Обзор математики Древней Индии

S. G. **Dani**
Ш. Г. **Дани**
shrigodani@cbs.ac.in

University of Mumbai, Kalina, Mumbai 400098
Университет Мумбаи, Калина, Мумбаи 400098
UM-DAE Centre for Excellence in Basic Sciences
Центр передового опыта в области фундаментальных наук

Санкт-Петербургский семинар по истории математики

06.01.2022

План

Целью этого выступления будет

– обзор традиций и источников знаний по древнеиндийской математике,

– описание событий основных периодов в их хронологической последовательности,

– выделение некоторых отличий различных времен,

– демонстрация наглядных примеров из различных тем.

Источники

Наши основные непосредственные сведения о математике древней (и средневековой) Индии происходят из следующих источников:

Шульбасутры (Сульбасутры) (VIII в. до н.э. – II в. до н.э.)

Канонические сочинения джайнов (V в. до н.э. – III в. н.э.)

Сиддханты – астрономические трактаты (ок. IV–XII вв.)

Работы по распространению и популяризации математики (VIII–XIV вв.)

Керальская школа математики и астрономии (XIV–XVII вв.)

Дополнительно: археологические источники (например, цивилизация долины Инда, храмовые и гражданские постройки разных периодов), литературные источники (ведические Самхиты, Рамаяна, Махабхарата и т. д.), культурные практики и т. д.

На заре развития

Знания о древности из косвенных источников:

– Раскопки долины Инда: демонстрируют замечательную геометрическую точность в планировке зданий и в градостроительстве.

Систематическое расположение мер длины и веса в двоичной системе счисления.

– Упоминание больших чисел в Ведах и эпосах Рамаяна и Махабхарата:

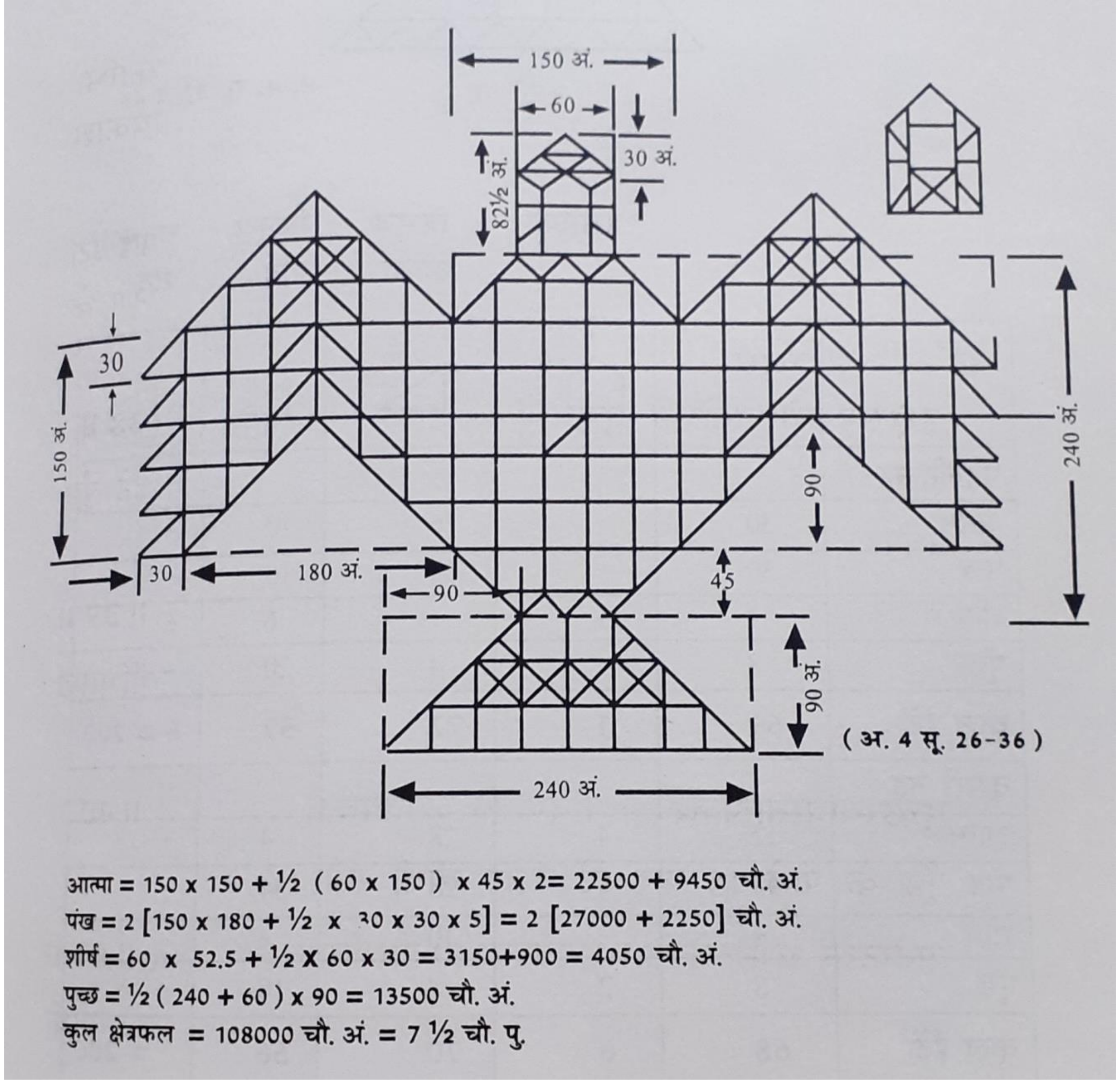
– Ноль упоминается в некоторых очень ранних произведениях, таких как Чандас-шастра (Chandah Shastra) древнеиндийского математика Пингала (ок. 200 г. до н. э.).

Шульбасутры (Sulbasutras): мотивация

[*Сутра* – в древнеиндийской литературе лаконичное и отрывочное высказывание, афоризм, позднее — своды таких высказываний. В сутрах излагались различные отрасли знания, почти все религиозно-философские учения Древней Индии. *Шульба-сутры* – сутры, содержащие данные геометрии по сооружению алтаря для жертвенного огня]

Сульвасутры (Śulvasútras, шульбасутры) – это каноны конструкций алтарей или платформ (vedis), и огневых платформ для жертвоприношений (agnis, citis) при проведении ведических ритуалов.

Здесь конструкция одного слоя *агни* в форме сокола.



Шульбасутры: обзор

Существует четыре основных Шульбасутры, диапазоны периодов которых оцениваются, как показано ниже. Есть четыре основных Шульбасутры, их периодизация показана ниже:

– Баудхаяна (Baudhāyana, 800 – 500 г. до н.э.),

– Манава (Mānava, 700 – 450 г. до н.э.),

– Āпастамба (Āpastamba, 600 – 400 г. до н.э.) и

– Катьяяна (Kātyāyana, 350 – 200 г. до н.э.)

Баудхаяна шульбасутра: наиболее систематическое изложение.

Две главы посвящены математическим принципам.

Манава шульбасутра: неупорядоченная и наивная, но содержащая оригинальные идеи

Шульбасутры: геометрия

Вот некоторые основные геометрические сведения, содержащиеся в шульбасутрах:

– Теорема Пифагора: явно сформулирована во всех четырех шульбасутрах.

– Построение различных прямолинейных фигур, таких как квадраты, прямоугольники, трапеции и т.д.

– Проведение перпендикуляров с помощью различных построений.

– Геометрический метод преобразования квадрата в круг (примерно такой же площади).

– Формула (приближённая) для «квадратуры круга».

– Длина стороны квадрата, равновеликого кругу, вычисляется как диаметр, умноженный на

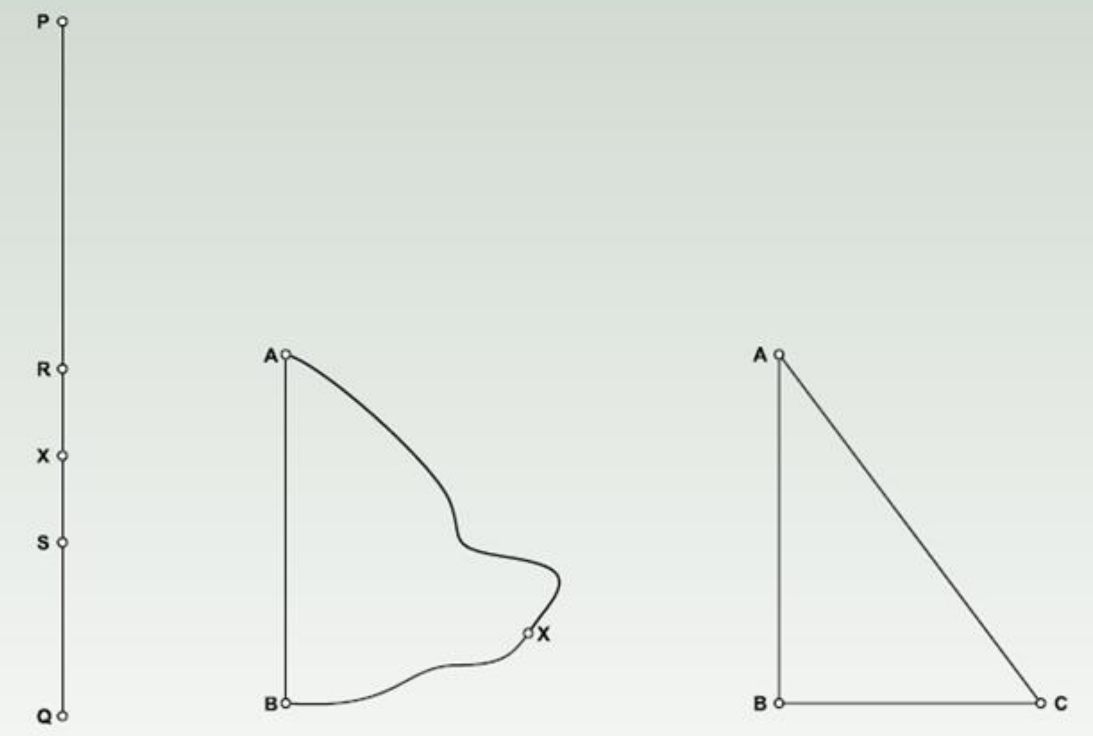
$$\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{29}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{29}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$$

Шульбасутры: наиболее яркие моменты

Применение обратной теоремы Пифагора для проведения перпендикуляров, необходимых в различных построениях.

Для этой цели широко использовались тройки (3; 4; 5) и (5; 12; 13).

Построение перпендикуляра по методу Ньянчана (Nyanchana)



Figures 3a, 3b and 3c: Construction of perpendicular by the *Nyanchana* method

Основные моменты – продолжение

В шульбасутре Āпастамба есть построение Махаведи, также иллюстрируемое тройками (8; 15; 17) и (12; 35; 37)

– Изменение масштаба, используемого для изготовления подобных фигур кратно большего размера

– Выражение для $\sqrt{2}$ как $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{34}$, что даёт 1,4142156… с точностью до 5-го знака вместо 1, 4142135…

Труды джайнов: мотивация

[*Джамбудвипа* – название, часто используемое для описания территории Великой Индии в древнеиндийских источниках. Термин основан на понятии двипа, что в древнеиндийской космогонии означает "остров" или "континент". Джамбудвипа – Индийский остров Ежевики. Термин Джамбудвипа был использован Ашокой для обозначения своего царства в третьем веке до нашей эры. "Планеты называются двипами. Космическое пространство подобно воздушному океану. Точно так же, как в водном океане есть острова, эти планеты в космическом океане называются двипами, или островами в космическом пространстве" (Чайтанья Чаритамрита Мадхья 20.218, Комментарий)].

- Математика, вдохновлённая космологической теорией джайнов, играла значительную роль в их священных писаниях периода прибл. с V века до н.э. по III век н.э.
- Считалось, что земной мир состоит из Джамбудвипы (*Jambudvipa*, земля) в форме плоского диска, окруженного попеременно кольцами воды и земли, простирающимися до бесконечности.
- Помимо этого, территория Джамбудвипы была разделена на 7 горных хребтов, идущих параллельно друг другу, и много подобных географических деталей.

Геометрия джайнов

В традиции джайнизма число π (отношение длины окружности к диаметру круга) брали как $\sqrt{10}$. Например, длина окружности острова Джамбудвипа, диаметр которого предположительно составлял 100000 йоджан, вычислялся как

$$\sqrt{10 \times (100000)^2} = \sqrt{10^{11}},$$

что составляло 316227 йоджан, 3 гавьюти, 128 дхану, 13 $\frac{1}{2}$ ангула и ещё немного (1 йоджана = 4 гавьюти = 8000 дхану = 768 ангула). Это значение π широко использовалось в Индии вплоть до XV века.

[yojana – базовая мера длины в ведийской литературе и Древней Индии. По данным разных источников, составляет 8-13 км]

Квадратный корень

Этот пример иллюстрирует метод нахождения квадратных корней, который преобладал в Индии в древние времена.

	5 4 7 5 6	
Subtract square	4	root = 2
Divide by twice the root	4) 14 (3 12	Placing quotient at the next place, the root = 23
Subtract square of quotient	27 9	
Divide by twice the root	46) 185 (4 184	Placing quotient at the next place, the root = 234
Subtract square of quotient	16 16	

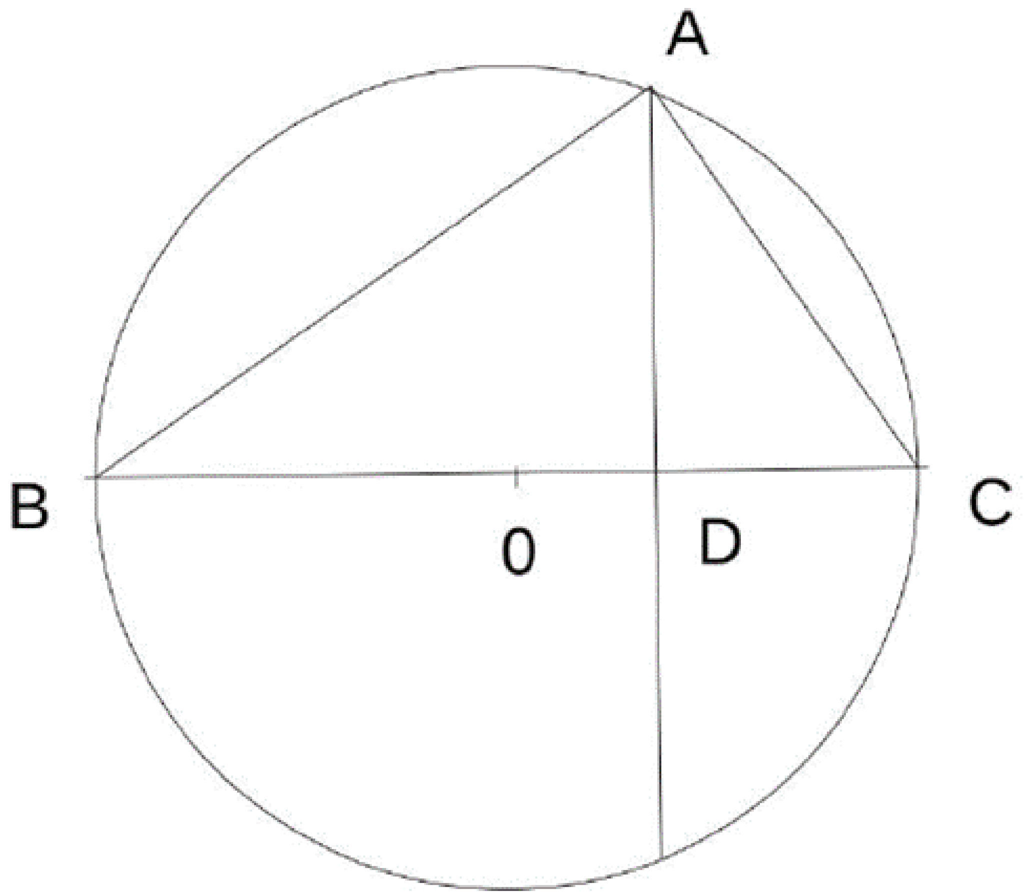
The process ends. The root is 234.

Геометрия джайнов

Пусть c – хорда, h – соответствующая «стрелка» в окружности, и a – соответствующая малая дуга.

В отличие от некоторых общих геометрических формул, у них была такая занимательная приближенная формула для a, как

$a = \sqrt{6h^2 + c^2}$. Считается, что эта формула в целом лучше аналогичных формул Герона в греческой традиции.



Традиция сиддханты: обзор

Астрономия в эпоху Ведийской цивилизации (XV – V вв. до н.э. В период XIII – IX вв. до н.э. были написаны *Веды* – древнейшие литургические тексты, которые легли в основу современного индуизма): важным источником является «Джьотиша-веданга» (Vedāṅga Jyotiṣa, первая индийская работа по математической астрономии), написанная древнеиндийским астрономом и астрологом Лагадха (Lagadha).

В ранние века первого тысячелетия рост интереса к этой науке подогревался влиянием греческой математической астрономии (а также астрологии!).

Это создало более чем тысячелетнюю традицию развития и применения математических идей.

Помимо создания широких возможностей в арифметике, общей алгебре и геометрии, в этот период процветали две основные области математики: тригонометрия и теория диофантовых уравнений (поиск целочисленных решений уравнений).

Основные творцы

Ариабхата (Арьябхата, Aryabhata, р. 476), первооткрыватель, с его знаменитой работой *Арьябхатия* (499).

Среди других основных участников традиции назовём

Варахамихира (Varāhamihira, VI век), автор *Панча-сиддхантика* (Panchasiddhantika).

Брахмагупта (Brahmagupta, р. 598), создатель трактата *Брахма-спхута-сиддханта* (Brahmasphuta siddhanta, 628 г. н.э.) и *Кхандакхадьяка* (Khandakhadyaka, 665 г. н.э.).

Бхаскара I (современник Брахмагупты) сочинил трактаты Махабхаскария (Mahabhaskariya, комментарий к Арьябхатии) и Лагубхаскария (Laghubhaskariya).

Бхаскара II (Bhaskara II, Бхаскарачарья, р. 1114 г.) составил сборник *Сиддханта Широмани* (*Siddhanta Shiromani*, «Венец учения», состоящий из 4-х трактатов: «Лилавати» – арифметика, «Биждаганита» – алгебра, «Голадхайя» – сферика, «Гранхаганита» – теория планетных движений.

Нараяна Пандита (Пандитачарья, Narayana Pandita) составил *Ганиту Каумуди* (Ganita Kaumudi, 1356 г.) и *Биджаганита ватамса* (Bijaganita vatamsa).

Поздние труды джайнов

По мере развития математики рос интерес к ее применению в других сферах жизни, особенно в торговле и коммерции, архитектуре, культурной деятельности и т. д. Многие ученые джайнизма сыграли важную роль в этом развитии.

Шридхара (Sridhara, VIII век), автор *Патиганиты* (Patiganita), объяснял арифметику и геометрию для широкой аудитории.

Махавира (Mahavira, IX век), автор *Ганита Сара Санграха* (Ganita Sara Sangraha), который в обширном регионе на юге Индии в течение нескольких столетий служил учебником по общей математике, а также по некоторым продвинутым темам.

Таккур Феру (Thakkur Pheru, ок. 1300 г.) составил *Ганита Сара Каумуди* (Ganita Sara Kaumudi), сборник источников по математике.

Тригонометрия

Истоки в греческой тригонометрии –

Роль хорды сместилась к полухорде, что привело к появлению функции синуса.

«Sinus Totus»: были популярны различные значения R (у каждого из них были свои операционные преимущества).

Одно из часто используемых значений R, используемое, в частности, Ариабхатой, было 3438; тогда окружность приближается к 21600, количеству минут (360×60) окружности.

Это облегчает вычисление с помощью отношения $\sin\theta \approx \theta$

Разностные таблицы синусов

Таблица Ариабхаты, в которой перечислены последовательные разности *R*-синусов, кратных 24-й части прямого угла

(а именно, $3^0 45'$).

मखि भखि फखि धखि णखि ञखि
ङखि हस्झ स्ककि किष्ग श्घकि किघ्व[1] ।
घ्लकि किग्र हक्य धकि किच[2]
स्ग श्झ[3] ङ्व क्ल प्त फ छ कलार्धज्याः ॥ १२ ॥

225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22, and 7—these are the Rsine-differences (at intervals of 225 minutes of arc) in terms of minutes of arc.

Тригонометрические формулы

Расчеты были основаны на формулах, эквивалентных

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ и $2\sin^2\frac{\theta}{2} = 1 - \cos\theta$, очевидные значения для

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$ и $\sin 45^0 = {}^{1}/_{\sqrt{2}}$

Правило сумм $\sin(\theta + \varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \sin\varphi\cos\theta$ было введено Бхаскарачарьей в XII веке.

Метод разностного уравнения Ариабхаты, основанный на наблюдении: если $S_1, \ldots S_{24}$ являются R-синусами θ, где θ кратно $3^0 45'$, тогда

$$(S_{k+1} - S_k) - (S_k - S_{k-1}) \approx -{}^{S_k}/_{S_1}$$

Заметим, что это соотношение напоминает известное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 \sin t}{dt^2} = -\sin t$$

Формула Бхаскары I (Bhaskara I)

Есть также интересная формула, приписываемая Бхаскаре I; в наших обозначениях это: для θ, заданного в угловой мере

$$\sin\theta \approx 4\frac{\theta(180-\theta)}{40500-\theta(180-\theta)}$$

Эта формула замечательно точна, погрешность менее 1%, за исключением очень малых значений θ. Непонятно, как она появилась. Похоже, что многие астрономы того времени считали её весьма полезной и иногда предпочитали пользоваться ею помимо таблицы.

Куттака (Kuttaka)

(алгоритм поиска целочисленных решений диофантовых уравнений)

Речь идет о поиске целочисленных решений уравнений вида $ax + b = cy + d$, или, что то же самое, $ax - by = c$, где числа $a,\ b,\ c,\ d$ – целые положительные.

Ариабхата представил метод решения проблемы, известный как куттака.

Метод основан на процессе упрощения уравнений относительно размера коэффициентов путем взаимного деления.

Для уравнения $16x - 487y = 138$ это делается так:

The mutual division runs as follows :

```
16) 487 (30
    480
    ---
     7) 16 (2
        14
        --
        2) 7 (3
           6
           -
           1×2+138          optional number=2
           -------
              1 4 0 (70
              1 4 0
              -----
                  0
```

"Уравнение Пелля"

Уравнение $x^2 - dy^2 = k$, где d – целое положительное неквадратное число, а k – любое целое число, изучалось в Индии, начиная с Брахмагупты в VII веке под названием *варга пракрити* (varga prakriti).

Метод решения (известный как чакравала) был предложен Джаядевой (Jayadeva, XI век) и продвигался Бхаскарачарьей (Bhaskaracharya).

Уравнение было введено в Европе в XVII веке Ферма; первоначальные решения пришли от Браункера (Brouncker) и Уоллиса (Wallis).

Уравнение стало называться уравнением Пелля (Pell's equation) – именем, введенным Эйлером. Лагранж завершил картину, использовав «разложение в непрерывную дробь».

Тождество Брахмагупты
(Brahmagupta's identity)

В поисках решения уравнения $x^2 - dy^2 = 1$ Брахмагупта представил тождество (ныне известную по его имени)

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1x_2 \pm dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 \pm x_2y_1)^2$$

Таким образом, если $(x_1 . y_1)$ и (x_2, y_2) приводят к значениям k_1 и k_2 слева, тогда $(x_1x_2 \pm dy_1y_2, x_1y_2 \pm x_2, y_1)$ – это пара, соответствующее значение которой равно k_1k_2. Таким образом, процесс приводит к «композиции» (бхавана, bhavana).

Используя композицию, Брахмагупта получил решения $x^2 - dy^2 = 1$ для различных значений d, включая 92, 83, ...

Это полагает начало отношениям типа $10^2 - 92 \times 1 = 8$ и использование композиции для поиска новых отношений, что в конечном итоге приводит к 1 справа.

Метод чакравалы (Chakravala)

[циклический алгоритм для решения неопределенных квадратных уравнений, в том числе уравнения Пелля. Чакра на санскрите означает цикл].

Метод Чакравала, предложенный Джаядевой и Бхаскарой, основан на определенном систематическом использовании композиции Брахмагупты «Бхавана».

Метод во всяком случае не медленнее, а зачастую и существеннее быстрее стандартного, основанного на разложении непрерывных дробей.
Метод оказывается не менее быстрым во всех случаях и существенно быстрее во многих случаях по сравнению со стандартным методом, основанным на разложении непрерывных дробей. На языке современной теории чисел он во многом созвучен некоторым работам Гаусса XVIII века.

Индийские математики, применявшие этот метод, были им довольны; подтверждение того, что метод всегда приводит к решению, было дано Кришнасвами Айангаром (Krishnaswamy Ayyangar) в 1929–1930 годах, а улучшенное понимание предоставлено Селениусом (Selenius, 1975).

Керальская школа Мадхавы

Школа, основанная Мадхавой, существовала со второй половины XIV по XVII век. Нилакантха (Nilakantha), Джехадева (Джьехадева, Jyesthadeva), Шанкара Вариар (Sankara Variar) – вот некоторые имена представителей этой школы.

Школа Кералы разрабатывала идеи зарождающегося математического анализа. В частности, они получили разложения в ряд $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$ (ряд Грегори), ряд Лейбница для арктангенса и ряды Ньютона для синуса и косинуса.

Ряд для $\pi/_4$ неудобен для вычисления π (слишком медленно сходится); они преодолели эту трудность, введя «поправочные условия», генерирующие быстро сходящиеся последовательности. Среди других задач, работа над рядами использовалась для улучшения тригонометрических таблиц.

Благодарю за внимание