

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 10.

Теретёнков Александр Евгеньевич

9 ноября 2021 г.

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Генератор вполне положительной полугруппы

Утверждение. У матричной однопараметрической полугруппы есть генератор (непрерывная полугруппа дифференцируема).

Доказательство:

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_s ds = \Phi_0 = I$$

Обозначим

$$M_t = \int_0^t \Phi_s ds$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_t &= tI + o(t), & t \rightarrow +0 \\ \det M_t &= t^n + o(t^n), & t \rightarrow +0 \end{aligned}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) : \forall t < \delta(\varepsilon) \quad |\det M_t - t^n| < \varepsilon t^n$$

Так как круг

$$z : |z - t^n| < \frac{1}{2}t^n$$

не содержит точки $z = 0$, то полагая $t_1 = \frac{1}{2}\delta(\frac{1}{2})$, получим

$$\det M_{t_1} \neq 0.$$

$\Rightarrow \exists t_1 > 0 : M_{t_1}$ — обратима

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\Phi_s &= M_{t_1}^{-1} M_{t_1} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_s ds \Phi_t = \\ &= M_{t_1}^{-1} \int_0^{t_1} \Phi_{s+t} dt = M_{t_1}^{-1} \int_s^{s+t_1} \Phi_t dt = \\ &= M_{t_1}^{-1} (M_{s+t_1} - M_s)\end{aligned}$$

В правой части стоят функции дифференцируемые по s , что гарантирует дифференцируемость Φ_s

$$\frac{d}{ds} \Phi_s = M_{t_1}^{-1} (\Phi_{s+t_1} - \Phi_s) = \underbrace{M_{t_1}^{-1} (\Phi_{t_1} - I)}_{\mathcal{L}} \Phi_s \quad \square$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t = \mathcal{L}\Phi_t,$$

$\mathcal{L}$ — генератор.

$$\Phi_t = e^{\mathcal{L}t}$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Теорема. $\mathcal{L}$ — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ имеет вид ГКСЛ.

Генератор вполне положительной полугруппы

Теорема. $\mathcal{L}$ — генератор однопараметрической вполне положительной сохраняющей след непрерывной полугруппы $\Leftrightarrow \mathcal{L}$ имеет вид ГКСЛ.

Доказательство:

1) Φ_t — вполне положительная однопараметрическая полугруппы.

Разложение Краусса в базисе.

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger, \quad C \geq 0$$

Выберем ортонормированный базис такой, что $F_{n^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} I$

$$\Phi_t(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} C_{ij}(t) F_i \rho F_j^\dagger + \sum_i \frac{1}{\sqrt{n}} C_{ij}(t) F_i \rho + h.c. + \frac{C_{n^2 n^2}(t)}{n} \rho$$

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\rho) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Phi_\varepsilon(\rho) - \rho}{\varepsilon} &= \sum_{i,j=1}^{n^2-1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i \rho F_j^\dagger + \\ &+ \sum_i \frac{1}{\sqrt{n}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i \rho + h.c. + \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{n^2 n^2}(\varepsilon) - n}{\varepsilon} \rho\end{aligned}$$

$$a_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad i, j = 1, \dots, n^2 - 1$$

$$F = \sum_i \frac{1}{\sqrt{n}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon} F_i$$

$$a_{n^2 n^2} = \frac{1}{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{C_{n^2 n^2}(\varepsilon) - n}{\varepsilon}$$

(Неотрицательность a_{ij} следует из неотрицательности $C_{ij}(\varepsilon)$.)

Генератор вполне положительной полугруппы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\rho) &= \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger + F \rho + \rho F^\dagger + a_{n^2 n^2} \rho = \\ &= -i[H, \rho] + \{G, \rho\} + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger\end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{2i}(F^\dagger - F), \quad G = \frac{1}{2}a_{n^2 n^2}I + \frac{1}{2}(F^\dagger + F)$$

Генератор вполне положительной полугруппы

Выразим G через a_{ij} и базис F_i с помощью условия нормировки $\text{tr } \mathcal{L}(\rho) = 0$:

$$0 = \text{tr} \left(2G + \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i \right) \rho$$

В силу произвольности ρ :

$$G = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_j^\dagger F_i$$

Генератор вполне положительной полугруппы

2) $\mathcal{L}$ — ГКСЛ генератор.

По формуле Троттера $e^{A+B} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{N}A} e^{\frac{1}{N}B} \right)^N$

Применим к

$$\mathcal{L}(\rho) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger}_{\mathcal{A}(\rho)} + \underbrace{(G - iH)\rho + \rho(G + iH)}_{\mathcal{B}(\rho)}$$

$$e^{\mathcal{L}t} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\exp \left(\frac{t}{N} \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \cdot F_j^\dagger \right) e^{\frac{t}{N}(G-iH)} \cdot e^{\frac{t}{N}(G+iH)} \right)^N$$

Оба члена вполне положительны, поэтому и предел вполне положителен.

Генератор вполне положительной полугруппы

Кроме того, сохранение следа следует из ряда Тейлора (удобнее проверить сохранение единицы сопряжённым генератором):

$$(e^{\mathcal{L}t})^* I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathcal{L}^*)^k I = I$$



Генератор вполне положительной полугруппы

Замечание 1. Если не требовать сохранения следа, то очевидно мы остановимся на:

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_{i,j=1}^{n^2-1} a_{ij} F_i \rho F_j^\dagger + F \rho + \rho F^\dagger + a_{n^2 n^2} \rho,$$

или

$$\mathcal{L}(\rho) = \sum_j C_j \rho C_j^\dagger + K \rho + \rho K^\dagger.$$

$$\mathcal{L}(\rho) = \Psi(\rho) + K \rho + \rho K^\dagger.$$

Ψ — вполне положительное.

Генератор вполне положительной полугруппы

Замечание 2.

$$\mathcal{L}(\rho) = \Psi(\rho) + K\rho + \rho K^\dagger.$$

можно также эквивалентно охарактеризовать с помощью условной вполне положительности:

$$\sum_{i,j=1}^k \langle \psi_i | \mathcal{L}(X_i^\dagger X_j) | \psi_j \rangle \geq 0$$

$\forall k \in \mathbb{N}, X_i \in \mathbb{C}^{n \times n}, |\psi_j\rangle \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\sum_{j=1}^k X_j |\psi_j\rangle = 0$.

Генератор вполне положительной полугруппы

Замечание 3. Ещё одна эквивалентная характеристика условно вполне положительных отображений может быть получена по аналогии с представлением Чоя-Ямилковского:

$$P = I_{n^2} - |\Omega\rangle\langle\Omega|$$

$$P(\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_{n^2})(|\Omega\rangle\langle\Omega|)P \geq 0$$

Генератор положительной полугруппы

Генератор $\mathcal{L}$ — положительной сохраняющей след полугруппы
 $\Leftrightarrow$ Для любого ортогонального разложения единицы P_x
выполнено

$$\mathrm{Tr}(P_x \mathcal{L}(P_y)) \geq 0, \quad x \neq y$$

и $\sum_x \mathrm{Tr}(P_x \mathcal{L}(P_y)) = 0$.

Условные математические ожидания

Вполне положительный идемпотент $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ называется условным математическим ожиданием.

Примеры:

1

$$\mathcal{P}\rho = \sum_x \Pi_x \rho \Pi_x$$

Π_x — ортогональное разложение единицы.

2

$$\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R$$

$$\mathcal{P}\rho = \text{Tr}_R \rho \otimes \rho_\beta$$

Квантовая относительная энтропия

Определение. Пусть ρ, σ — матрицы плотности в $\mathbb{C}^n$

$$S(\rho||\sigma) = \text{Tr } \rho \ln \rho - \text{Tr } \rho \ln \sigma, \quad \ker \rho = \ker \sigma = \{0\}$$

В общем случае введём носитель матрицы плотности

$$\text{supp } \rho = \text{sign } \rho \cdot \mathbb{C}^n.$$

$$S(\rho||\sigma) = \begin{cases} \text{Tr } \rho|_{\text{supp } \rho} \ln \rho|_{\text{supp } \rho} - \text{Tr } \rho|_{\text{supp } \rho} \ln \sigma|_{\text{supp } \rho}, & \text{supp } \rho \subseteq \text{supp } \sigma \\ +\infty, & \text{supp } \rho \not\subseteq \text{supp } \sigma \end{cases}$$

Квантовая относительная энтропия

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geq 0, \quad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Квантовая относительная энтропия

Утверждение.

$$S(\rho||\sigma) \geq 0, \quad \forall \rho, \sigma$$

Причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho = \sigma$.

Доказательство: Используя разложение в ряд Тейлора функции $\eta(\lambda) = -\lambda \ln \lambda$ с остаточным членом в форме Лагранжа

$$\eta(\lambda) = \eta(\mu) + (\lambda - \mu)\eta'(\mu) + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2\eta''(\xi), \quad 0 < \lambda < \xi < \mu \leq 1$$

С учётом $\eta'(\lambda) = -1 - \ln \lambda$, $\eta''(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}$, получаем

$$-\lambda \ln \lambda = -\mu \ln \mu - (\lambda - \mu) - (\lambda - \mu) \ln \mu - \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi}$$

Квантовая относительная энтропия

$$\lambda \ln \lambda - \lambda \ln \mu = \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2 \frac{1}{\xi} \geq \lambda - \mu + \frac{1}{2}(\lambda - \mu)^2$$

(с учётом $\xi < 1$)

В частности, и в пределе $\lambda \rightarrow +0$

$$0 \geq -\mu + \frac{1}{2}\mu^2 \quad \text{при } \mu \in [0,1]$$

$$\rho = \sum_j \lambda_j |e_j\rangle\langle e_j|, \quad \sigma = \sum_k \mu_k |h_k\rangle\langle h_k|$$

$$\begin{aligned} S(\rho||\sigma) &= \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j \ln \lambda_j - \lambda_j \ln \mu_k) \geq \\ &\geq \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k) + \frac{1}{2} \sum_{j,k} |\langle e_j|h_k\rangle|^2 (\lambda_j - \mu_k)^2 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho - \sigma)^2 \end{aligned}$$

Квантовая относительная энтропия

Таким образом, мы доказали, что

$$S(\rho||\sigma) \geq \frac{1}{2} \text{Tr}(\rho - \sigma)^2, \quad \forall \rho, \sigma$$

Очевидно, $\text{Tr}(\rho - \sigma)^2 \geq 0$, причём, если $\text{Tr}(\rho - \sigma)^2 = 0$, то $\rho = \sigma$. □