Лекция 10 по курсу "Квантовые тензорные сети"

(09.11.2021)

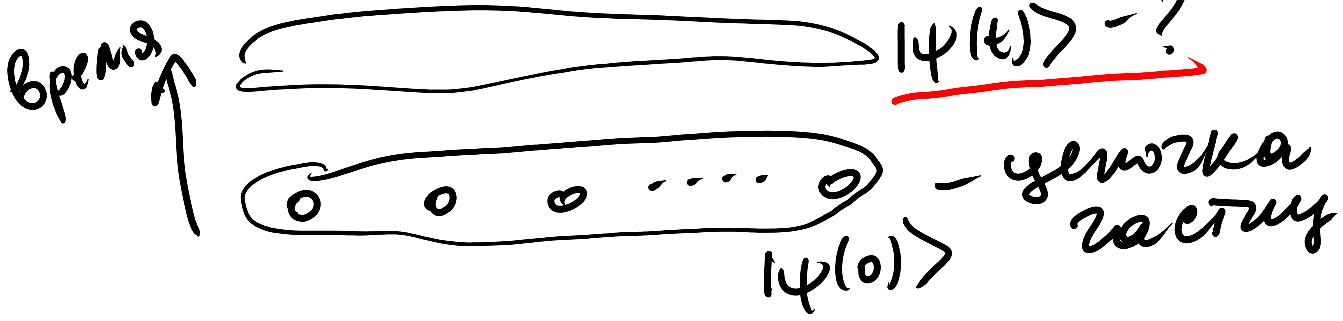
Эволюция чистых состояний во времени.

$$i\hbar \frac{\partial|\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}}_{\text{оператор эволюции}} |\psi(0)\rangle$$

$\hbar = 1$.

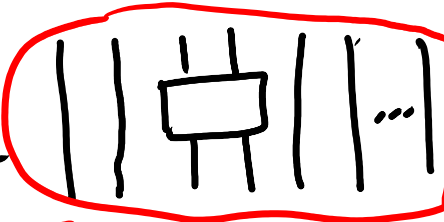
$$\boxed{H = \sum_i h^{i,i+1}}$$



Для малых τ (формула Троттера)

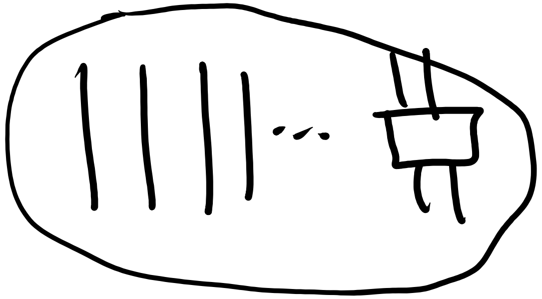
$$e^{-i\left(\sum_j h^{j,j+1}\right)\tau} = \underbrace{e^{-ih^{1,2}\tau}}\,\underbrace{e^{-ih^{2,3}\tau}}\cdots\underbrace{e^{-ih^{N-1,N}\tau}} + O(\tau^2)$$

$e^{-ih^{3,4}\tau}$



коммутируют

τ^2

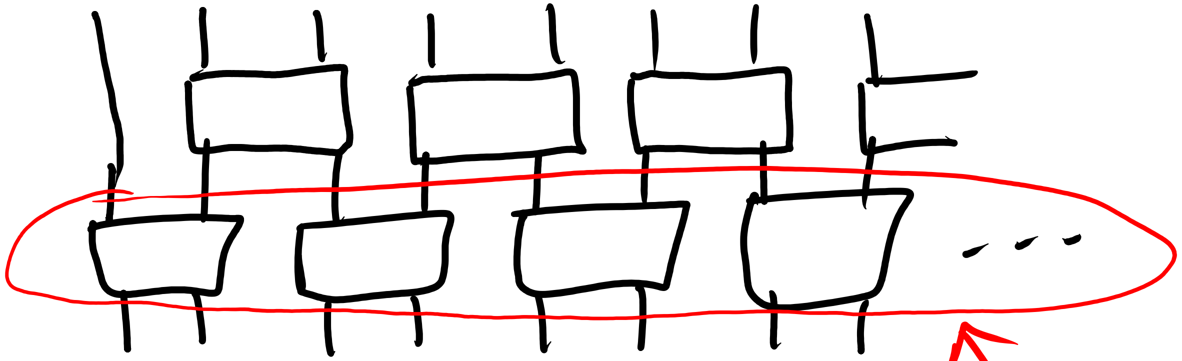


$$\sum_j h^{j,j+1} =$$

$$= \sum_{j\text{-нечётн.}} h^{j,j+1} + \sum_{j\text{-чётные}} h^{j,j+1}$$

$$\boxed{e^{-i\sum_{j\text{-нечётн}} h^{j,j+1}\tau} = e^{-ih^{1,2}\tau}\, e^{-ih^{3,4}\tau} \ldots \leftarrow \text{точно}}$$

$$e^{-iH\tau} = $$



$$+ O(\tau^2)$$

$$\underbrace{e^{-i\left(\sum_{j\text{-нечётн}} h^{j,j+1}\right)\tau}}_{\substack{\| \\ H_{odd}}}$$

$$e^{-iH\tau} = e^{-iH_{even}\tau}\, e^{-iH_{odd}\tau} + O(\tau^2)$$

$$\to e^{-iH\tau} = \underbrace{e^{-i\frac{1}{2}H_{odd}\tau}}_{I + \dots\tau + \dots\tau^2 + O(\tau^3)} \cdot e^{-iH_{even}\tau} \cdot \underbrace{e^{-i\frac{1}{2}H_{odd}\tau}} + O(\tau^3)$$

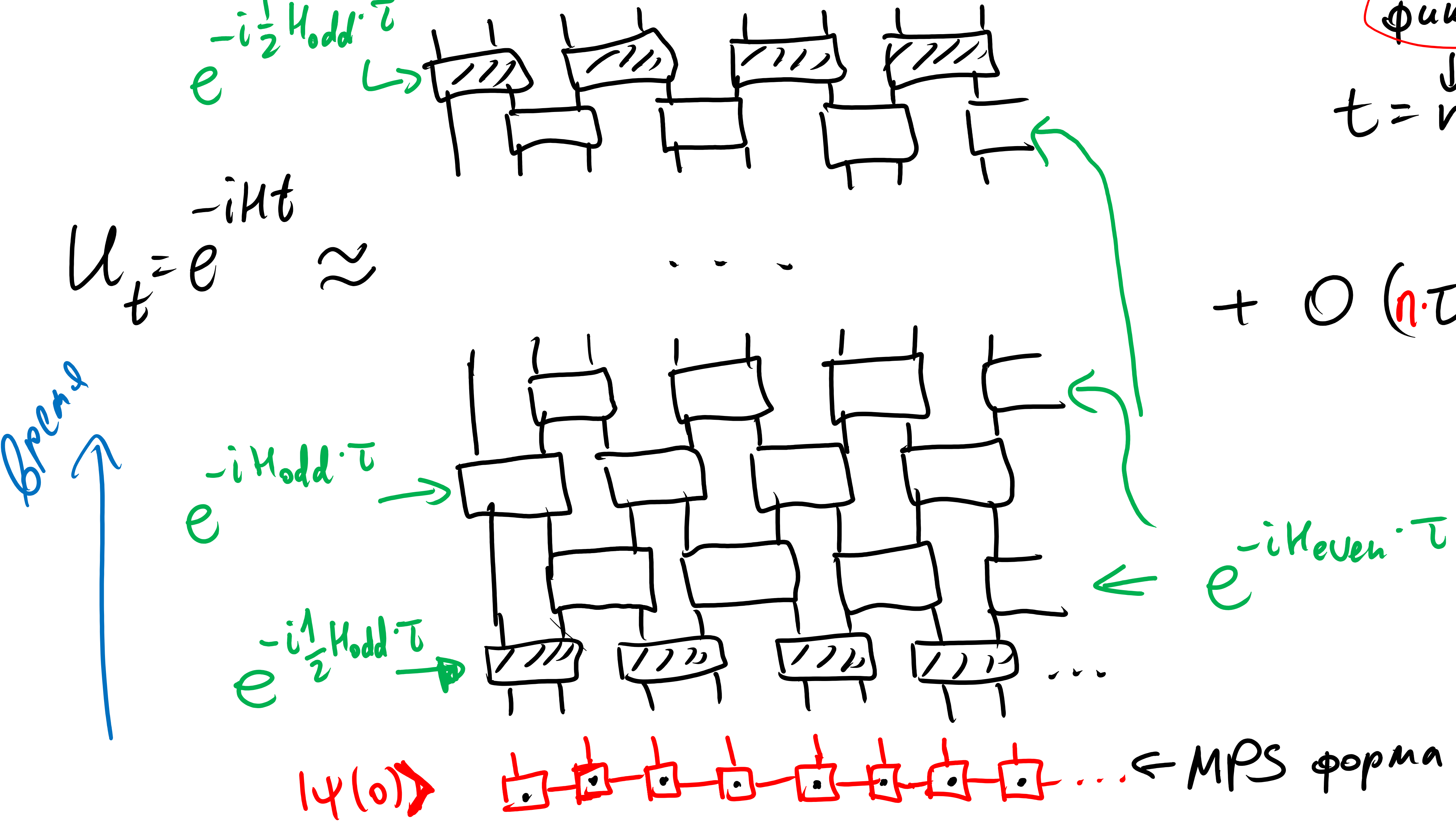
$$\sum_{j\text{-чётн.}} h^{j,j+1} =: H_{even}$$

$t \to$ разбиваем на n частей τ и послед. прим. $e^{-iH\tau}$ n раз.

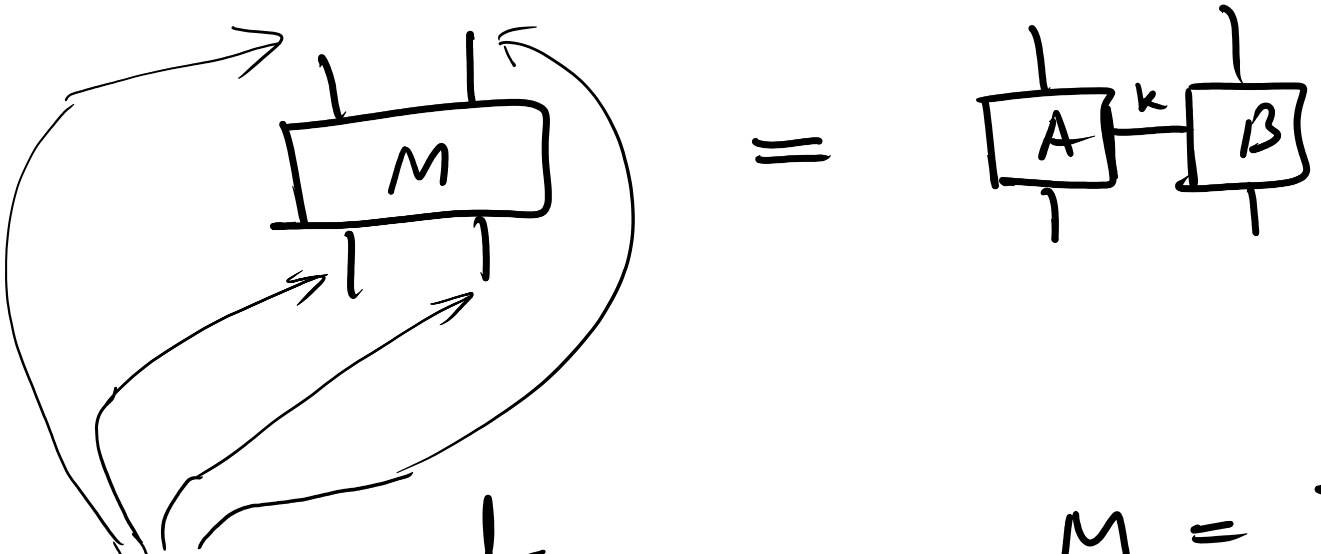
фиксир.

$t = n\tau$

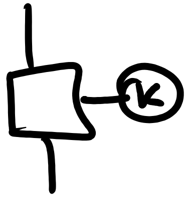
$$U_t = e^{-iHt} \approx$$



$$+\, O(n\cdot\tau^3)$$

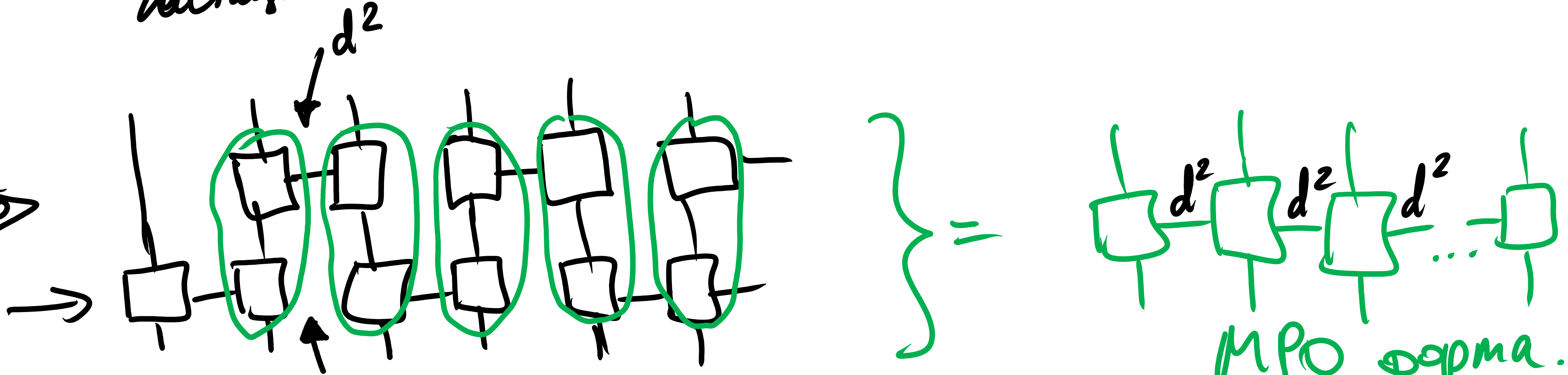


измерение d
физ. каждой частицы

$A_k =$ 

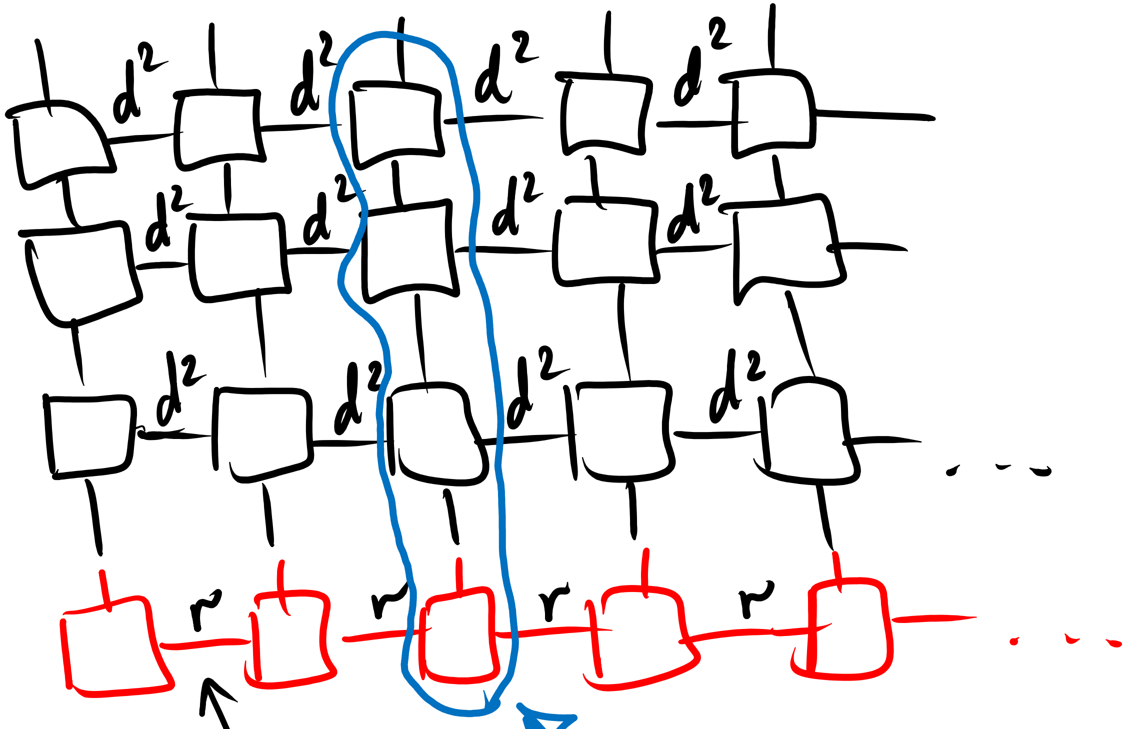
$$M = \sum_{k=1}^{d^2} A_k \otimes B_k$$

even
odd



MPO форма.

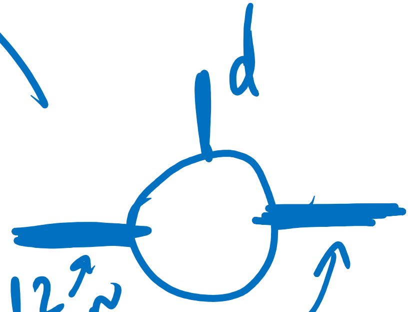
$U_t =$



$+ \; O(n\tau^3)$

$|\psi(0)\rangle =$

r = ранг MPS

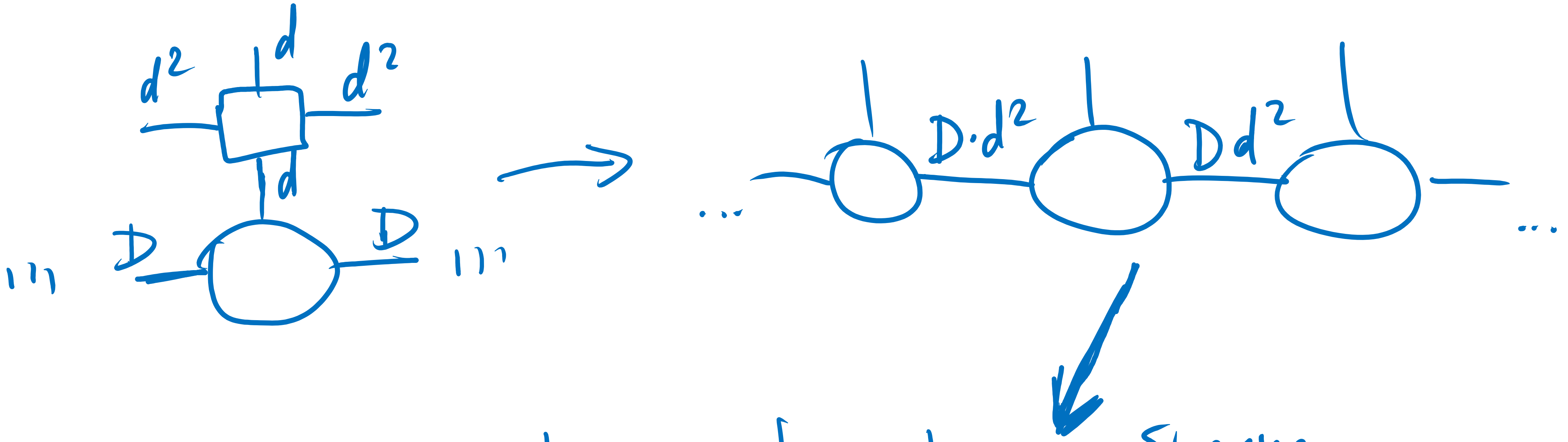


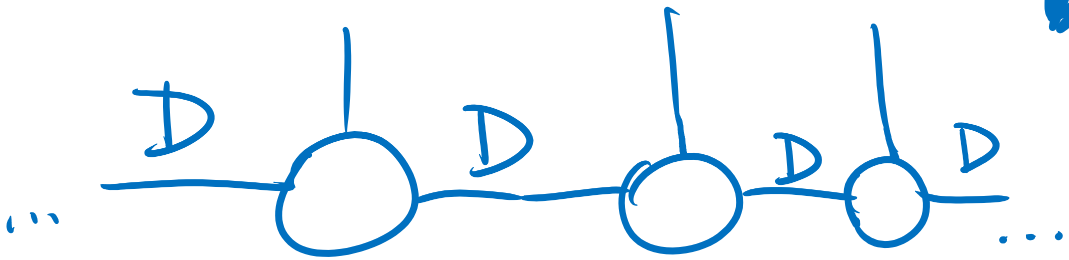
$n \cdot d^2 \cdot r$

мультииндекс

Пусть D - макс. ранг MPS, который можно хранить.

Если $n < \frac{D}{d^2 \cdot r}$, то просто сворачиваем.





обрезка (decimation)

вносит вклад в ошиб

TEBD = time evolving block decimation
(Lieb-Robinson bound)

i-я частица

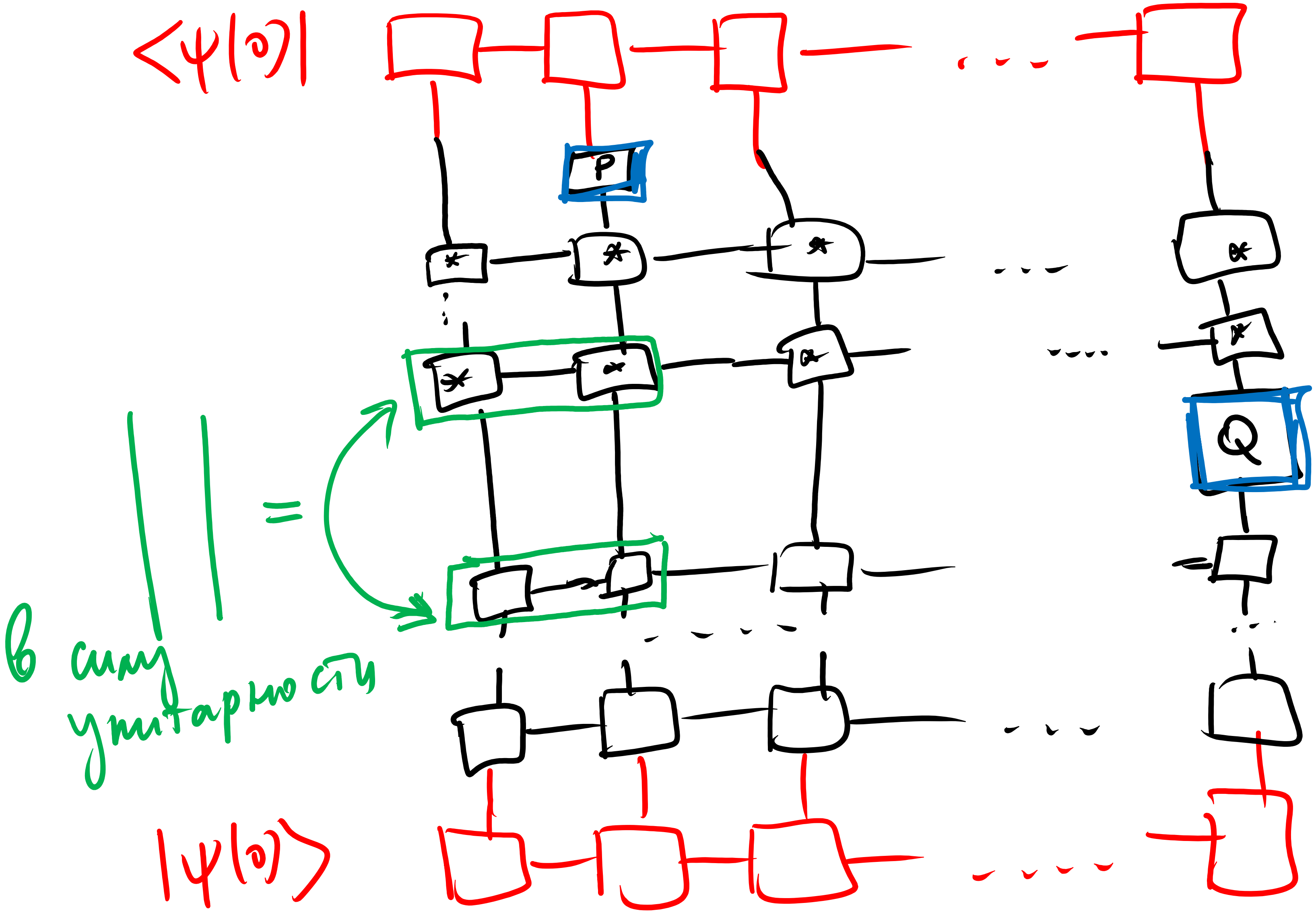
j-я частица

измеряем P при t=0

измеряем Q при t≠0

$$P(0) \qquad e^{-iHt}|\psi(0)\rangle = |\psi(t)\rangle$$

$$\langle\psi(0)|P(0)Q(t)|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|\,P(0)\underbrace{e^{iHt}Qe^{-iHt}}_{Q(t)}|\psi(0)\rangle = \langle\psi(0)|P(0)e^{iHt}Q|\psi(t)\rangle$$

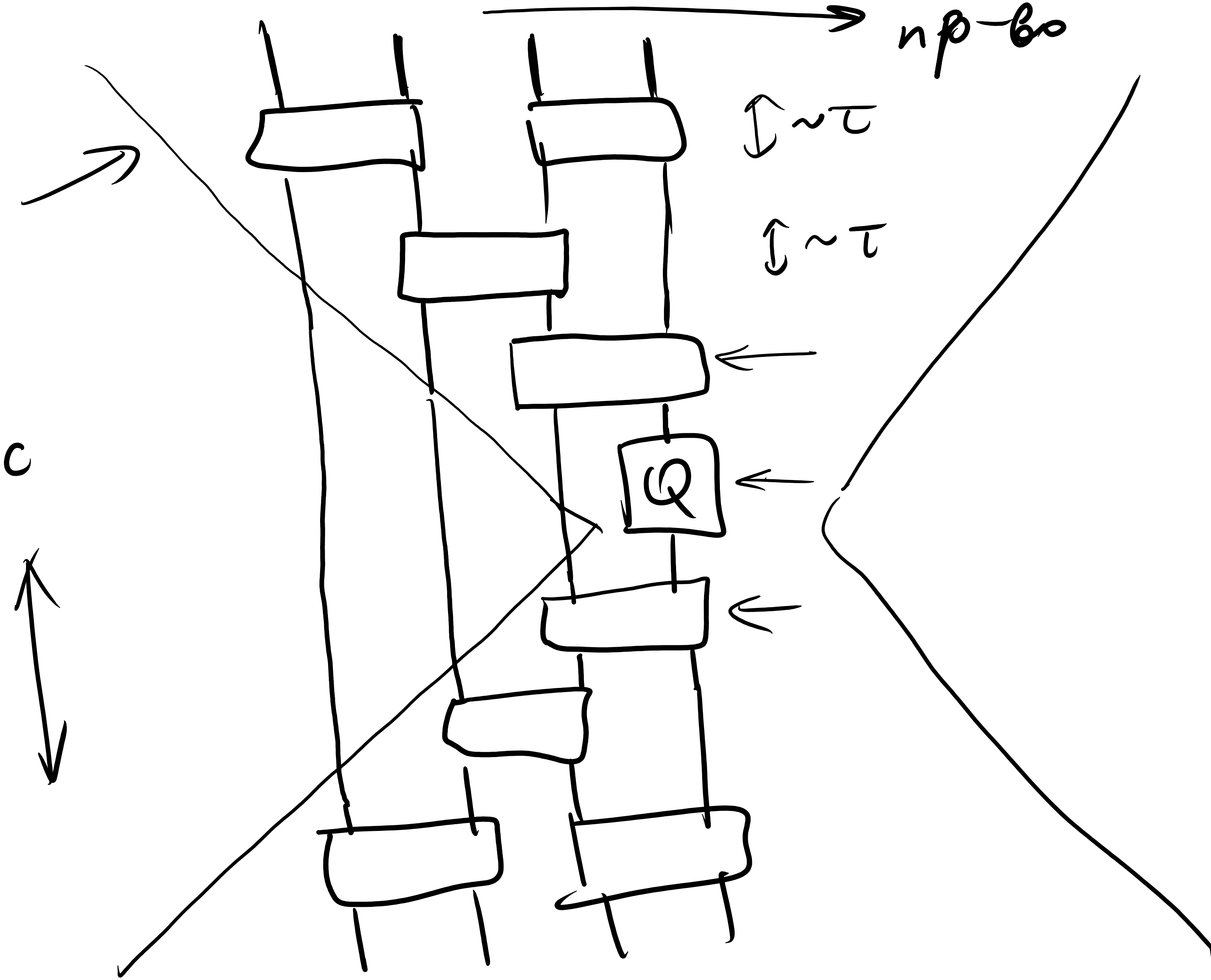

⟨ψ(0)|
P
Q
=
в силу унитарности
|ψ(0)⟩

"light cone"

C – problem specific

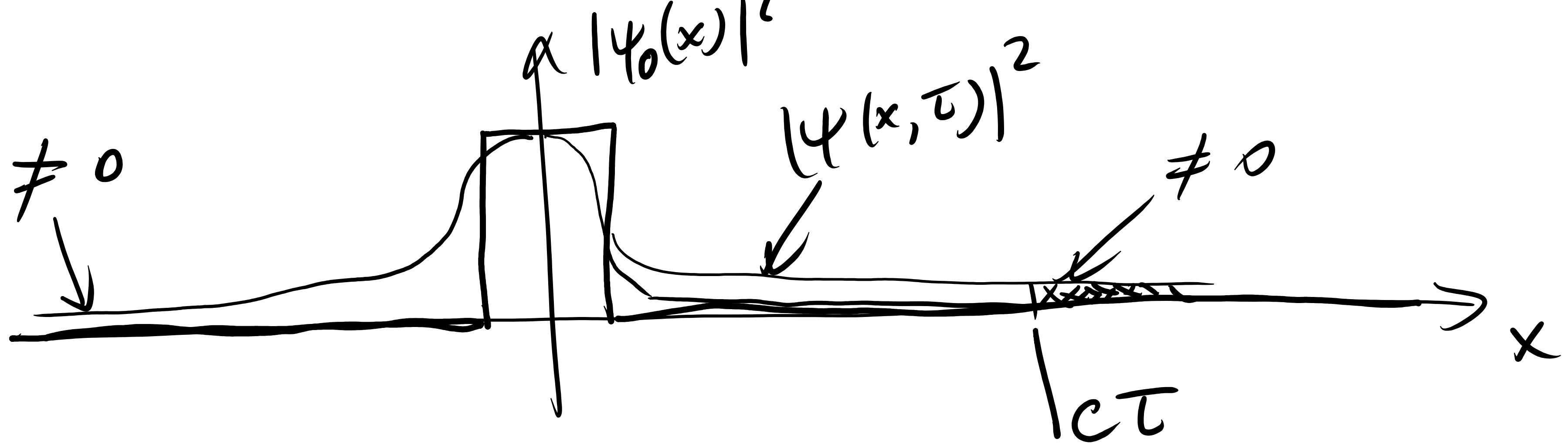
см. Schollwöck

время



Нерел. УШ.

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} = \left(-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x)\right)\psi(x,t) \\ \psi(x,0) = \psi_0(x) \end{cases}$$

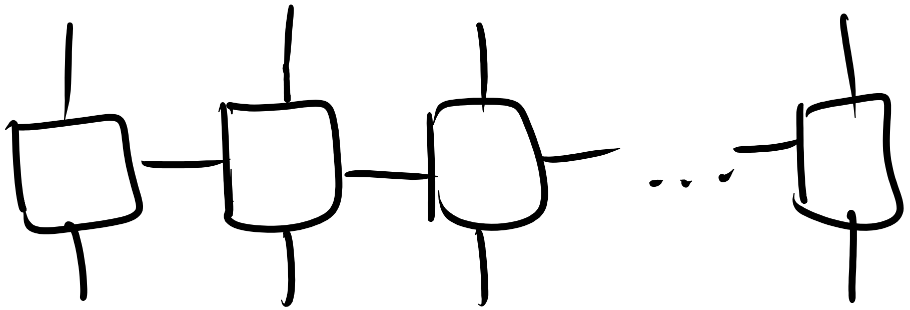


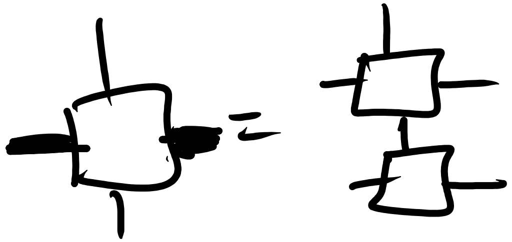
Смешанные состояния в виде произв. матриц.

MPDO — matrix product density operator

PRL $\underline{93}$, 207205 (2004)

PRL $\underline{93}$, 207204 (2004)

ρ = 



очищение $\rho = \mathrm{tr}_a(|\psi\rangle\langle\psi|)$

анцилла

Тепловое сост. локального гам-на

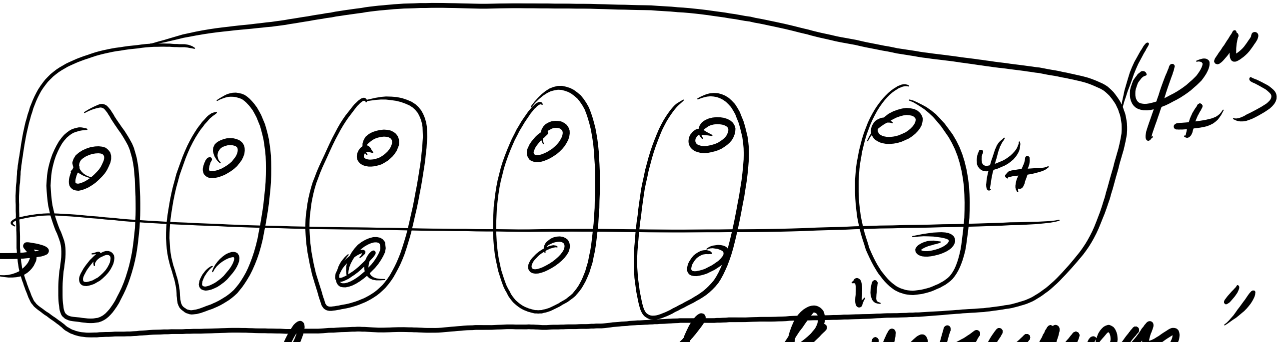
$$\rho = \frac{e^{-\beta H}}{\mathrm{tr}(e^{-\beta H})}$$

$\beta = \frac{1}{k_Б T}$ ← обр. темп.

темп.

$$H = \sum_i h^{i,i+1}$$

анциллы



$e^{-\beta H}$ — оператор эволюции во "мнимом" времени

Чем меньше T, тем больше β (тем сложнее искать).

$$\rho \propto \underline{\underline{e^{-\frac{\beta}{2}H}}} \cdot I \cdot \underline{\underline{e^{-\frac{\beta}{2}H}}}$$

$\uparrow$ един. оператор.

Для N частиц максим. перепл. сост. имеет вид

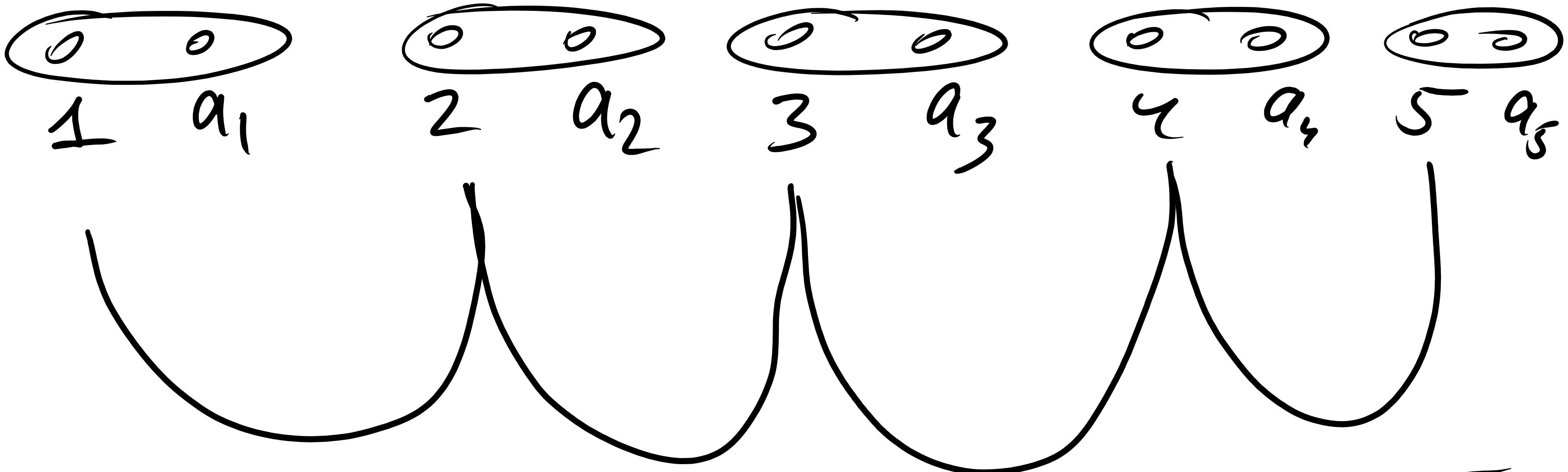
$$|\psi_+\rangle \otimes |\psi_+\rangle \ldots |\psi_+\rangle = |\psi_+^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{d^N}} \sum_{i_1,\ldots,i_N=1}^{d} |i_1 \ldots i_N\rangle \otimes |i_1 \ldots i_N\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_a$$

$1a_1 \quad 2a_2 \quad Na_N$

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i_1} |i_1\rangle \otimes |i_1\rangle = |\psi_+\rangle$$

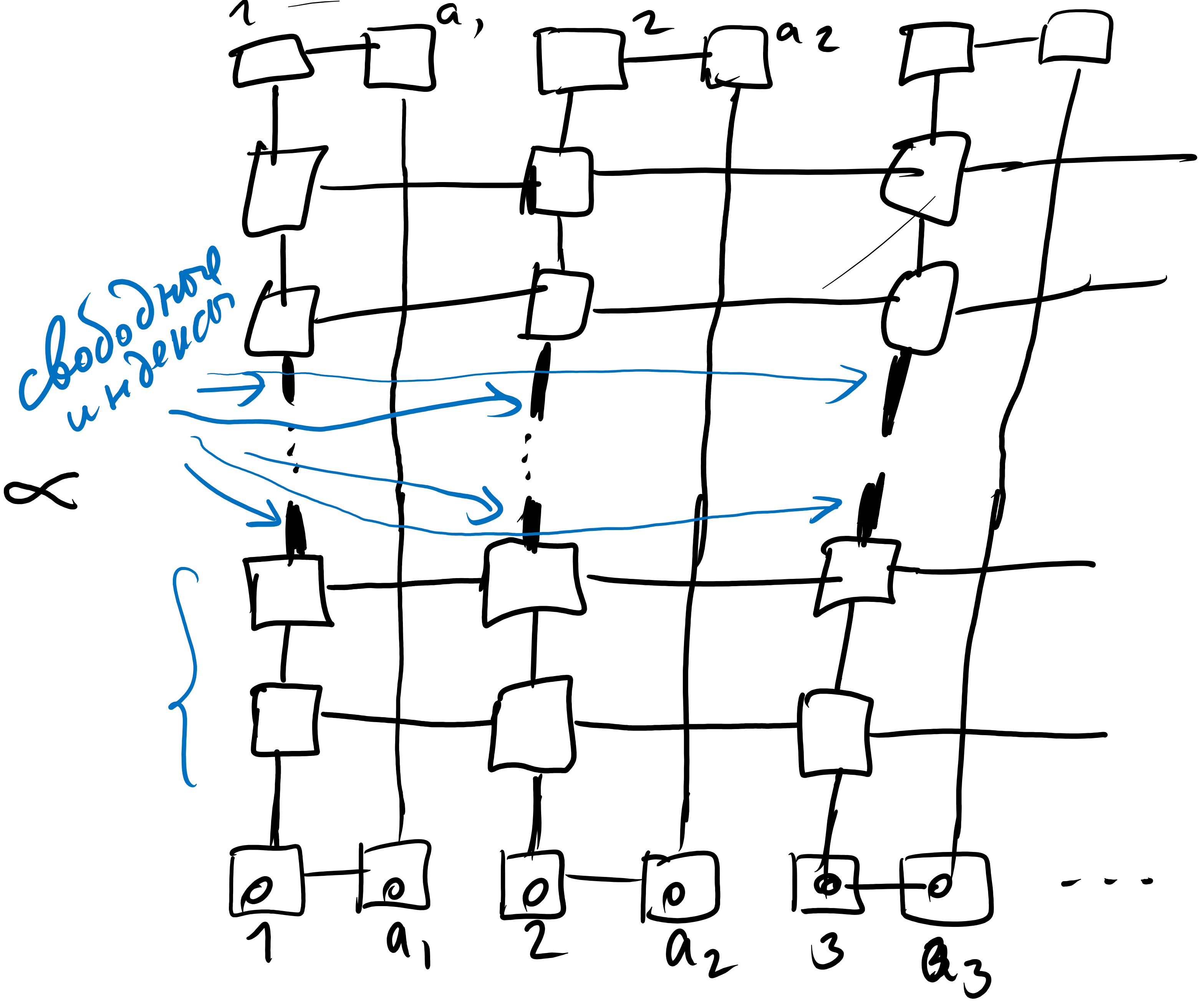
$$\mathrm{tr}_a \left(|\psi_+^N\rangle\langle\psi_+^N| \right) = \frac{1}{d^N} \cdot I$$

$$I = \sum_{i_1,\ldots,i_N} |i_1 \ldots i_N\rangle\langle i_1 \ldots i_N|$$



здесь действует $e^{-\frac{\beta}{2}H}$

$\rho \propto$

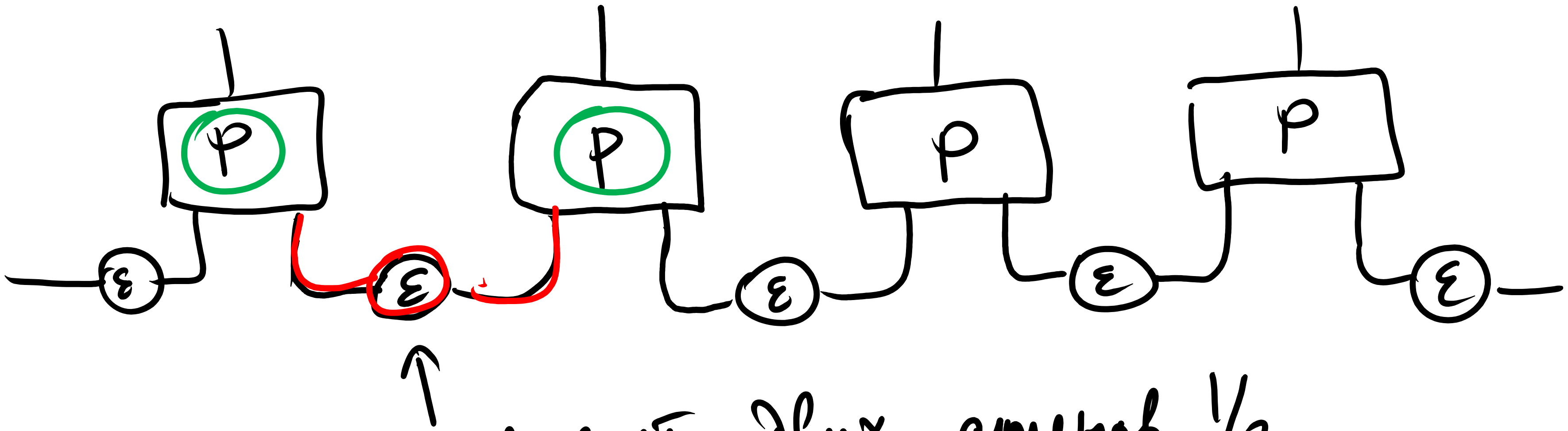


бра-версия $\langle \psi(i\beta/2)|$

$|\psi(i\beta/2)\rangle$

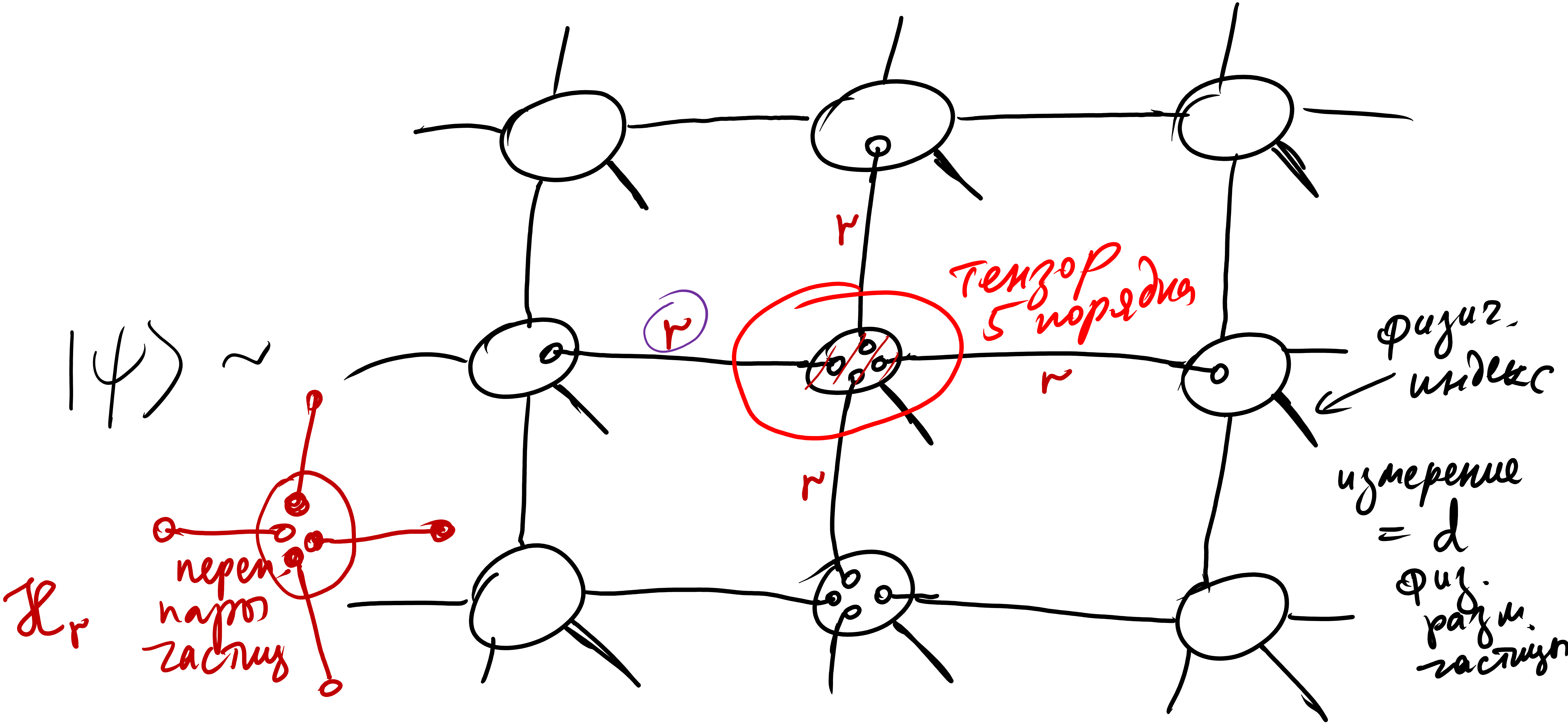
$\boxed{\text{PEPS}}$ projected entangled-pair state

AKLT - модель

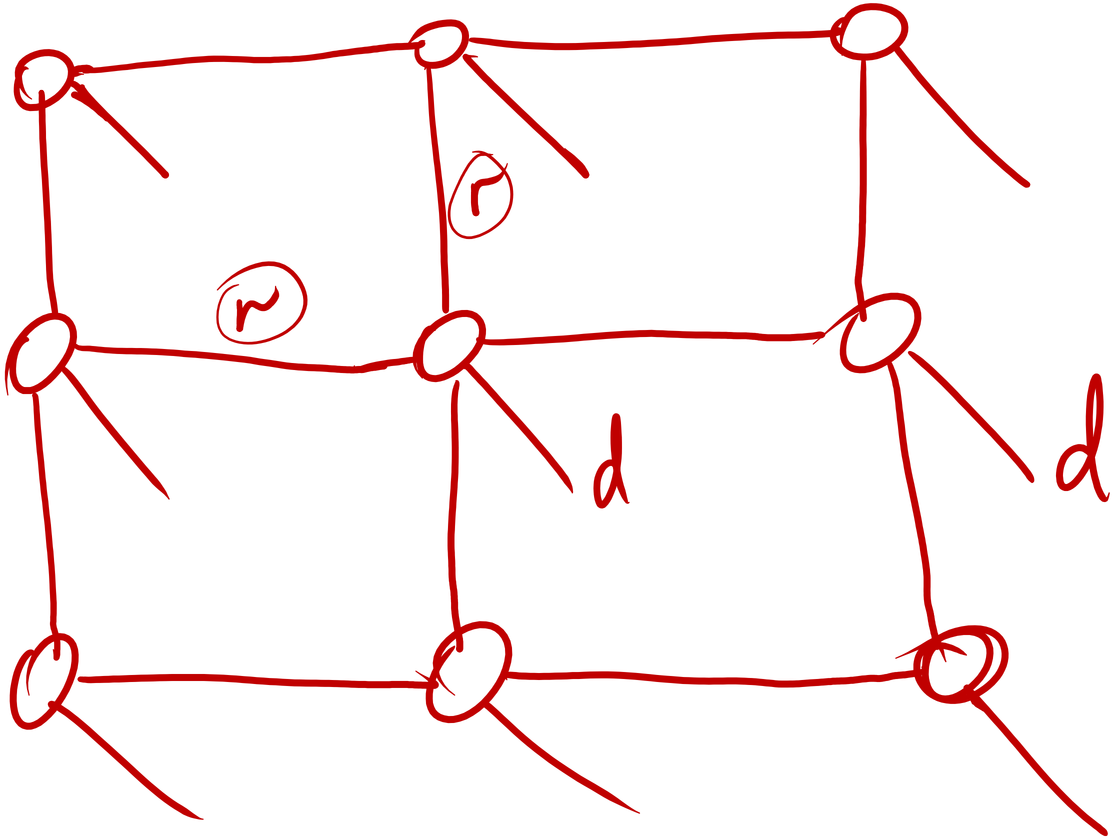


сингл. сост. двух спинов 1/2

Двумерная решётка из частиц



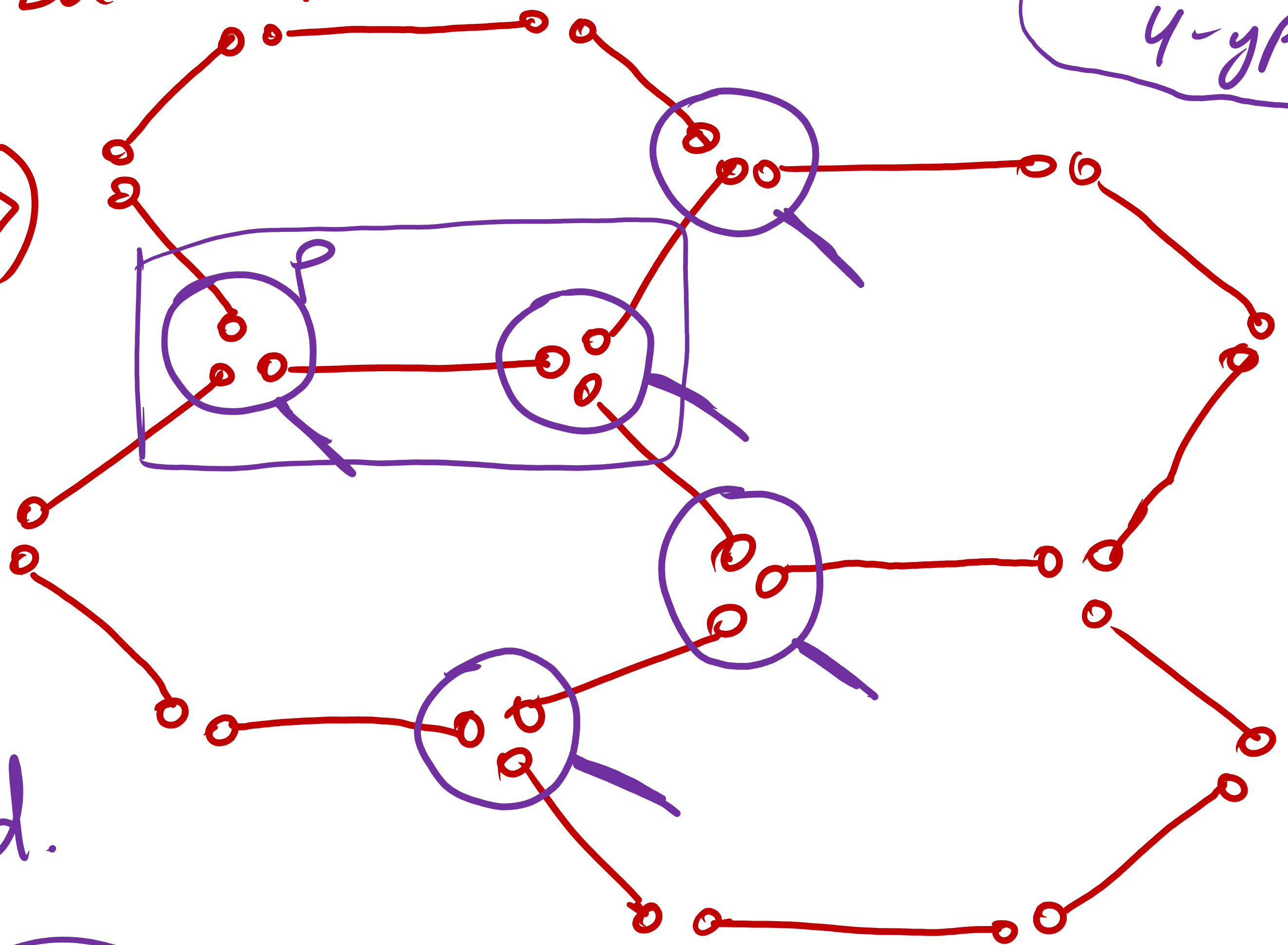
PEPS para r

$|\psi\rangle =$ 

$\in \mathbb{C}^{d^9}$

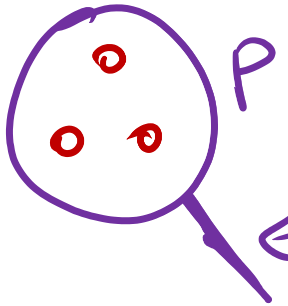
Пример: 2d - AKLT модель

структ. пгелинар… сост для 4-уровн. кв. систем.



$$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

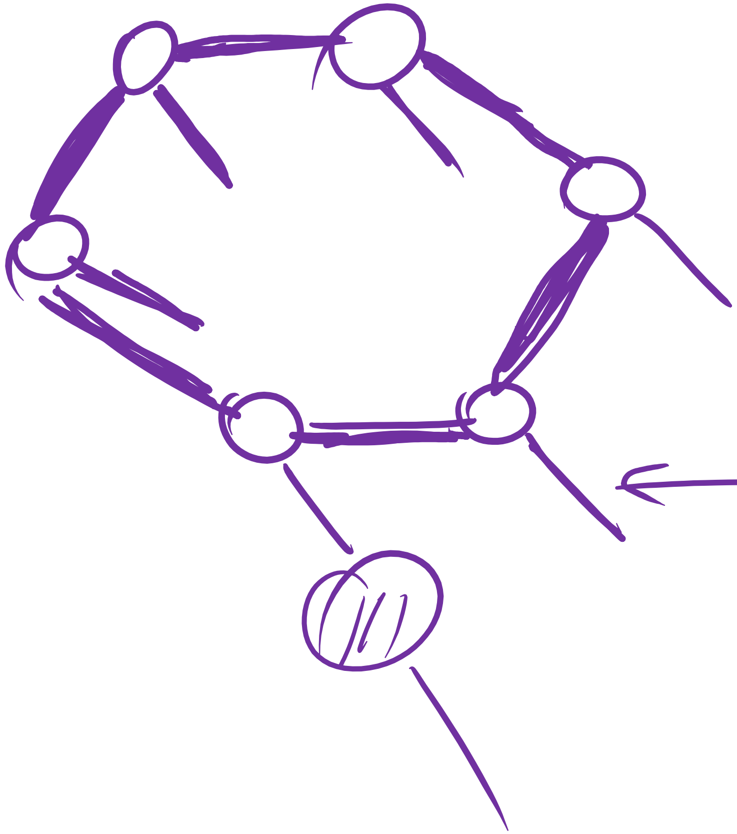
$\uparrow$
$\mathbb{C}^4$



$\leftarrow$ $\boxed{\text{изм.} = 4} = d.$

$$\mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^4 : P = |1\rangle\underbrace{\langle\uparrow\uparrow\uparrow|}_{= S = 3/2,\ M = 3/2} + |2\rangle\langle S=\tfrac{3}{2}, M=\tfrac{1}{2}| + |3\rangle\langle S=\tfrac{3}{2}, M=-\tfrac{1}{2}| + |4\rangle\langle\downarrow\downarrow\downarrow|$$

$S=\frac{3}{2}, M=-\frac{3}{2}$



физический спин $3/2$

$$d = 2\cdot\frac{3}{2}+1 = 4.$$

Упражнение: гамильтониан 2d-AKLT, для которого построенное сост. яв-ся основным.