальной матрице заменить на формальные символы и далее выполнять действия с формальными многочленами, а в конце вычислений сделать обратную замену. Сложность этого метода в том, что вместо числовых вычислений приходиться применять символьные вычисления.

(Ricardo S. Vieira. A New Algorithm for Determinant Evaluation – The Reduction Method, arXiv:1012.1790v3 [math.CO] 10Dec 2010. 10 p.)

Об обосновании метода Доджсона

Доджсон пишет, что доказательство обоснования метода основано на известной теореме об определителях.
Он использует тождество:

$$M \cdot M_{-1,-n}^{-1,-n} = M_{-1}^{-1} \cdot M_{-n}^{-n} - M_{-n}^{-1} \cdot M_{-1}^{-n}$$

Это тождество называют тождеством Доджсона и оно является частным случаем тождества Якоби (Jacobi, 1833).
Далее в работе Доджсон приводит доказательство только для определителей порядка 3 и 4, замечая, что для больших порядков доказательство аналогично.

Felice (Félix) Chiò
Феличе (Феликс) Чио (1813–1871)

В 1846 году представил доклад Академии наук в Париже, о чем сообщалось в Comptes Rendus (v. XXIII, № 10, 1846 г.), который был опубликован в 1853 г. в виде двух мемуаров под названием «Recherches sur la série de Lagrange».
В 1846 году преподавал математику в Туринской военной академии.
В 1854 году стал заведующим кафедры высшей физики военной академии, а также профессором математической физики в Туринском университете.

(Francine F. Abeles. Chiò's and Dodgson's determinantal identities. Linear Algebra and its Applications. 454 (2014), pp. 130-137.)

Метод конденсации Чио (1853)

Chió, F. «Mémoire sur les fonctions connues sous le nom de résultantes ou de déterminants». Turin: E. Pons, 1853, 32 p.

Пусть $A = (a_{i,j})$ квадратная матрица n-го порядка, $a_{1,1} \neq 0$ и матрица $(n-1)$-го порядка $B = (b_{i,j})$ определена так:

$$b_{i,j} = A_{1,i+1}^{1,j+1} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,j+1} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}.$$

$$\text{Тогда} \qquad |A| = \frac{1}{a_{1,1}^{n-2}} \cdot |B|.$$

Как заметил Д. Кнут, это тождество при $n = 3$ было известно еще Лагранжу (Lagrange, 1772).

Пример вычисление определителя метод Чио

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2^3} \cdot \begin{bmatrix} A_{1,2}^{1,2} & A_{1,2}^{1,3} & A_{1,2}^{1,4} & A_{1,2}^{1,5} \\ A_{1,3}^{1,2} & A_{1,3}^{1,3} & A_{1,3}^{1,4} & A_{1,3}^{1,5} \\ A_{1,4}^{1,2} & A_{1,4}^{1,3} & A_{1,4}^{1,4} & A_{1,4}^{1,5} \\ A_{1,5}^{1,2} & A_{1,5}^{1,3} & A_{1,5}^{1,4} & A_{1,5}^{1,5} \end{bmatrix} = \frac{1}{2^3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -4 \\ 4 & -3 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \\ -6 & 13 & 0 & 13 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 & 12 \\ -3 & 13 & 0 & 13 \end{vmatrix} = \frac{1}{(1)^2} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & 12 \\ 16 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-5)^1} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -60 \\ -48 & 13 \end{vmatrix} = 550.$$

Обобщенный метод конденсации Чио (Метод Сильвестра)

Пусть $A = (a_{ij})$ квадратная матрица n-го порядка, минор $A^{s_1,\dots,s_k}_{r_1,\dots,r_k} \neq 0$ и матрица (n-k)-го порядка B определена так:

$$B = \left(A^{s_1,\dots,j,\dots,s_k}_{r_1,\dots,i,\dots,r_k} \right),$$

где элементы B это окаймляющие миноры минора $A^{s_1,\dots,s_k}_{r_1,\dots,r_k}$ упорядоченные по индексам лексикографически.

$$\text{Тогда} \qquad |A| = \frac{1}{(A^{s_1,\dots,s_k}_{r_1,\dots,r_k})^{n-k-1}} |B|.$$

Это известное тождество Сильвестра (Sylvester, 1851), а использованное в методе Чио тождество получается из этого тождества в случае рассмотрения минора A^1_1.

Пример: обобщенный метод Чио при $k = 1$

Отметим, что при выборе минора A_1^1 получается стандартный метод Чио. Но лучше выбирать элемент на степень который проще выполнять деление.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{1^3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & 6 & -7 \\ -2 & \boxed{\text{-1}} & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 9 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^2} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 6 & -13 \\ 10 & -4 & 7 \\ \boxed{\text{-1}} & -9 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{(-1)^1} \cdot \begin{vmatrix} 96 & -13 \\ -94 & 7 \end{vmatrix} = 550$$

Пример: обобщенный метод Чио при $k = 2$

Вычислим $|A|$ по минору $A^{1,3}_{2,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ \boxed{0} & 2 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\left(A^{1,3}_{2,3}\right)^2} \cdot \begin{vmatrix} A^{1,2,3}_{1,2,3} & A^{1,3,4}_{1,2,3} & A^{1,3,5}_{1,2,3} \\ A^{1,2,3}_{2,3,4} & A^{1,3,4}_{2,3,4} & A^{1,3,5}_{2,3,4} \\ A^{1,2,3}_{2,3,5} & A^{1,3,4}_{2,3,5} & A^{1,3,5}_{2,3,5} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^2} \cdot \begin{vmatrix} -10 & 6 & -13 \\ 10 & -4 & 7 \\ -1 & -9 & 0 \end{vmatrix} = 550.$$

Пример: обобщенный метод Чио при $k = 3$

Вычислим $|A|$ по по минору $A^{1,2,3}_{2,3,5} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & -2 \\ \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ \boxed{-3} & \boxed{-3} & \boxed{2} & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\left(A^{1,2,3}_{2,3,5}\right)^1} \cdot \begin{vmatrix} A^{1,2,3,4}_{1,2,3,5} & A^{1,2,3,5}_{1,2,3,5} \\ A^{1,2,3,4}_{2,3,4,5} & A^{1,2,3,5}_{2,3,4,5} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-1)^1} \cdot \begin{vmatrix} 96 & -13 \\ -94 & 7 \end{vmatrix} = 550.$$

Обобщенный метод конденсации Доджсона

Биматрица это структура вида:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ & b_{1,1} & & b_{1,2} & & & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ & b_{2,1} & & b_{2,2} & & & \\ a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & & a_{n,2} & & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Определитель $\left|\hat{A}\right|$ вычисляется процедурой Доджсона.

Если $\hat{A}$ такая, что все $b_{i,j} = 1$, то $\left|\hat{A}\right| = \left|A\right|$.

Пусть $\hat{A}$ биматрица n-го порядка.
Тогда для любого $1 \leq k \leq n-2$ выполняется:

$$|\hat{A}| = \begin{vmatrix}
\hat{A}^{1,\dots,k+1}_{1,\dots,k+1} & & \hat{A}^{2,,\dots,k+2}_{1,\dots,k+1} & & \hat{A}^{3,\dots,k+3}_{1,\dots,k+1} & \dots & \hat{A}^{n-k,\dots,n}_{1,\dots,k+1} \\
& \hat{A}^{2,\dots,k+1}_{2,\dots,k+1} & & \hat{A}^{3,\dots,k+2}_{2,\dots,k+1} & & & \\
\hat{A}^{1,\dots,k+1}_{2,\dots,k+2} & & \hat{A}^{2,\dots,k+2}_{2,\dots,k+2} & & \hat{A}^{3,\dots,k+3}_{2,\dots,k+2} & \dots & \hat{A}^{n-k,\dots,n}_{2,\dots,k+2} \\
& \hat{A}^{2,\dots,k+1}_{3,\dots,k+2} & & \hat{A}^{3,\dots,k+2}_{3,\dots,k+2} & & & \\
\hat{A}^{1,\dots,k+1}_{3,\dots,k+3} & & \hat{A}^{2,\dots,k+2}_{3,\dots,k+3} & & \hat{A}^{3,\dots,k+3}_{3,\dots,k+3} & \dots & \hat{A}^{n-k,\dots,n}_{3,\dots,k+3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\hat{A}^{1,\dots,k+1}_{n-k,\dots,n} & & \hat{A}^{2,\dots,k+2}_{n-k,\dots,n} & & \hat{A}^{3,\dots,k+3}_{n-k,\dots,n} & \dots & \hat{A}^{n-k,\dots,n}_{n-k,\dots,n}
\end{vmatrix}$$

где $\hat{A}^{j_1,\dots,j_s}_{i_1,\dots,i_s}$ – миноры биматрицы $\hat{A}$, образованные строками $i_1, ..., i_s$ и столбцами $j_1, ..., j_s$.

$$
\begin{aligned}
|A| &= \left|\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 0 & & -2 & & 3 & & 2 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
-1 & & -3 & & 2 & & -2 & & 0 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
-3 & & -2 & & 2 & & -1 & & 1 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
-2 & & 3 & & -1 & & 2 & & 0 \\
 & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
0 & & -3 & & 1 & & -1 & & -3
\end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{ccccccc}
-3 & & -6 & & -2 & & 4 \\
 & -3 & & 2 & & -2 & \\
-7 & & -2 & & 2 & & -2 \\
 & -2 & & 2 & & -1 & \\
-13 & & -4 & & 3 & & -2 \\
 & 3 & & -1 & & 2 & \\
6 & & 0 & & -1 & & -6
\end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{ccccc}
12 & & -8 & & 2 \\
 & -2 & & 2 & \\
-1 & & 1 & & -2 \\
 & -4 & & 3 & \\
8 & & -4 & & -10
\end{array}\right| = \\
&= \left|\begin{array}{ccc}
-2 & & 7 \\
 & 1 & \\
1 & & -6
\end{array}\right| = \\
&= \left|5\right|
\end{aligned}
$$

Вычисление определителя биматрицы порядка $n = 3$

Разложение по 2-ой строке:

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} \\ & b_{1,1} & & b_{1,2} & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} \\ & b_{2,1} & & b_{2,2} & \\ a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} \end{array}\right| = \frac{a_{1,2}a_{2,1}a_{2,3}a_{3,2}}{b_{1,1}b_{1,2}b_{2,1}b_{2,2}} \cdot \left|\begin{array}{ccc} b_{1,1} & & b_{1,2} \\ & -a_{2,2} & \\ b_{2,1} & & b_{2,2} \end{array}\right| - \frac{1}{b_{1,1}b_{1,2}b_{2,1}b_{2,2}} \cdot$$

$$\cdot \left(a_{2,1} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,2}a_{3,3} & a_{1,3}a_{3,2} \\ b_{1,1}b_{2,2} & b_{1,2}b_{2,1} \end{vmatrix} - a_{2,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{3,3} & a_{1,3}a_{3,1} \\ b_{1,1}b_{2,2} & b_{1,2}b_{2,1} \end{vmatrix} + a_{2,3} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{3,2} & a_{1,2}a_{3,1} \\ b_{1,1}b_{2,2} & b_{1,2}b_{2,1} \end{vmatrix} \right).$$

Разложение по 2-му столбцу:

$$\left|\begin{array}{ccccc} a_{1,1} & & a_{1,2} & & a_{1,3} \\ & b_{1,1} & & b_{1,2} & \\ a_{2,1} & & a_{2,2} & & a_{2,3} \\ & b_{2,1} & & b_{2,2} & \\ a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} \end{array}\right| = \frac{a_{1,2}a_{2,1}a_{2,3}a_{3,2}}{b_{1,1}b_{1,2}b_{2,1}b_{2,2}} \cdot \left|\begin{array}{ccc} b_{1,1} & & b_{1,2} \\ & -a_{2,2} & \\ b_{2,1} & & b_{2,2} \end{array}\right| - \frac{1}{b_{1,1}b_{1,2}b_{2,1}b_{2,2}} \cdot$$

$$\cdot \left(a_{1,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{2,1}a_{3,3} & a_{2,3}a_{3,1} \\ b_{1,1}b_{2,2} & b_{1,2}b_{2,1} \end{vmatrix} - a_{2,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{3,3} & a_{1,3}a_{3,1} \\ b_{1,1}b_{2,2} & b_{1,2}b_{2,1} \end{vmatrix} + a_{3,2} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1}a_{2,3} & a_{1,3}a_{2,1} \\ b_{1,1}b_{2,2} & b_{1,2}b_{2,1} \end{vmatrix} \right).$$

Обобщенный метод Доджсона при $k = 1$

В этом случае получается стандартный метод Доджсона.

$$|\hat{A}| = \cdot \begin{vmatrix} \hat{A}^{1,2}_{1,2} & & \hat{A}^{2,3}_{1,2} & & \hat{A}^{3,4}_{1,2} & \dots & \hat{A}^{n-1,n}_{1,2} \\ & \hat{A}^{2}_{2} & & \hat{A}^{3}_{2} & & & \\ \hat{A}^{1,2}_{2,3} & & \hat{A}^{2,3}_{2,3} & & \hat{A}^{3,4}_{2,3} & \dots & \hat{A}^{n-1,n}_{2,3} \\ & \hat{A}^{2}_{3} & & \hat{A}^{3}_{3} & & & \\ \hat{A}^{1,2}_{3,4} & & \hat{A}^{2,3}_{3,4} & & \hat{A}^{3,4}_{3,4} & \dots & \hat{A}^{n-1,n}_{3,4} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{A}^{1,2}_{n-1,n} & & \hat{A}^{2,3}_{n-1,n} & & \hat{A}^{3,4}_{n-1,n} & \dots & \hat{A}^{n-1,n}_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

так как $\hat{A}^{j}_{i} = a_{i,j}$.

Обобщенные методы Доджсона и Чио при $k = n - 2$

Обобщенный метод Доджсона при $k = n - 2$ и обобщенный метод Чио при $k = n - 2$ и центральном выборе минора, очевидно, совпадают.

$$\hat{A}_{n-2} = \begin{bmatrix} A_{1,\dots,n-1}^{1,\dots,n-1} & & A_{1,\dots,n-1}^{2,\dots,n} \\ & A_{2,\dots,n-1}^{2,\dots,n-1} & \\ A_{2,\dots,n}^{1,\dots,n-1} & & A_{2,\dots,n}^{2,\dots,n} \end{bmatrix}$$

$$|A| = |\hat{A}_{n-1}| = \frac{1}{A_{2,\dots,n-1}^{2,\dots,n-1}} \cdot \begin{vmatrix} A_{1,\dots,n-1}^{1,\dots,n-1} & A_{1,\dots,n-1}^{2,\dots,n} \\ A_{2,\dots,n}^{1,\dots,n-1} & A_{2,\dots,n}^{2,\dots,n} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{(A_{2,\dots,n-1}^{2,\dots,n-1})^{n-(n-2)-1}} \cdot \begin{vmatrix} A_{1,\dots,n-1}^{1,\dots,n-1} & A_{1,\dots,n-1}^{2,\dots,n} \\ A_{2,\dots,n}^{1,\dots,n-1} & A_{2,\dots,n}^{2,\dots,n} \end{vmatrix}$$

$$|A| = \frac{1}{A_{2,\dots,n-1}^{2,\dots,n-1}} \cdot (A_{1,\dots,n-1}^{1,\dots,n-1} \cdot A_{2,\dots,n}^{2,\dots,n} - A_{1,\dots,n-1}^{2,\dots,n} \cdot A_{2,\dots,n}^{1,\dots,n-1})$$

Это тождество Доджсона в других обозначениях.

1. Метод Доджсона более известен, чем метод Чио, так как имел некоторые теоретические приложения (подсчет числа знакопеременных матриц, вычисление определителя Мак-Магона и др).

2. Метод Доджсона для вычисления числовых определителей из-за проблемы нулей, практически пригоден только для малых порядков (не более 5), в то время как метод Чио достаточно эффективен при любых порядках определителей, к тому же допускает хорошее распараллеливание.

3. Имеется большая библиография по методам Доджсона и Чио, но в основном это повторения, в том числе частных случаев обобщенного метода Чио, а также компьютерные реализации этих алгоритмов.

(Thomas Muir, The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, 1906, Vol. I, to 1841, 1911, Vol. II, 1841-1860, 1920, Vol. III, 1861-1880,1923, Vol. IV, 1881-1900.)