Группа компонент и когомологии Галуа вещественной редуктивной группы

(по совместным работам с Михаилом Боровым)

Дмитрий Тимашев

Механико-математический факультет МГУ

Семинар **«Группы Ли и теория инвариантов»**
Москва, 10 октября 2021 г.

Алгебраические группы над $\mathbb{R}$

Пусть G — линейная алгебраическая группа, определённая над $\mathbb{R}$.

Наивно:

$G \subset GL_n$ задана полиномиальными уравнениями на g_{ij} с коэффициентами $\in \mathbb{R}$.

$G(\mathbb{C}) = \{$решения с $g_{ij} \in \mathbb{C}\}$ — комплексная группа Ли;
$G(\mathbb{R}) = \{$решения с $g_{ij} \in \mathbb{R}\}$ — вещественная группа Ли.

Комплексное сопряжение: $G(\mathbb{C}) \ni g = (g_{ij}) \mapsto \bar{g} = (\bar{g}_{ij}) \in G(\mathbb{C})$;

$$g \in G(\mathbb{R}) \iff g = \bar{g}.$$

Более абстрактно:

$G = (G(\mathbb{C}), \sigma)$, где $\sigma : G(\mathbb{C}) \to G(\mathbb{C})$, $g \mapsto \bar{g}$, — *вещественная структура* (= антирегулярный инволютивный автоморфизм группы, т. е. $\sigma^* \mathcal{O}_G = \overline{\mathcal{O}}_G$).

Группа компонент

Пусть G связна (в топологии Зарисского)

$\Longrightarrow$ $G(\mathbb{C})$ связна (в классической топологии)

Но $G(\mathbb{R})$ может быть несвязной (в классической топологии)

$G(\mathbb{R})^\circ :=$ связная компонента единицы в $G(\mathbb{R})$

Задача 1

Вычислить группу компонент связности $\pi_0 G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{R})/G(\mathbb{R})^\circ$.

Примеры

- G — расщепимый алгебраический тор
  $\Longrightarrow$ $G(\mathbb{C}) = \underbrace{\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times}_{n}$, $\quad G(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \times \cdots \times \mathbb{R}^\times$
  $\Longrightarrow$ $\pi_0 G(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}^n$
- $G = GL_n \Longrightarrow \pi_0 G(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$, компоненты различает $\operatorname{sgn}\det g$
- $G = SO_{k,l}$ $(k, l > 0)$ $\Longrightarrow$ $\pi_0 G(\mathbb{R}) = \{\pm 1\}$,
  компоненты различает $\operatorname{sgn}\det(g_{ij})_{i,j=1}^{k}$

Группа компонент: основные факты

Основные факты

- G *унипотентна* $\implies$ $G(\mathbb{R})$ *связна*
- $G = G_{\mathrm{uni}} \rtimes G_{\mathrm{red}}$ *(разложение Леви над* $\mathbb{R}$*)*
  $\implies G(\mathbb{R}) = G_{\mathrm{uni}}(\mathbb{R}) \rtimes G_{\mathrm{red}}(\mathbb{R}) \implies \pi_0 G(\mathbb{R}) = \pi_0 G_{\mathrm{red}}(\mathbb{R})$

Вывод: достаточно решить задачу 1 для связной редуктивной G.

Известные результаты

(Borel–Tits, 1972) G *полупроста и односвязна* $\implies$ $G(\mathbb{R})$ *связна*

(Matsumoto, 1964) $\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \{\pm 1\}^n$

Оказывается, задача 1 имеет отношение к *когомологиям Галуа*.

Когомологии Галуа: основы

1-коциклы: $\mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, G) = \{c \in G(\mathbb{C}) \mid c\bar{c} = 1\}$

Действие скрученными сопряжениями $G(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, G)$: $c \xmapsto{g} gc\bar{g}^{-1}$

1-когомологии: $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) = \mathrm{Z}^1(\mathbb{R}, G)/G(\mathbb{C})$

(множество с отмеченной точкой, не группа!)

Принцип

Пусть X — объект, определённый над $\mathbb{R}$ (квадратичная форма, тензор, алгебра, алгебраическое многообразие или группа). Тогда:

$$\{\mathbb{R}\text{-формы объекта } X\} \quad \longleftrightarrow \quad \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \operatorname{Aut} X)$$

Точная когомологическая последовательность:

Пусть $G \curvearrowright Q = Gq_0$ — однородное пространство, $q_0 \in Q(\mathbb{R})$, $H = G_{q_0}$.

$$1 \to H(\mathbb{R}) \to G(\mathbb{R}) \to Q(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, H) \to \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) \underbrace{\to \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, Q)}_{\text{если } H \triangleleft G}$$

$$q = gq_0 \longmapsto [g^{-1}\bar{g}]$$

Когомологии Галуа: задача вычисления

Задача 2

Вычислить $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G)$.

Факт

G *унипотентна* $\implies \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) = 1$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G_{\mathrm{uni}} & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/G_{\mathrm{uni}} & \longrightarrow & 1 \\ & & & & \bigcup & & \| & & \\ & & & & G_{\mathrm{red}} & \xrightarrow{\sim} & G/G_{\mathrm{uni}} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{uni}}) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) & \longrightarrow & \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G/G_{\mathrm{uni}}) \\ & \| & & \uparrow & & \| \\ & 1 & & \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G_{\mathrm{red}}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G/G_{\mathrm{uni}}) \end{array}$$

Вывод: достаточно решить задачу 2 для связной редуктивной G.

Группа компонент: вычисление

Обозначения: G связна и редуктивна, $G = G^{\mathrm{ss}} \cdot S$, G^{ss} полупроста, $S = Z(G)^{\circ}$, $\mathfrak{s} = \mathrm{Lie}\, S$, G^{sc} = односвязное накрытие G^{ss}.

$$1 \longrightarrow \pi_1 G \xrightarrow{i} \underbrace{\widetilde{G} = G^{\mathrm{sc}} \times \mathfrak{s} \xrightarrow{j} G}_{\text{универсальное накрытие}} = G^{\mathrm{ss}} \cdot S \longrightarrow 1$$

$$\mathrm{Im}(i) = \mathrm{Ker}(j) =: \widetilde{Z} \subseteq Z(\widetilde{G})$$

$$\cdots \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ G^{\mathrm{sc}}(\mathbb{R}) \times \mathfrak{s}(\mathbb{R}) \\ \text{связна}}}{\widetilde{G}(\mathbb{R})} \longrightarrow G(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}})}}{\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \widetilde{G})} \longrightarrow \cdots$$

$$1 \longrightarrow \pi_0 G(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}})$$

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) = \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \widetilde{Z}) \curvearrowright \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \widetilde{G}) = \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}}), \qquad [\tilde{z}] \cdot [\tilde{c}] = [\tilde{z} \cdot \tilde{c}].$$

Теорема

$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G)_{[1]}$ — *стабилизатор* $[1] \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}})$.

Когомологии Галуа торов

Вещественные структуры на торах:

Пусть (T, σ) — алгебраический тор над $\mathbb{R}$, $T(\mathbb{C}) = \underbrace{\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times}_{n}$.

Базовые $\mathbb{R}$-структуры:

- расщепимая: $\sigma(t_1, \ldots, t_n) = (\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n)$; $T(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^\times)^n$
- анизотропная: $\sigma(t_1, \ldots, t_n) = (\bar{t}_1^{-1}, \ldots, \bar{t}_n^{-1})$; $T(\mathbb{R}) = (S^1)^n$

Предложение

$\exists!$ *разложение* $T = T_0 \cdot T_1$, *где* T_0 *анизотропен,* T_1 *расщепим и* $|T_0 \cap T_1| < \infty$ *(почти прямое произведение).*

Обозначение: $T_0^{(2)} = \{t \in T_0 \mid t^2 = 1\}$

Предложение

$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, T) \simeq T_0^{(2)}/(T_0 \cap T_1)$

Когомологии Галуа: сведение к торам

Выберем максимальный анизотропный тор $T_0 \subset G$
$\implies T = Z_G(T_0) = T_0 \cdot T_1$ — максимальный тор в G, T_1 расщепим.

Скрученный нормализатор: $N_0 = \{n \in N_G(T_0) \mid n\bar{n}^{-1} \in T_0^{(2)}\}$

Скрученное сопряжение $N_0 \curvearrowright T_0$, $t \overset{n}{\longmapsto} nt\bar{n}^{-1}$, сохраняет $T_0(\mathbb{R})$, $T_0^{(2)}$.

$N_0 \cap T$ действует умножениями на $T_0 \cap T_1$.

Теорема (М. В. Боровой, 1988)

$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) \simeq T_0^{(2)}/N_0$

Как вычислить?

Эффективное действие: $N_0 \twoheadrightarrow \widehat{W}_0 \curvearrowright T_0$

$$1 \longrightarrow T_0 \cap T_1 \longrightarrow \widehat{W}_0 \longrightarrow W_0 := N_G(T_0)/T \longrightarrow 1$$

Когомологии Галуа: вычисление

Вещественная структура на редуктивной группе:

$\sigma = \sigma_c \circ \tau \circ \mathrm{inn}(t_\sigma)$ — произведение коммутирующих инволюций, где:
σ_c — *анизотропная $\mathbb{R}$-структура* на G, т.е. $G(\mathbb{R}, \sigma_c)$ компактна;
τ — *диаграммная инволюция*, $\tau(t) = t^{\pm 1}$ при $t \in T_{0,1}$, соответственно;
$t_\sigma \in T_0 \cap G^{\mathrm{ss}}$, $t_\sigma^2 \in Z(G^{\mathrm{ss}})$.

Логарифмирование со сдвигом:

$$\begin{tikzcd}
T_0 \cap T_1 \arrow[r, phantom, "\subset"] & \widehat{W}_0 \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] & T_0(\mathbb{R}) \\
\boldsymbol{i}X_0^\vee \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\subset"] & \widetilde{W}_0 \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\curvearrowright"] & \mathfrak{t}_0(\mathbb{R}) \arrow[u, "\mathcal{E}"']
\end{tikzcd}$$

$X_0^\vee =$ образ $X^\vee(T)$ при проекции $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}\, T \to \mathfrak{t}_0 = \mathrm{Lie}\, T_0$;
$\widetilde{W}_0 = \boldsymbol{i}X_0^\vee \rtimes W_0$ действует на $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$ аффинными изометриями;
$\mathcal{E}(x) = \exp 2\pi(x - x_\sigma)$, где $\exp 2\pi x_\sigma = t_\sigma$

Утверждение 1: $T_0(\mathbb{R})/\widehat{W}_0 \simeq \mathfrak{t}_0(\mathbb{R})/\widetilde{W}_0$

Когомологии Галуа: вычисление

$X_0^\vee \supset Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee$ — подрешётка конечного индекса;
$Q_0^\vee =$ образ $Q^\vee(G,T)$ (*решётка кокорней*) при проекции $\mathfrak{t} \to \mathfrak{t}_0$;
$\Lambda_0^\vee =$ образ $X^\vee(S)$ при той же проекции;

$\widetilde{W}_0 \rhd \widetilde{W}_\mathrm{r} = \boldsymbol{i} Q_0^\vee \rtimes W_0$ — дискретная группа, порождённая отражениями (*аффинная группа Вейля* пары (G,τ)).

Фундаментальная область для $\widetilde{W}_\mathrm{r} \curvearrowright \mathfrak{t}_0(\mathbb{R})$ есть $\Delta_1 \times \dots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R})$.

Здесь: $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{t}_0$, а Δ_i — симплексы, заданные аффинными диаграммами Дынкина Dyn_i простых (над $\mathbb{R}$) факторов группы G.

$x_i \in \Delta_i$ задаётся *барицентрическими координатами* $p_{ij} \geq 0$ ($j = 0, \dots, l_i$), нормированными так, что $\sum_j n_{ij} p_{ij} = 2$ ($n_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$).

$F_0 = X_0^\vee / (Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee)$ — конечная абелева группа.

Утверждение 2: $\mathfrak{t}_0(\mathbb{R}) / \widetilde{W}_0 \simeq (\Delta_1 \times \dots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R}) / \boldsymbol{i}\Lambda_0^\vee) / F_0$

Когомологии Галуа: вычисление

Вопрос

Как определить те $x = (x_1, \ldots, x_m, x_0) \in \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_m \times \mathfrak{s}_0(\mathbb{R})$, *для которых* $\mathcal{E}(x) = \exp 2\pi(x - x_\sigma) \in T_0^{(2)}$*?*

Ответ

$\mathcal{E}(x) \in T_0^{(2)}$ *тогда и только тогда, когда:*

1. $p_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(\forall i, j)$;
2. $x_0 = \boldsymbol{i}\mu/2$, *где* $\mu \in M_0^\vee := X^\vee(S_0/S_0 \cap G^{ss})$;
3. $\sum_{i,j>0} \lambda_{ij} p_{ij} + \langle \lambda, \mu \rangle \equiv \sum_{i,j>0} \lambda_{ij} q_{ij} \pmod{\mathbb{Z}}$, $\forall \lambda \in X(T_0)$, *где* $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}$ *— координаты* λ *по простым корням, а* $q_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ *— барицентрические координаты* x_σ.

Когомологии Галуа: основная теорема

Определение

Разметка Каца — это набор $p = (p_{ij})_{i,j}$, где $p_{ij} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_j n_{ij} p_{ij} = 2$.

Редуктивная разметка Каца — это пара $(p, [\mu])$, где p — разметка Каца и $[\mu] \in M_0^\vee / 2\Lambda_0^\vee$.

$$\mathcal{K}(G) = \{\text{редуктивные разметки Каца, удовлетворяющие сравнениям (3)}\}.$$

$F_0 = X_0^\vee / (Q_0^\vee \oplus \Lambda_0^\vee)$ действует на $\mathcal{K}(G)$ через автоморфизмы диаграмм $\mathrm{Dyn}_1, \ldots, \mathrm{Dyn}_m$ и сдвиги на $M_0^\vee / 2\Lambda_0^\vee$.

Теорема

$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) \simeq \mathcal{K}(G)/F_0$

Группа компонент: комбинаторное описание

Следствие

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}}) \simeq \mathcal{K}(G^{\mathrm{sc}}) = \\ = \{\textit{разметки Каца, удовлетворяюшие } (3) \textit{ для } \lambda = \omega_k|_{T_0}, \forall k\}$$

(ω_k — фундаментальные веса).

Напомним:

$$\pi_1 G \simeq \widetilde{Z} \subset Z(\widetilde{G}) \subset \widetilde{G} = G^{\mathrm{sc}} \times \mathfrak{s}$$

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \widetilde{Z}) \curvearrowright \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \widetilde{G}) \simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}})$$

$$[\tilde{z}] \cdot [\tilde{c}] = [\tilde{z} \cdot \tilde{c}]$$

В комбинаторных терминах:

$$\pi_1 G \simeq X^\vee(T)/Q^\vee(G, T) \simeq \widetilde{Z} = \exp(2\pi \boldsymbol{i} X^\vee)$$

$$\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) \simeq (X^\vee/Q^\vee)^{-\tau}/(1-\tau)(X^\vee/Q^\vee)$$

$$\tilde{z} = \exp 2\pi \boldsymbol{i} \nu, \ \tilde{c} = \exp 2\pi(x - x_\sigma) \implies [\tilde{z}] \cdot [\tilde{c}] = [\exp 2\pi(\boldsymbol{i}\nu_0 + x - x_\sigma)]$$

Группа компонент: комбинаторное описание

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) \arrow[d, "{\pi\colon [\nu]\mapsto[\nu_0]}"'] & \curvearrowright & \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}}) \arrow[d, equal] \\
F_0 & \curvearrowright & \mathcal{K}(G^{\mathrm{sc}})
\end{tikzcd}$$

$[1] = [\mathcal{E}(x_\sigma)] \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G^{\mathrm{sc}})$ соответствует $q \in \mathcal{K}(G^{\mathrm{sc}})$.

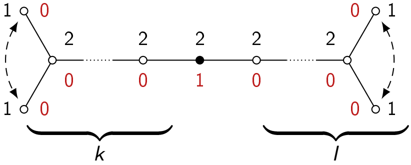
Теорема

$\pi_0 G(\mathbb{R}) \simeq \pi^{-1}((F_0)_q)$ — *стабилизатор* $q \in \mathcal{K}(G^{\mathrm{sc}})$ *в* $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G)$.

Пример

$G = SO_{2k,2l}$, $\quad n = k + l$, $\quad k, l \geq 2$. $\quad$ Здесь: $\quad \tau = \mathrm{id}$, $\quad T_0 = T$

$[\omega_1^\vee]$:



n_j чёрные
q_j красные

$X(T) = \langle \omega_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, $\quad \omega_1 = \sum_{j>0} \lambda_j \alpha_j$, $\quad \lambda_j : {}_{1}1 \cdots 1^{1/2}_{1/2}$

Сравнение (3): $p_{n-1} \equiv p_n \pmod 2$

$\pi_1 G = F_0 = \langle [\omega_1^\vee] \rangle_2 \implies \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) = F_0 \implies \pi_0 G(\mathbb{R}) = F_0 \simeq \mathbb{Z}_2$

$\mathcal{K}(G)$: $\quad {}^{1}_{1}0\cdots0^{0}_{0} \quad {}^{2}_{0}0\cdots0^{0}_{0} \quad {}^{0}_{0}2\cdots0^{0}_{0} \quad \cdots \quad {}^{0}_{0}0\cdots2^{0}_{0} \quad {}^{0}_{0}0\cdots0^{2}_{0} \quad {}^{0}_{0}0\cdots0^{1}_{1}$

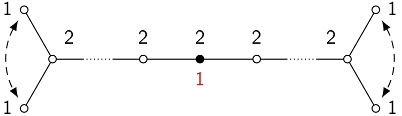
$\qquad\qquad\quad {}^{0}_{2}0\cdots0^{0}_{0} \qquad\qquad\qquad\qquad {}^{0}_{0}0\cdots0^{0}_{2}$

$\# \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, G) = n + 1$

Пример (продолжение)

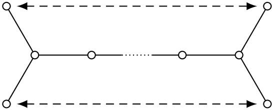
$G = \operatorname{Ad} SO_{2k,2l}$

$[\omega_1^\vee]$:

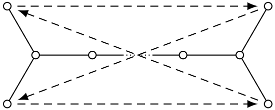


$$\pi_1 G = F_0 = \begin{cases} \langle[\omega_1^\vee]\rangle_2 \oplus \langle[\omega_{n-1}^\vee]\rangle_2, & n \text{ чётно},\\ \langle[\omega_{n-1}^\vee]\rangle_4, & n \text{ нечётно}. \end{cases}$$

$[\omega_{n-1}^\vee]$:



(n even)



(n odd)

$$\Longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathbb{R}, \pi_1 G) = \begin{cases} F_0, & n \text{ чётно}\\ 2F_0, & n \text{ нечётно} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \pi_0 G(\mathbb{R}) = \begin{cases} (\mathbb{Z}_2)^2, & k = l,\\ \mathbb{Z}_2, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Ссылки

M. Borovoi, D. A. Timashev,
Galois cohomology of real semisimple groups via Kac labelings,
Transform. Groups **26** (2021), no. 2, 433–477,
arXiv:2008.11763.

M. Borovoi, D. A. Timashev,
Galois cohomology and component group of a real reductive group,
arXiv:2110.13062.

Спасибо за внимание!