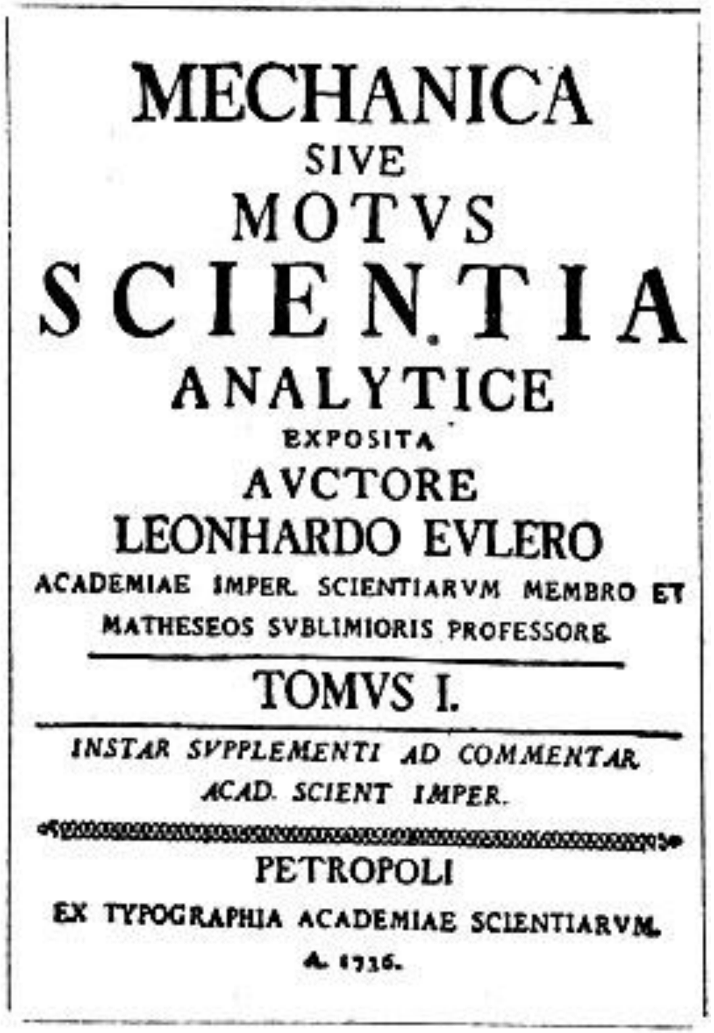
Развитие теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова.

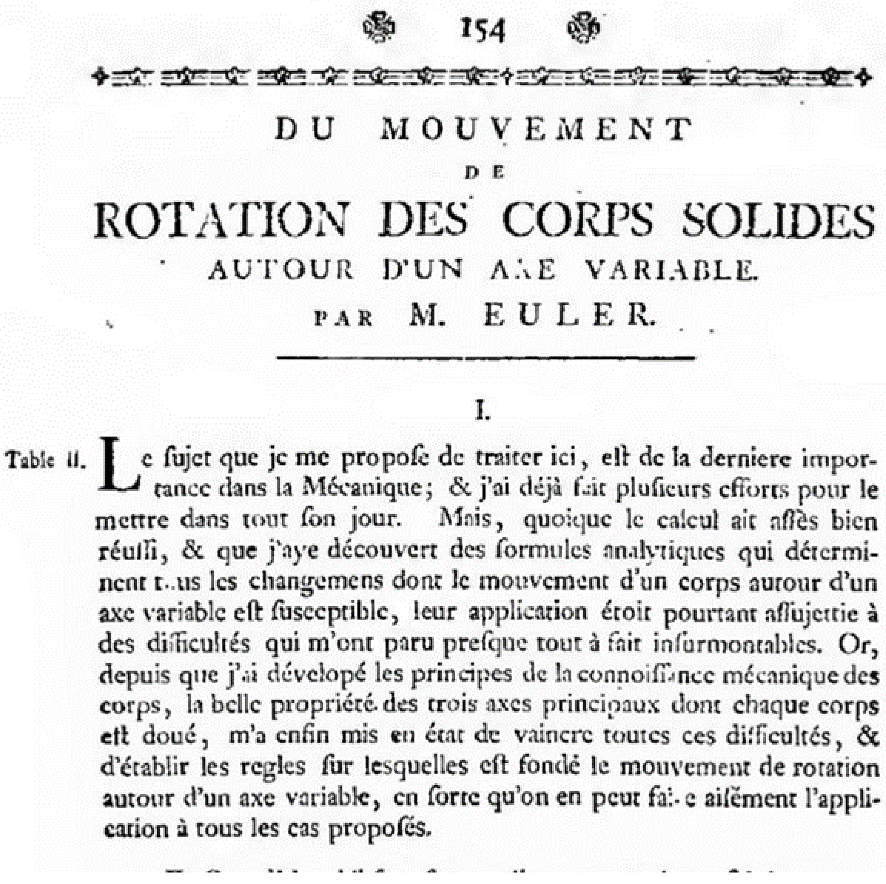
Ст.преподаватель кафедры теоретической механики и теории механизмов и машин ВКА им А.Ф. Можайского
Юлина А.О.

Leonhard Euler (1707−1783)

1736, 1758



MECHANICA
SIVE
MOTVS
SCIENTIA
ANALYTICE
EXPOSITA
AVCTORE
LEONHARDO EVLERO
ACADEMIAE IMPER. SCIENTIARVM MEMBRO ET
MATHESEOS SVBLIMIORIS PROFESSORE.
TOMVS I.
INSTAR SVPPLEMENTI AD COMMENTAR.
ACAD. SCIENT. IMPER.
PETROPOLI
EX TYPOGRAPHIA ACADEMIAE SCIENTIARVM.
A. 1736.



154

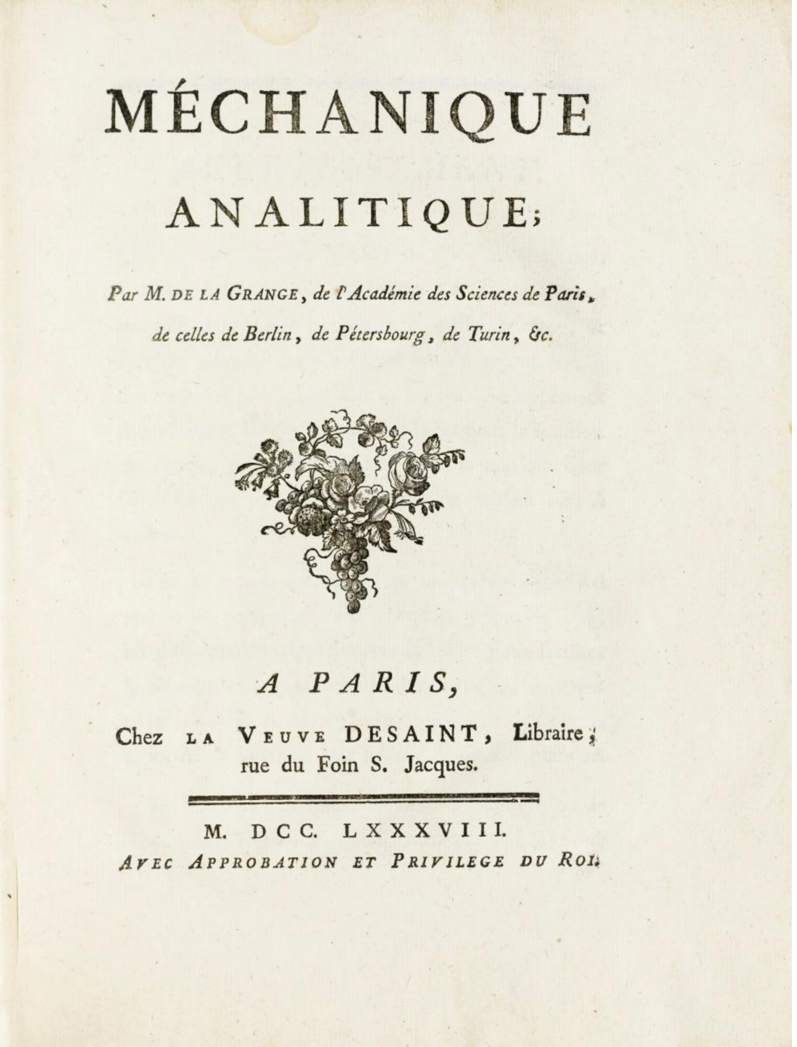
DU MOUVEMENT
DE
ROTATION DES CORPS SOLIDES
AUTOUR D'UN AXE VARIABLE.
PAR M. EULER.

I.

Table II. Le ſujet que je me propoſe de traiter ici, eſt de la derniere importance dans la Mécanique; & j'ai déjà fait pluſieurs efforts pour le mettre dans tout ſon jour. Mais, quoique le calcul ait aſſès bien réuſſi, & que j'aye découvert des formules analytiques qui déterminent tous les changemens dont le mouvement d'un corps autour d'un axe variable eſt ſusceptible, leur application étoit pourtant aſſujettie à des difficultés qui m'ont paru preſque tout à fait inſurmontables. Or, depuis que j'ai dévelopé les principes de la connoiſſance mécanique des corps, la belle propriété des trois axes principaux dont chaque corps eſt doué, m'a enfin mis en état de vaincre toutes ces difficultés, & d'établir les regles ſur leſquelles eſt fondé le mouvement de rotation autour d'un axe variable, en ſorte qu'on en peut faire aiſément l'application à tous les cas propoſés.

Joseph Louis Lagrange (1736–1813)

1788


MÉCHANIQUE

ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano (1682−1766)

1750

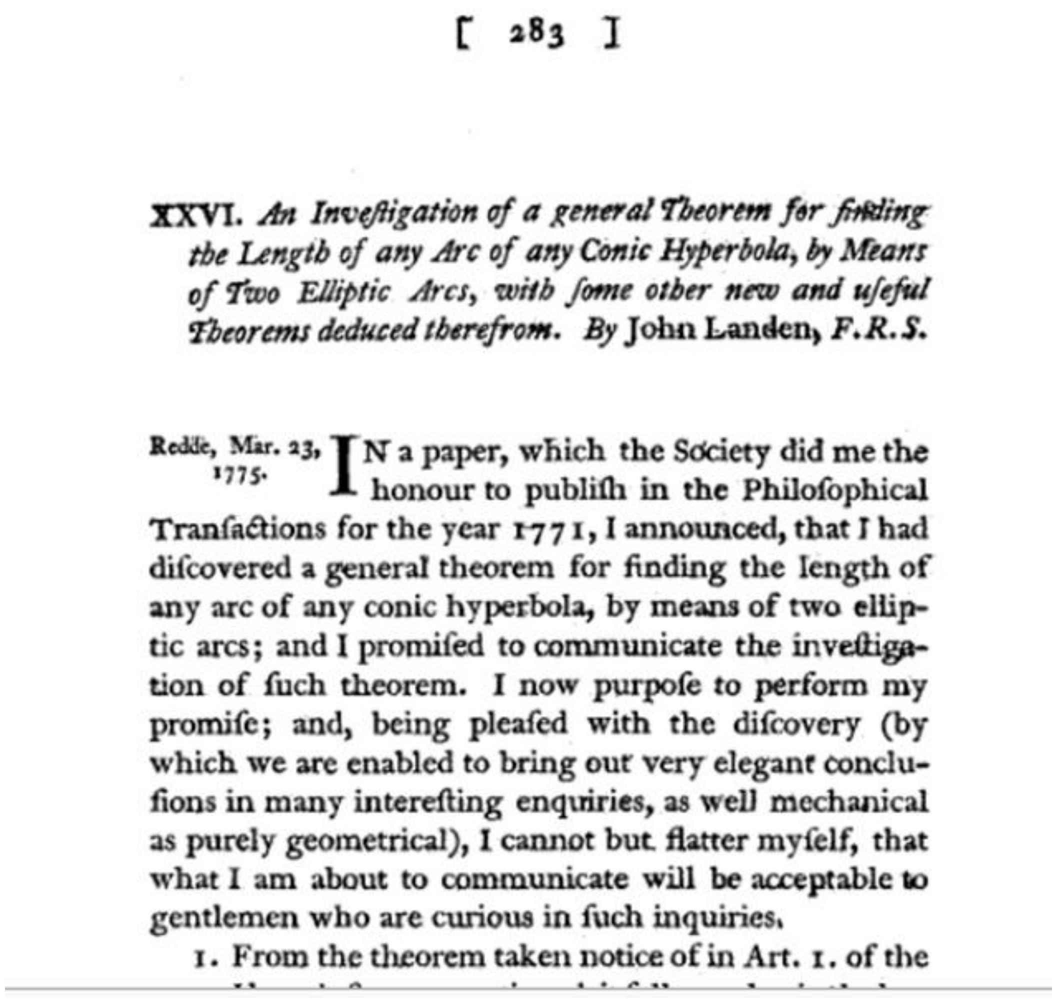
PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL CONTE GIULIO CARLO
DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO PRIMO.

IN PESARO

L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.
NELLA STAMPERIA GAVELLIANA
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

JOHN LANDEN (1719–1790)

1775



[283]

XXVI. *An Inveſtigation of a general Theorem for finding the Length of any Arc of any Conic Hyperbola, by Means of Two Elliptic Arcs, with ſome other new and uſeful Theorems deduced therefrom.* By John Landen, *F.R.S.*

Redde, Mar. 23, 1775.

IN a paper, which the Society did me the honour to publiſh in the Philoſophical Tranſactions for the year 1771, I announced, that I had diſcovered a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola, by means of two elliptic arcs; and I promiſed to communicate the inveſtigation of ſuch theorem. I now purpoſe to perform my promiſe; and, being pleaſed with the diſcovery (by which we are enabled to bring out very elegant concluſions in many intereſting enquiries, as well mechanical as purely geometrical), I cannot but flatter myſelf, that what I am about to communicate will be acceptable to gentlemen who are curious in ſuch inquiries.

1. From the theorem taken notice of in Art. 1. of the

Adrien-Marie Legendre (1752−1833)

1792

MÉMOIRE

SUR

LES TRANSCENDANTES

ELLIPTIQUES,

Où l'on donne des méthodes faciles pour comparer et évaluer ces transcendantes, qui comprennent les arcs d'ellipse, et qui se rencontrent fréquemment dans les applications du calcul intégral.

Lu à la ci-devant Académie des Sciences en avril 1792.

PAR ADRIEN-MARIE LE GENDRE.

A PARIS,

Chez { le C. DU PONT, Imprimeur-Libraire, rue de la Loi, N°. 14.
le C. FIRMIN DIDOT, Libraire rue Thionville.

L'AN DEUXIÈME DE LA RÉPUBLIQUE.

MÉMOIRE

SUR

LES TRANSCENDANTES

ELLIPTIQUES.

PAR ADRIEN-MARIE LE GENDRE.

UN grand nombre d'intégrales peuvent se déterminer par le seul secours des arcs de cercle et des logarithmes, qui sont les plus simples des quantités transcendantes; mais pour étendre les applications du calcul intégral, il faut nécessairement avoir recours à des transcendantes plus composées. C'est en examinant avec soin la nature et les propriétés de ces transcendantes, au moins de celles dont l'usage est le plus fréquent, qu'on parviendra à simplifier considérablement les résultats de la théorie, et à en rendre l'usage commode pour la pratique.

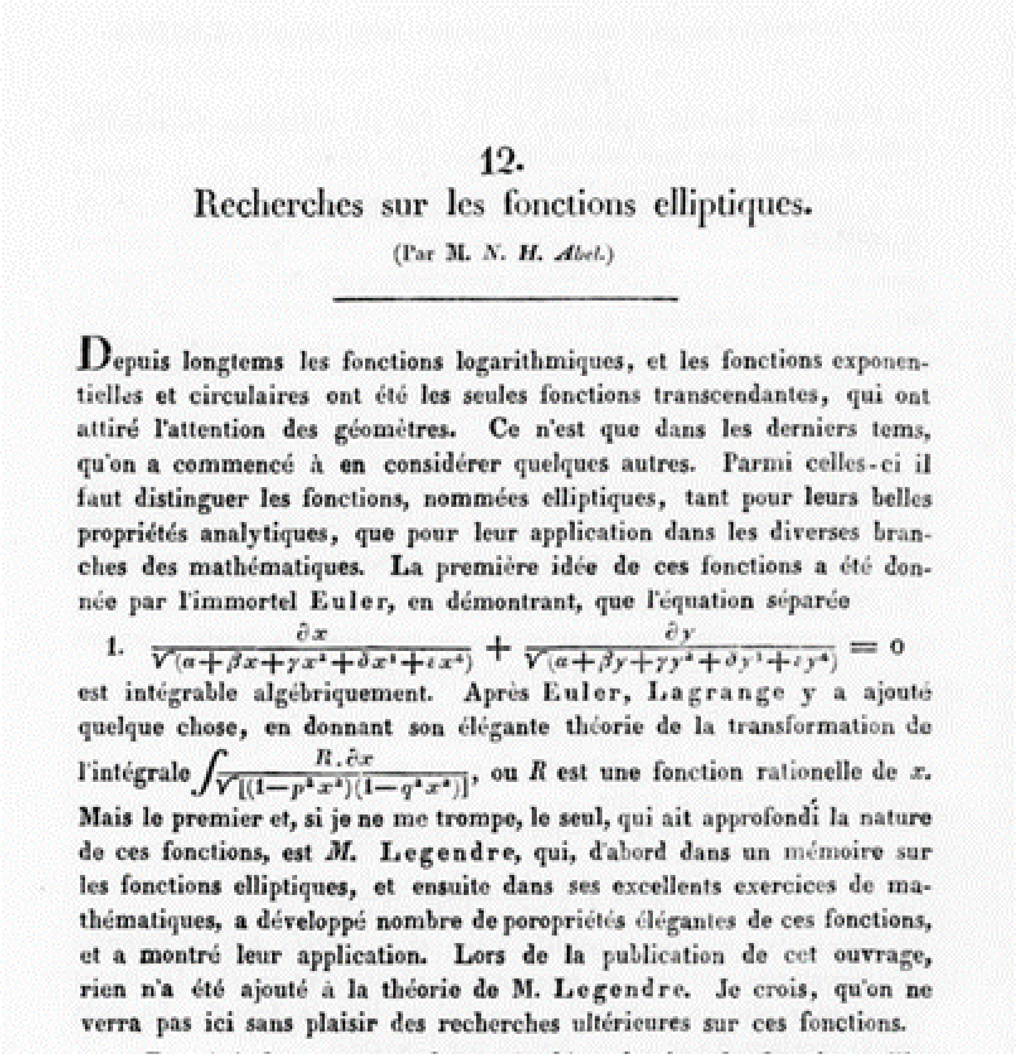
Les arcs d'ellipse sont, après les arcs de cercle et les logarithmes, une des transcendantes les plus simples, et dont on pourroit faire en quelque sorte un nouvel instrument de calcul, si une fois on s'étoit familiarisé avec leurs propriétés, et que l'on eût des moyens faciles de les évaluer avec précision. C'est sur quoi nous avons proposé quelques vues nouvelles dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris, année 1786.

Mais si les arcs d'ellipse ajoutent beaucoup aux moyens de l'analyse, sur-tout depuis qu'on a remarqué que les arcs

A 2

Niels Henrik Abel (1802−1829)

1827



12.

Recherches sur les fonctions elliptiques.

(Par M. *N. H. Abel.*)

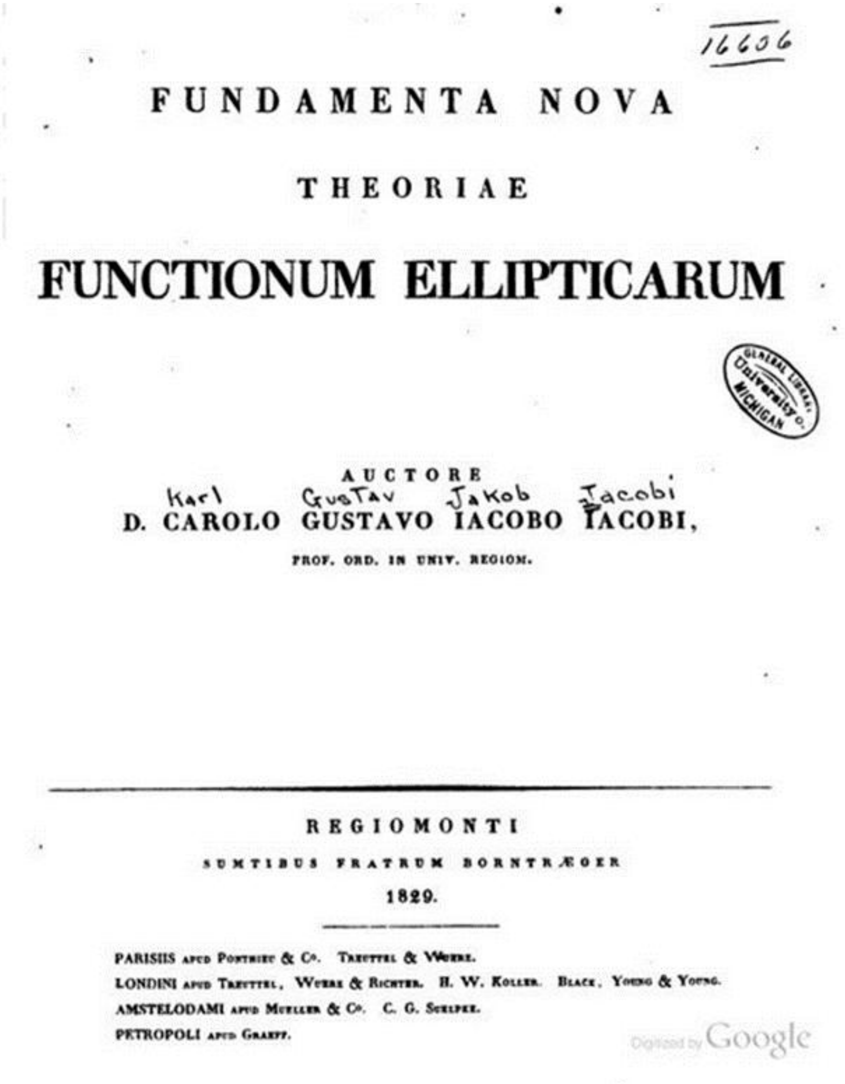
Depuis longtems les fonctions logarithmiques, et les fonctions exponentielles et circulaires ont été les seules fonctions transcendantes, qui ont attiré l'attention des géomètres. Ce n'est que dans les derniers tems, qu'on a commencé à en considérer quelques autres. Parmi celles-ci il faut distinguer les fonctions, nommées elliptiques, tant pour leurs belles propriétés analytiques, que pour leur application dans les diverses branches des mathématiques. La première idée de ces fonctions a été donnée par l'immortel Euler, en démontrant, que l'équation séparée

$$1.\quad \frac{\partial x}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}+\frac{\partial y}{\sqrt{(\alpha+\beta y+\gamma y^2+\delta y^3+\varepsilon y^4)}}=0$$

est intégrable algébriquement. Après Euler, Lagrange y a ajouté quelque chose, en donnant son élégante théorie de la transformation de l'intégrale $\int\frac{R.\partial x}{\sqrt{[(1-p^2x^2)(1-q^2x^2)]}}$, ou R est une fonction rationelle de x. Mais le premier et, si je ne me trompe, le seul, qui ait approfondi la nature de ces fonctions, est *M.* Legendre, qui, d'abord dans un mémoire sur les fonctions elliptiques, et ensuite dans ses excellents exercices de mathématiques, a développé nombre de poropriétés élégantes de ces fonctions, et a montré leur application. Lors de la publication de cet ouvrage, rien n'a été ajouté à la théorie de M. Legendre. Je crois, qu'on ne verra pas ici sans plaisir des recherches ultérieures sur ces fonctions.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804−1851)

1829



FUNDAMENTA NOVA

THEORIAE

FUNCTIONUM ELLIPTICARUM

AUCTORE

Karl Gustav Jakob Jacobi

D. CAROLO GUSTAVO IACOBO IACOBI,

PROF. ORD. IN UNIV. REGIOM.

REGIOMONTI

SUMTIBUS FRATRUM BORNTRÆGER

1829.

PARISIIS APUD PONTHIEU & Co. TREUTTEL & WURTZ.

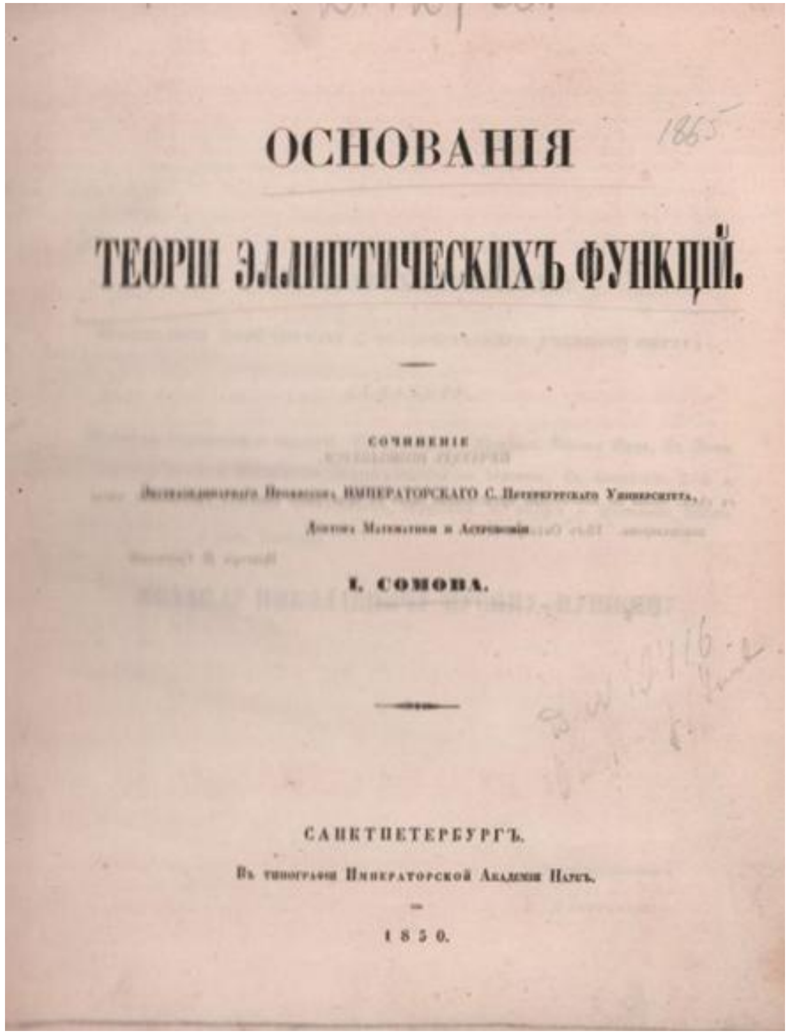
LONDINI APUD TREUTTEL, WURTZ & RICHTER. H. W. KOLLER. BLACK, YOUNG & YOUNG.

AMSTELODAMI APUD MUELLER & Co. C. G. SULPKE.

PETROPOLI APUD GRAEFF.

О.И. Сомов (1815-1876)

1850



ОСНОВАНІЯ

ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

СОЧИНЕНІЕ

Экстраординарнаго Профессора ИМПЕРАТОРСКАГО С. Петербургскаго Университета,

Доктора Математики и Астрономіи

І. СОМОВА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1850.

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815−1897)

1862

$$\wp(z) = \wp(z;\ 2\omega_1,\ 2\omega_3) =$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum\nolimits'^{\,+\infty}_{m_1,\ m_3 = -\infty} \left[\frac{1}{(z - 2\Omega_{m_1, m_3})^2} - \frac{1}{(2\Omega_{m_1,\ m_3})^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{z^2} + c_2 z^2 + c_4 z^4 + \ldots,$$

Софья Васильевна Ковалевская(1850−1891) 1888

SUR LE PROBLÈME DE LA ROTATION

D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE[1]

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

A STOCKHOLM.

§ 1.

Le problème de la rotation d'un corps solide pesant autour d'un point fixe peut se ramener, comme on sait, à l'intégration du système d'équations différentielles suivant:

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), &\qquad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'',\\
(1)\qquad &B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), &\qquad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma,\\
&C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), &\qquad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma'.
\end{aligned}
$$

•История возникновения понятия эллиптической функции.

• Становление аппарата теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова.

•Представление эллиптических функций через тета функции (теорема Абеля).

•Решение задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара.

Становление аппарата теории эллиптических функций в работах Абеля, Якоби, Вейерштрасса и Сомова.

Понятие эллиптической функции.

$$z = \int f(x, \sqrt{R})\,dx,$$

R целая функция относительно x

f - рациональная относительно x и R

$$\int \frac{P dx}{\sqrt{R}} \sim a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{m-3} x^{m-3}$$

$$P = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m$$

$$b_0 \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + b_1 \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + b_2 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} + \ldots + b_m \int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{m-3} x^{m-3}) \sqrt{R}.$$

$m > 2$

$m \geq 3$ - алгебраическое представление

$m < 3$ - трансцендентные функции

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}, \qquad P = \frac{A}{(x-\alpha)^m}$$

A и α - постоянные, а m- целое положительное число.

$$A \int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{R}} \qquad x - \alpha = \frac{1}{z}. \qquad \int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$$

$$\int \frac{(x-\alpha)^m dx}{\sqrt{R}}$$

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{R}} = b_0 \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + b_1 \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}} + b_2 \int \frac{dx}{(x-\alpha)^2 \sqrt{R}} + \left(\frac{a_0}{(x-\alpha)^2} + \frac{a_1}{(x-\alpha)^3} + \ldots + \frac{a_{m-3}}{(x-\alpha)^{m-3}}\right)$$

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}},$$ где P- некая рациональная функция.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{R}}.$$

$$x = \frac{p+qy}{1+y}, R_1 = c(y^2 \pm a)(y^2 \pm b), \lambda = \frac{p-\alpha}{q-\alpha}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{R_1}}, \int \frac{y^2dy}{\sqrt{R_1}}, \int \frac{dy}{(y^2-\lambda^2)\sqrt{R_1}}$$

$$\int \frac{dy}{(y^2-\lambda^2)\sqrt{R_1}} \Rightarrow \int \frac{f(\sin^2\varphi)d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}$$

Подстановка $$y^2 = \frac{A + B\sin^2\varphi}{C + D\sin^2\varphi}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}}$$

Обозначения $$\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)} = \Delta(k, \varphi)$$

амплитуда

модуль

Модулярная функция

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{R_1}} = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$H(\varphi) = \int \frac{\alpha + \beta\sin^2\varphi}{\gamma + \delta\sin^2\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$H(\varphi)$$

Некоторые свойства

$$H(-\varphi) = -H(\varphi)$$

$$H(\varphi) = H(n\pi \pm \psi) = 2nH(\tfrac{\pi}{2}) \pm H(\psi), 0<\psi<\frac{\pi}{2}.$$

Классификация

$$F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} - \text{ функция первого рода,}$$

$$\mathrm{E}(\varphi) = \int_0^{\varphi} \Delta\varphi \cdot d\varphi - \text{ функция второго рода,}$$

$$\Pi(\mathrm{n},\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\Delta\varphi} - \text{ функция третьего рода.}$$

Гиперэллиптические (ультра эллиптические функции)

$n = \dfrac{\delta}{\gamma}$ - параметр эллиптической функции $\Pi(n, \varphi)$

$$\sin\varphi = x.$$

$F(\varphi), E(\varphi), \Pi(n, \varphi)$ ⇒

$$T_1(x) = \int_0^x \frac{dx}{\Delta x},$$

$$T_2(x) = \int_0^x \frac{x^2 dx}{\Delta x},$$

$$T_3(x) = \int_0^x \frac{dx}{(1+nx^2)\Delta x},$$

$$\Delta x = \sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

обозначения Якоби для обратных функций

Если α величина функции $F(\varphi)$, тогда для обозначения обратной функции используем обозначение:

$$\varphi = am(\alpha)$$

тригонометрические зависимости

$$\sin am(\alpha), \cos am(\alpha), \tan am(\alpha)$$

$$\Delta\varphi = \Delta am(\alpha)$$

Общее свойство эллиптических функций (Фаньяно, Эйлер)

Если $\psi(x)$ трансцендентная функция, а $\dfrac{d\psi(x)}{dx}$ алгебраическая, то можно найти такую алгебраическую зависимость между частными значениями $x = x_1, x_2, \ldots x_n$, при которой сумма

$$m_1\psi(x_1) + m_2\psi(x_2) + \ldots m_n\psi(x_n)$$

CONST

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

$$Log(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Трансцендентные функции (Абель)

Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano (1682-1766)

DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO PRIMO.

IN PESARO

L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.

Единственный портрет Нильса Хенрика Абеля, сделанный художником Гербицем в Париже в 1826 г.

Памятник Абелю в королевском парке в Осло (скульптор Густав Вигеланн, 1908 г.).

Теорема Абеля

" Précis d'une théorie des fonctions elliptiques "

Издали этот труд Абеля уже после его смерти в 1841 году в журнале « Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut national de France et imprimés par son ordre T.VII, 1841."

Теорема Абеля

Дано:

$$T_3(x) = \int \frac{d\,x}{(1-\frac{x^2}{a^2})\Delta x}$$

$$\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},\ k^2 > 1$$

$$\psi(x) = A(x^2 - x_1^2)(x^2 - x_2^2)(x^2 - x_3^2)\dots(x^2 - x_\mu^2)$$

$\psi(x) \rightarrow$ $\varphi(x)$ нечет, $f(x)$ чет

$$\psi(x) = f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2$$

Целая, коэффициенты неопределенные

Доказать:

$$T_3(x_1) + T_3(x_2) + \dots T_3(x_\mu) = const - \frac{a}{2\Delta a}\cdot\log\left[\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta a}{f(a)-\varphi(a)\Delta a}\right].$$

Доказательство:

$$x = x_1, x_2, \dots x_\mu \Rightarrow \quad \psi(x) = f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2 = 0$$

$$\psi'(x)dx + \delta\,\psi(x) = 0$$

$$\delta\,\psi(x) = 2[f(x)\,\delta\,f(x) - \varphi(x)\delta\,\varphi(x)\,](\Delta x)^2$$

$$\psi(x) = f(x)^2 - \varphi(x)^2(\Delta x)^2 = 0 \;\Rightarrow f(x) = \pm\,\varphi(x)\Delta x, \varphi(x)(\Delta x)^2 = \pm\,f(x)(\Delta x)$$

$$\delta\,\psi(x) = -2[\varphi(x)\,\delta\,f(x) - f(x)\delta\,\varphi(x)\,]\Delta x = \; -\theta(x)\Delta x$$

$$\theta(x) = [\varphi(x)\,\delta\,f(x) - f(x)\delta\,\varphi(x)\,]$$

$$\psi'(x)dx = \theta(x)\Delta x \Rightarrow \frac{dx}{\Delta x} = \frac{\theta(x)}{\psi'(x)}$$

$$\Rightarrow T_3(x) = \int \frac{\theta(x)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\psi'(x)}$$

$$x = x_1, x_2, \ldots x_\mu \Rightarrow \quad \sum T_3(x) = \int \sum \left[\frac{\theta(x)}{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\psi'(x)} \right]$$

$$\sum T_3(x) = \frac{a}{2}\int \frac{\varphi(a)\delta f(a) - f(a)\delta\varphi(a)}{f^2(a) - \ \varphi^2(a)(\Delta a)^2}$$

$$\frac{\varphi(a)\Delta a}{f(a)} = z.$$

$$\sum T_3(x) = -\frac{a}{2\Delta a}\int \frac{\delta z}{1 - z^2} = Const. - \ \frac{a}{4\Delta a} log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

Таким образом, окончательно

$$\sum T_3(x) = Const. - \ \frac{a}{4\Delta a} log\left(\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta a}{f(a)-\varphi(a)\Delta a}\right)^2$$

Представление эллиптических функций через тета функции.

$$\Theta(x) = 2[\varphi(x)\delta f(x) - f(x)\delta\varphi(x)]$$

$$T_3(x) = \int \frac{\Theta(x)}{(1-\frac{x^2}{a^2})\psi'(x)}$$

$$T_3(x_1) + T_3(x_2) + \dots T_3(x_\mu) = const - \frac{a}{2\Delta a} \cdot \log[\frac{f(a)+\varphi(a)\Delta a}{f(a)-\varphi(a)\Delta a}].$$

Карл Якоби

$$T_3(x_1) + T_3(x_2) + \ldots T_3(x_\mu) = const - \frac{a}{2\Delta a} \cdot \log[\frac{f(a) + \varphi(a)\Delta a}{f(a) - \varphi(a)\Delta a}].$$

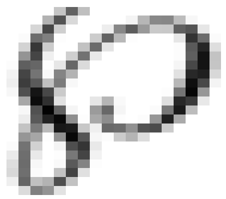
$$\theta_1(x)$$

$$\theta_2(x)$$

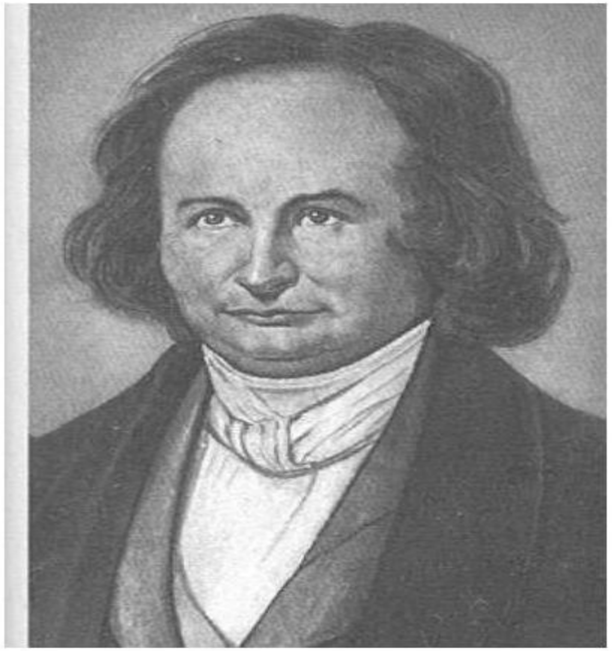
Быстросходящиеся ряды

Карл Вейерштрасс

$$\begin{cases}\theta_1(x)\\ \theta_2(x)\end{cases}$$



Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851)



Weierstraß

(1815-1897)

Осип Иванович Сомов
1815 - 1876

- Академик Императорской Санкт-Петербургской Академии Наук
- Доктор математики и астрономии
- Заслуженный профессор Санкт-Петербургского университета

ОСНОВАНІЯ

ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ.

СОЧИНЕНІЕ

Экстраординарнаго Профессора ИМПЕРАТОРСКАГО С. Петербургскаго Университета,

Доктора Математики и Астрономіи

І. СОМОВА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

═

1850.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Стран.

ВВЕДЕНІЕ .... I — VI

Глава I. Приведеніе эллиптическихъ интеграловъ къ простѣйшимъ .... 1 — 28

Глава II. Сравненіе эллиптическихъ функцій .... 28 — 59

Глава III. Преобразованіе эллиптическихъ аргументовъ .... 59 — 108

Глава IV. Разложеніе функцій даннаго аргумента въ безконечныя произведенія и безконечные ряды .... 108 — 140

Глава V. Свойства функцій втораго вида .... 140 — 164

Глава VI. Свойства эллиптическихъ функцій третьяго вида .... 164 — 189

Глава VII. Способы для вычисленія эллиптическихъ функцій .... 189 — 206

ПРИЛОЖЕНІЕ ТЕОРІИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХЪ ФУНКЦІЙ КЪ РѢШЕНІЮ НѢКОТОРЫХЪ ВОПРОСОВЪ, ЗАИМСТВОВАННЫХЪ ИЗЪ ГЕОМЕТРІИ и МЕХАНИКИ.

A. Спрямленіе дугъ круговыхъ линій .... 207 — 216

B. Квадратура нѣкоторыхъ поверхностей втораго порядка .... 216 — 227

C. Притяженіе точки однороднымъ эллипсоидомъ .... 117 — 233

D. Вращательное движеніе твердаго тѣла около точки .... 233 — 146

История аналитического решения задачи Эйлера о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки

1. Леонард Эйлер - 1758

2. Жозеф Луи Лагранж - 1773

3. Осип Иванович Сомов - 1850

4. Софья Васильевна Ковалевская - 1887

Задачи Динамики (Леонард Эйлер)

Первая

Дано: кинематические параметры движения

Найти: силовые характеристики

Вторая

Дано: силовые характеристики

Найти: кинематика движения

Движение свободного твердого тела

- Свободные оси вращения, главные оси инерции
- Движение свободного твердого тела: поступательное движение с центром инерции+ вращение вокруг этого центра.
- Кинематическое описание такого движения
- Составление динамических уравнений

Уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной токи Леонарда Эйлера

$$\begin{cases} P = A \cdot \dfrac{dP}{dt} + (C - B)qr, \\ Q = B \cdot \dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp, \\ R = C \cdot \dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq. \end{cases}$$

- «итог всей Теории Движения твердых тел содержится в этих трех достаточно простых формулах»
- Использование подвижной системы координат, неизменно связанной с телом – система главных осей инерции твердого тела
- Введение подвижного трехгранника, определение положения подвижной системы координат относительно неподвижной – углы Эйлера, 1748г.

Жозеф Луи Лагранж

- Понятие мгновенной оси вращения
- Новый вывод динамических уравнений Эйлера, на основе дифференциальных уравнений движений системы («Уравнения Лагранжа второго рода»)
- Постановка задачи о вращении твердого тела : точка опоры не совпадает с центром тяжести тела («работает» сила тяжести)
- Введение динамической симметрии в задачу о вращении

Решение задачи о вращении твердого тела около неподвижной точки в случае первоначального удара

В этом случае тело имеет три степени свободы и начинает вращаться от первоначального удара. Далее ударные нагрузки отсутствуют, действует только сила тяжести.

Здесь A, B, C – моменты инерции относительно осей, параллельных главным осям вращающегося тела. При этом предполагается, чтоB-средняя между этими тремя величинами. Положение этих осей определяется углами Эйлера ψ, φ, θ.

Соответственно p, q, r – угловые скорости вращения относительно этих осей, составляющие мгновенную скорость вращения $\omega = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}$

Дифференциальные уравнения движения (2-я часть Механики Пуассона)

$$\begin{cases} dt = \dfrac{A}{B-C} \cdot \dfrac{dp}{qr}, \\ dt = -\dfrac{B}{A-C} \cdot \dfrac{dq}{pr}, \\ dt = \dfrac{C}{A-B} \cdot \dfrac{dr}{pq}; \end{cases}$$

система фундаментальных интегралов:

$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = l^2$ (l^2 - момент первоначального удара),

$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h$ (h - кинетическая энергия).

$$d\psi = -\frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} \cdot l \cdot dt. \Rightarrow \psi = -l\int \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} \cdot dt.$$

$$\psi = -\frac{l}{A}\int_{t_0}^{t} dt - \frac{l(A-B)}{A}\int_{t_0}^{t} \frac{Ap^2+Bq^2}{A^2p^2+B^2q^2} dt$$

$$\begin{cases} p = -\dfrac{l}{A}\sin\theta\sin\varphi = -\sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{A(A-C)}}\cos am(u)\,, \\[2ex] q = -\dfrac{l}{B}\sin\theta\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{l^2 - Ch}{B(B-C)}}\sin am(u)\,, \\[2ex] r = \dfrac{l}{C}\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{Ah - l^2}{C(A-C)}}\Delta am(u). \end{cases}$$

Где $u = n(t - t_0), n = \sqrt{\frac{(B-C)(Ah-l^2)}{ABC}}$.

$$\psi = -\frac{l}{An}\cdot u - \frac{l(A-B)(A-C)}{A^2(B-C)n}\int_0^u \frac{sin^2 am(u)du}{1 + \frac{C(A-B)}{A(B-C)}sin^2 am(u)}.$$

Последний интеграл есть эллиптическая функция третьего вида с мнимым параметром. Записывая ее через тета функцию $\theta(x)$ получаем выражение для угла прецессии ψ:

$$\psi = -nu \pm \frac{i}{2} \cdot ln \frac{\theta(u-ai)}{u+ai}.$$

Заключение

▪Ньютон определил законы динамики, а Эйлер разделил все задачи динамики на два класса и указал математический аппарат для решения задач каждого класса.

▪

▪Механическая задача, поставленная Эйлером и развитая в трудах Лагранжа, получила математическое воплощение в теории эллиптических функций.

▪

▪Теория эллиптических функций, обогащенная открытиями Абеля и Якоби, заняла важное место в математическом анализе и теоретической механике в период с 18 по 19 века.

▪

▪Созданный Якоби математический аппарат эллиптических функций позволил О.И. Сомов в 1850 г. блестяще решить задачу о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки при первоначальном ударе.

▪

▪Вейерштрасс заменил все частные формы θ-функции одной $\wp$-функцией

▪

▪Поэтому дальнейшее исследование задачи о движении волчка было продолжено на комплексной плоскости, направляющие косинусы при вращении тела вокруг неподвижной точки были получены в виде θ- или $\wp$-функций.

Спасибо за внимание